MAT 1100: Obligatoriske oppgave 1, H-08

Innlevering: *Senest fredag 19. september, 2008. kl. 14.30 på Ekspedisjonskontoret til Matematisk institutt (7. etasje NHA). Du kan skrive for hånd eller på datamaskin men besvarelsen må uansett leveres på papir. Erfaringsmessig blir det lange køer ved skriverne og på ekspedisjonskontoret rett før innleveringsfristen, så det er smart å levere tidligere.*
Obligen skal leveres med egen forside som du finner på:

http://www.uio.no/studier/emner/matnat/math/MAT1100/h08/obliger.xml

(det ligger lenke til denne siden på kurs-hjemmesiden, og det vil også være papirkopier av forsiden tilgjengelig ved innlevering). På nettsiden over finner du også regelverket for obliger ved Matematisk institutt. Husk spesielt å søke om utsettelse til *studieinfo@math.uio.no* før innleveringsfristen dersom du blir syk !

Instruksjoner: *Oppgaven er obligatorisk, og studenter som ikke får besvarelsen godkjent, vil ikke få adgang til avsluttende eksamen. For å få besvarelsen godkjent, må man ha 50% score, og det vil bli lagt vekt på en klar og ryddig besvarelse med gode begrunnelser. Alle svar skal begrunnes. Prosentangivelsen på oppgavene viser hvor stor del de utgjør av hele settet. Du kan få poeng på en oppgave selv om du ikke er kommet frem til et svar, og det er derfor viktig at du leverer inn alt du har kommet frem til. Studenter som ikke får sin opprinnelige besvarelse godkjent, men som gjennom besvarelsen viser at de har gjort et reelt forsøk på å løse oppgavene, vil få én mulighet til å levere en revidert besvarelse.*

Det er lov til å samarbeide og å bruke alle slags hjelpemidler. Den innleverte besvarelsen skal imidlertid være skrevet av deg og gjenspeile din forstålse av stoffet. Er vi i tvil om om du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om en muntelig redegjørelse.

Oppgavesetttet er på 2 sider. De tre første oppgavene kan løses på grunnlag av pensum fra kapittel 3 samt seksjon 1.5. Den siste oppgaven bygger på seksjon 4.3.

Oppgavesettet består av fire oppgaver som kan gjøres uavhengig av hverandre.

Oppgave 1:

a) (Teller 10%) Skriv det komplekse tallet $z = \frac{2-i}{3+i}$ på formen $a + ib$.

b) (Teller 10%) Det komplekse tallet z har polarkoordinater $r = 8$, $\theta = \frac{3\pi}{4}$. Skriv z på formen $a + ib$.

c) (Teller 20%) Finn alle tredje-røttene til $-4\sqrt{2} + i4\sqrt{2}$ og skriv dem på formen $a + ib$. Tegn inn disse tredje-røttene i det komplekse planet.

Oppgave 2:

a) (Teller 10%) Skissér området $\{z : \mathrm{Im}(z) < (\mathrm{Re}(z))^2\}$ i det komplekse planet.
(Oppgaven fortsetter på neste side)

b) (Teller 10%) Finn de $z = x + iy$ som oppfyller $|z| = |z - i|$. (Du kan foreksempel gi svaret som en likning i x, y-planet.) Skissér området $\{z : |z| = |z - i|\}$ i det komplekse planet.

Oppgave 3: (Teller 20%)

Vis at ± 1 er røtter i polynomet

$$p(z) = z^4 - 2z^3 + 4z^2 + 2z - 5.$$

Finn de andre røttene til $p(z)$ og finn kompleks og reell faktorisering av $p(z)$.

Oppgave 4:

a) (Teller 10%)
Finn grensene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{\sqrt{2n^2+4}}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+3n}-n}.$$

b) (Teller 10%)
Definer en følge $\{a_n\}$ ved

$$a_1 = 1 \qquad \text{og} \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n^2} \ \text{ for } n \geq 1.$$

Forklar hvorfor $a_n > 0$ for alle n (hvis du har lært om induksjonsbevis kan du godt skrive ned et formelt kortfattet induksjonsbevis for dette).
Vis at $a_{n+1} < a_n$ for $n \geq 1$ og forklar hvorfor $\{a_n\}$ er konvergent.
Finn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.