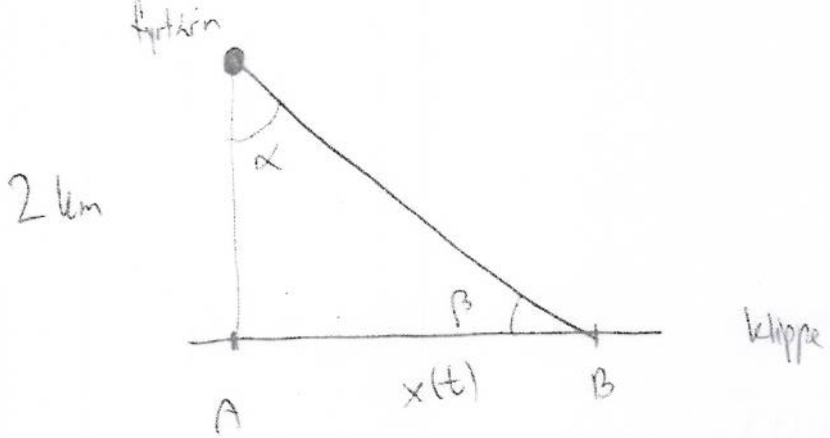
<u>eksempel</u> Et fyrtårn sender ut en roterende lysstråle. Stråla bruker 2 sek per omdreining.



Lyset treffer en klippevegg 2km borte.
Hvor fort beveger lysstrålen seg bortover klippeveggen når vinkelen β mellom klippeveggen og lysstrålen er $\frac{\pi}{6}$?

La $\alpha(t)$ betegne vinkelen mellom lysstrålen og linjen fra fyrtårnet til A. Vi ønsker å finne $x'(t)$ når $\beta = \frac{\pi}{6}$. Vi vet at strålen bruker 2 sek per omdreining, og vi vet

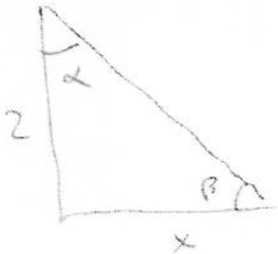
$$\text{omdreiningshastighet} = \frac{\cancel{\text{strekning}}\ \text{omdreiningsstrekning}}{\text{omdreiningstid}} = \frac{2\pi \text{ radianer}}{2 \text{ sek}}$$

$$= \pi \text{ radianer/sek.}$$

Altså $\alpha'(t) = \pi$ (rad/sek).

Finner først sammenhengen mellom $\alpha(t)$ og $x(t)$.

Vi har $\tan \alpha = \frac{x}{2}$



Altså

$$\tan \alpha(t) = \frac{x(t)}{2},$$

Deriverer begge sider

$$\left(\tan \alpha(t)\right)' = \left(\frac{x(t)}{2}\right)'$$

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha(t)} \cdot \alpha'(t) = \frac{x'(t)}{2}.$$

Løser for $x'(t)$ og får

$$x'(t) = \frac{2\,\alpha'(t)}{\cos^2 \alpha(t)}.$$

Hva er $\alpha(t)$ når $\beta = \frac{\pi}{6}$? I trekanten har man vinkelsum π ($= 180^\circ$), så

$$\alpha(t) + \frac{\pi}{2} + \underset{\beta}{\underset{\shortparallel}{\frac{\pi}{6}}} = \pi \quad \text{gir}$$

$$\alpha(t) = \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{6\pi - 3\pi - \pi}{6} = \frac{2\pi}{6}$$

$$= \frac{\pi}{3}.$$

Dette gir oss $x'(t) = \frac{2\alpha'(t)}{\cos^2 \alpha(t)} = \frac{2 \cdot \pi}{\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{2\pi}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{2\pi}{\frac{1}{4}} = 8\pi$

$\approx 25{,}1$

Hva vet vi om $x(t)$ og $y(t)$?

$$x(t)^2 + y(t)^2 = 5^2$$

$$x(t)^2 + y(t)^2 = 25.$$

Deriverer på begge sider (mhp. variabel t)

$$\left[x(t)^2 + y(t)^2\right]' = [25]'$$

$$2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) = 0$$

Løser mhp. $y'(t)$ og får

$$2y(t)y'(t) = -2x(t)x'(t)$$

$$y'(t) = \frac{-x(t)\,x'(t)}{y(t)}.$$

Vi kjenner ingen av funksjonene eksplisitt, men i vår situasjon har vi $x(t) = 4$ m og $x'(t) = 2$ m/s

Når $x(t) = 4$ vet vi også fra $x(t)^2 + y(t)^2 = 25$ at

$$y(t) = \sqrt{25 - 4^2} = \sqrt{25-16} = \sqrt{9} = 3.$$

Nå får vi $y'(t) = \frac{-4 \cdot 2}{3} = \frac{-8}{3}$. Svaret er altså: Idet vi trekker nedre ende utover med farten 2 m/s og når nedre ende er 4 m fra husveggen, da glir øvre enden nedover husveggen med en fart av $\frac{8}{3}$ m/s (nedover $\Leftrightarrow$ negativ hastighet $-\frac{8}{3}$ m/s)

Nå får vi uttrykt volumet ved

$$\frac{\pi}{3} r^2 h = \frac{\pi}{3}\left(\frac{hR}{\sqrt{h^2-2hR}}\right)^2 h = \frac{\pi}{3}\,\frac{h^2R^2}{h^2-2hR}\cdot h$$

$$= \frac{\pi R^2 h^2}{3(h-2R)}$$ Altså $V(h) = \dfrac{\pi R^2 h^2}{3(h-2R)}$. Def. mengde $(2R, \infty)$ se tegning.

Finner min.punkt:

$$V'(h) = \frac{\pi R^2}{3}\left(\frac{2h(h-2R)-h^2}{(h-2R)^2}\right) = \frac{\pi R^2}{3}\left(\frac{h^2-4hR}{(h-2R)^2}\right)$$

$$V'(h)=0 \iff h^2-4hR=0$$

$$h(h-4R)=0$$

$$\iff h=0 \text{ eller } h=4R.$$

$h=4R$ er et min.punkt. Dette gir $r = \dfrac{hR}{\sqrt{h^2-2hR}}$

$$= \frac{4R\cdot R}{\sqrt{(4R)^2-2\cdot 4R\cdot R}} = \frac{4R^2}{\sqrt{16R^2-8R^2}} = \frac{4R^2}{\sqrt{8R^2}} = \frac{4R^2}{2\sqrt{2}R} = \frac{2R}{\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{2}R.$$

Svar: Kjeglen med høyde $h=4R$ og grunnflateradius $r=\sqrt{2}R$ er den minste kjeglen som kan omslutte en kule av radius R. Volumet av denne kjeglen er $V(4R) = \dfrac{\pi R^2(4R)^2}{3(4R-2R)} = \dfrac{\pi R^2 16R^2}{6R} = \dfrac{\pi}{3}8R^3$.

Nå får vi uttrykt volumet ved

$$\frac{\pi}{3} r^2 h = \frac{\pi}{3}\left(\frac{hR}{\sqrt{h^2-2hR}}\right)^2 h = \frac{\pi}{3}\,\frac{h^2R^2}{h^2-2hR}\cdot h$$

$$= \frac{\pi R^2 h^2}{3(h-2R)} \qquad \text{Altså: } V(h) = \frac{\pi R^2 h^2}{3(h-2R)}.$$

Def. mengde $(2R, \infty)$ se tegning.

Finner min.punkt:

$$V'(h) = \frac{\pi R^2}{3}\left(\frac{2h(h-2R)-h^2}{(h-2R)^2}\right) = \frac{\pi R^2}{3}\left(\frac{h^2-4hR}{(h-2R)^2}\right)$$

$$V'(h) = 0 \iff h^2 - 4hR = 0$$

$$h(h-4R) = 0$$

$$\iff h = 0 \text{ eller } h = 4R$$

$h = 4R$ er et min.punkt. Dette gir $r = \frac{hR}{\sqrt{h^2-2hR}}$

$$= \frac{4R\cdot R}{\sqrt{(4R)^2 - 2\cdot 4R\cdot R}} = \frac{4R^2}{\sqrt{16R^2-8R^2}} = \frac{4R^2}{\sqrt{8R^2}} = \frac{4R^2}{2\sqrt{2}R} = \frac{2R}{\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{2}R.$$

Svar: Kjeglen med høyde $h = 4R$ og grunnflateradius $r = \sqrt{2}R$ er den minste kjeglen som kan omslutte en kule av radius R. Volumet av denne kjeglen er $V(4R) = \frac{\pi R^2 (4R)^2}{3(4R-2R)} = \frac{\pi R^2 16R^2}{6R} = \frac{\pi}{3} 8R^3$.

Dette gir $V = \frac{\pi}{3} r^2 h = \frac{\pi}{3}\left(\frac{2}{5}h\right)^2 h = \frac{4\pi}{75}h^3$

Volumet til vannstanden ved tidspunkt t er

$$V(t) = \frac{4\pi}{75} h(t)^3$$

Deriverer og får

$$V'(t) = \frac{4\pi}{75} 3 \cdot h(t)^2 \cdot h'(t).$$

Løser mhp. $h'(t)$ og får

$$h'(t) = \frac{25}{4\pi} \frac{V'(t)}{h(t)^2}.$$

I vår situasjon er $V'(t) = 0.1$ og $h(t) = 3$.

Dette gir

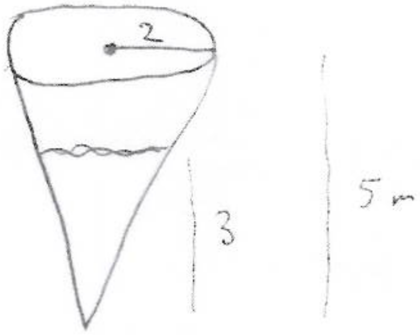
$$h'(t) = \frac{25 \cdot 0{,}1}{4\pi \cdot 9} = \frac{2.5}{36\pi} \approx 0{,}022$$

Svar: når vannstanden er 3m, øker vannstanden med

ca. 0,022 m/min.

(altså: 2,2 cm/min)

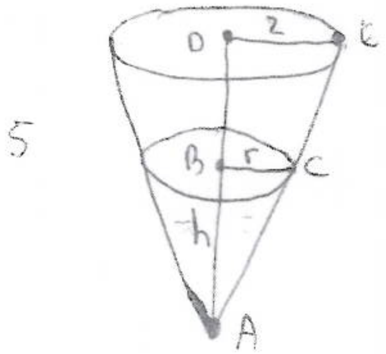
eksempel En kjegleformet tank står med spissen ned. Høyden til tanken er 5 m, og radien på toppen er 2 m. Vann fylles inn i tanken med en fart av 0.1 m^3 per minutt.



Vi ser på tanken når vannet står 3 m høyt, og ønsker å finne ut hvor mye vannstanden øker ved dette tidspunktet.

La $V(t)$ betegne volumet av vannet (ved tidspunkt t). Da vet vi at $V'(t) = 0.1\ m^3/min$. La $h(t)$ betegne vannstanden (høyden) ved tidspunkt t. Vi skal finne $h'(t)$ når $h(t) = 3$.

Må prøve å finne en forbindelse mellom $h(t)$, $V(t)$, $h'(t)$, $V'(t)$. La oss uttrykke $V(t)$ vha. $h(t)$:



Husk volum av kjegle av radius r og høyde h,

$V = \frac{\pi}{3} r^2 h$.

Uttrykk r vha. h.

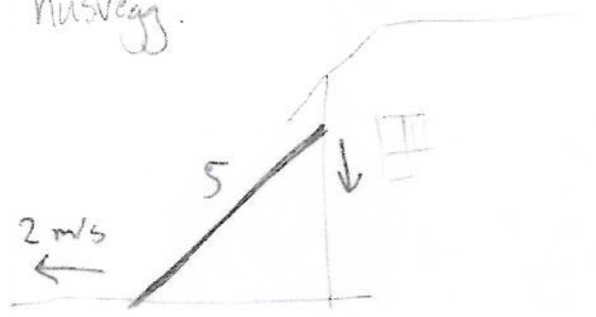
$\triangle ABC$ og $\triangle ADE$ er formlike, så

$$\frac{BC}{AB} = \frac{DE}{AD} \iff \frac{r}{h} = \frac{2}{5}$$

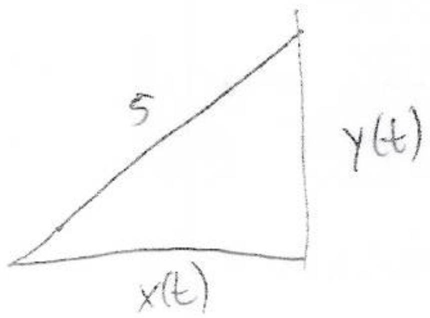
$$\Rightarrow \quad r = \frac{2h}{5}$$

7.2 Koblede hastigheter

eksempel En 5 meter lang stige står lent mot en husvegg.



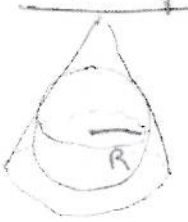
Vi drar den nedre enden av stigen utover med en fart på 2 m/s, slik at den øvre enden av stigen glir nedover husveggen.
Hvor fort glir den øvre enden nedover når den nedre enden er 4 meter fra husveggen?



Nedre enden er $x(t)$ meter fra husveggen ved tidspunktet t.
Øvre enden er $y(t)$ meter over bakken ved — " —.

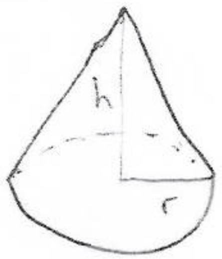
Vi skal finne ut hvor mye $y(t)$ endrer seg når $x(t) = 4$.
Altså: Vi skal finne $y'(t)$ når $x(t) = 4$.

eksempel



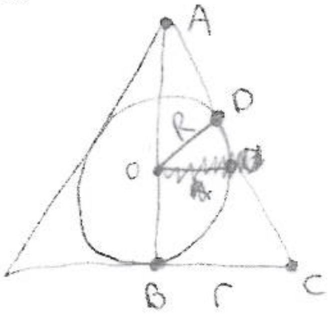
En kule med radius R plasseres inni en kjegle. Hva er det minste volumet en slik kjegle kan ha?

Volumet av en kjegle



$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h.$$

Prøver å uttrykke r ved hjelp av h og R (kulens radius), slik at vi får en volumfunksjon $V(h)$.



Trekantene $\triangle ABC$ og $\triangle ADO$ er formlike, som gir at

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DO}.$$

Finner først AD vha. Pytagoras:

$$AD^2 + R^2 = (h-R)^2$$

dvs. $AD = \sqrt{(h-R)^2 - R^2} = \sqrt{h^2 - 2hR + R^2 - R^2}$

$= \sqrt{h^2 - 2hR}$.

Så $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DO} \iff \frac{h}{r} = \frac{\sqrt{h^2-2hR}}{R}$. Løser for r

og får $r = \frac{hR}{\sqrt{h^2-2hR}}$.

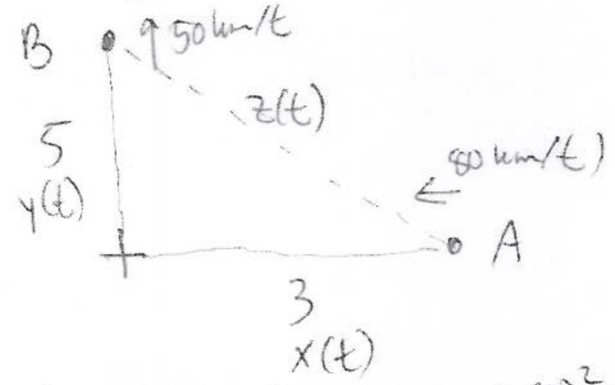
Svar: Når vinkelen mellom klippeveggen og lysstrålen er $\frac{\pi}{6}$, beveger lysstrålen seg med en hastighet av 25.1 km/s langs klippeveggen.

<u>eksempel</u> I et gitt øyeblikk gjelder:

Bil A er 3 km øst for kryss X, og kjører vestover i hastighet 80 km/t

Bil B er 4 km nord for kryss X og kjører nordover i hastighet 50 km/t.

Er avstanden mellom bilene (i luftlinje) voksende eller avtagende, og hvor mye endres avstanden?



Ved dette tidspunktet t er $z(t)^2 = 3^2 + 5^2 = 9 + 25 = 34$.

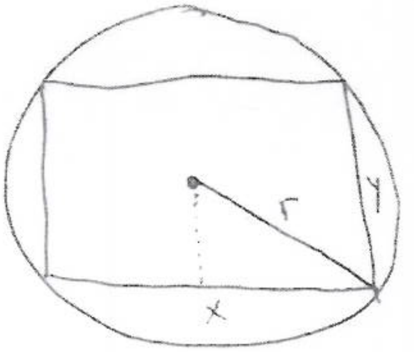
$$z(t) = \sqrt{34},$$

og $x'(t) = -80$
$y'(t) = 50$.

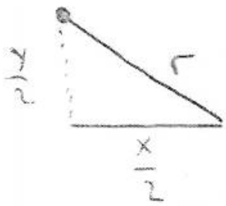
Pytagoras igjen gir $z(t)^2 = x(t)^2 + y(t)^2$.

Deriverer begge sider og får

__eksempel__ Hva er det største arealet til et rektangel som kan innskrives i en sirkel med radius r ?



La x og y betegne sidene i rektangelet. I den lille trekanten har vi



og Pytagoras' setning gir:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = r^2$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = r^2$$

$$x^2 + y^2 = 4r^2$$

$$y^2 = 4r^2 - x^2$$

$$y = \sqrt{4r^2 - x^2}$$

(egentlig $y = \pm\sqrt{4r^2 - x^2}$, men vi skal ha positiv lengde y).

Arealet til rektangelet er $x \cdot y = x\sqrt{4r^2 - x^2}$, som funksjon:

$$A(x) = x\sqrt{4r^2 - x^2}$$

Definisjonsmengde $(0, 2r)$.

Finner maks. punkt.

$A(x) = x\sqrt{4r^2 - x^2}$

$$A'(x) = \sqrt{4r^2 - x^2} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{4r^2-x^2}} \cdot -2x$$

$$= \sqrt{4r^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4r^2-x^2}} = \frac{\sqrt{4r^2-x^2}\sqrt{4r^2-x^2} - x^2}{\sqrt{4r^2-x^2}}$$

$$= \frac{4r^2 - x^2 - x^2}{\sqrt{4r^2-x^2}} = \frac{4r^2-2x^2}{\sqrt{4r^2-x^2}}.$$

Løser $A'(x) = 0$

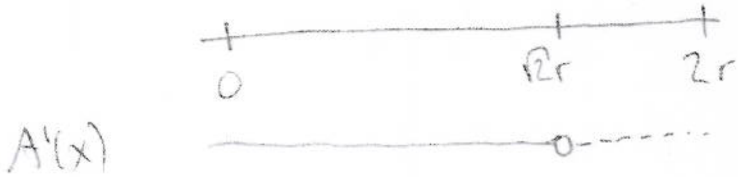
$$\frac{4r^2-2x^2}{\sqrt{4r^2-x^2}} = 0 \iff 4r^2 - 2x^2 = 0$$

$$2x^2 = 4r^2$$

$$x^2 = 2r^2$$

$$x = \sqrt{2}r$$

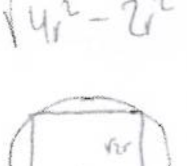
($x = \pm\sqrt{2}r$, men
x må være positiv)



Så $x = \sqrt{2}r$ er maksimumspunkt. Vi ~~[illegible]~~ har da

$$y = \sqrt{4r^2 - (\sqrt{2}r)^2} = \sqrt{4r^2 - 2r^2} = \sqrt{2r^2} = \sqrt{2}r.$$

Svar: Oppsettet

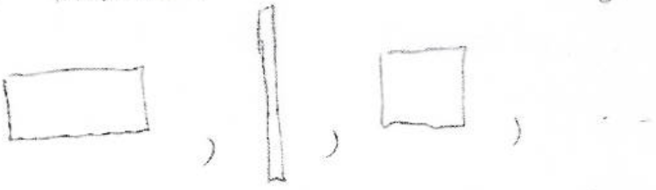


gir størst areal,

$$A(\sqrt{2}r) = \sqrt{2}r \cdot \sqrt{2}r = 2r^2.$$

7.1 Maksimums- og minimumsproblemer

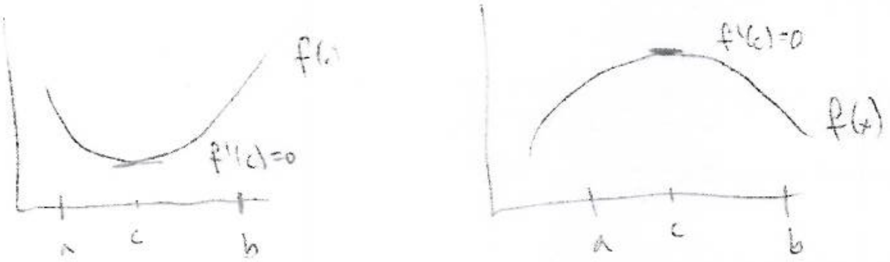
Motivasjon: Vi skal gjerde inn et rektangulært område, og vi har 20 meter gjerde til rådighet. Hvordan skal vi sette opp gjerdet slik at arealet som innesluttes blir størst mulig?



I slike problemer er det lurt å uttrykke arealet som en funksjon $f(x)$ (der x kan betegne en sidekant, f.eks.). Vi søker da et <u>maksimumspunkt</u> for funksjonen ("når er arealet $f(x)$ <u>størst</u>").

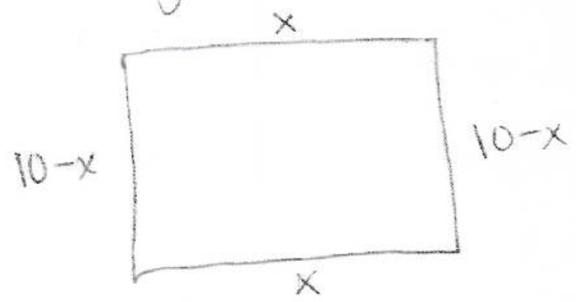
Teoretisk sett gjør vi bruk av følgende

<u>Setning (6.2.1)</u> Anta at den deriverbare funksjonen $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ har et maksimum/minimum i et punkt $c \in (a,b)$. Da gjelder $f'(c)=0$.



Altså: mulige kandidater for maks./min.-punkter for $f(x)$ er gitt ved punkter c som er slik at $f'(c)=0$.

Hvordan gjerde inn et rektangulært område med 20 meter omkrets og størst mulig areal?



La x betegne den ene siden i rektangelet. Da har vi brukt opp 2x meter gjerde, og det gjenstår 20−2x meter, dvs. 10−x meter for hver av de gjenstående sidene.

Vi kan uttrykke arealet som en funksjon

$$A(x) = x(10-x) = 10x - x^2,$$ der definisjonsmengden

er $[0,10]$.

Søker maks.punkt: Hvilken x gir $A'(x)=0$?

$$A'(x) = 10 - 2x.$$

$$A'(x) = 0 \iff 10-2x=0$$

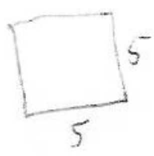
$$2x = 10$$

$$x = 5.$$

Er $x=5$ maks- eller min.punkt?

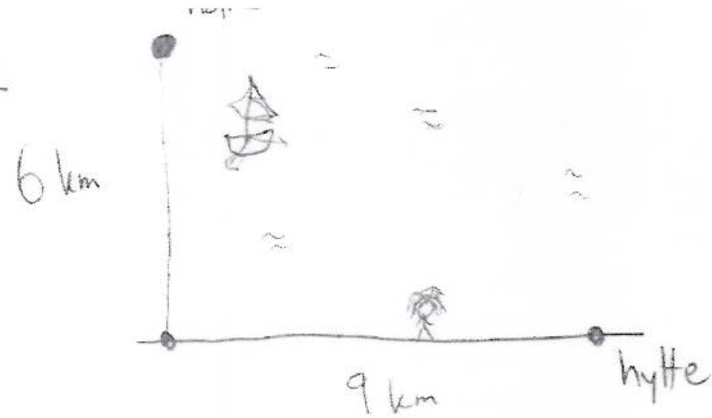
$\Rightarrow$ $x=5$ er makspunktet for $A(x)$.

Svar: Det største arealet oppnås med oppsettet



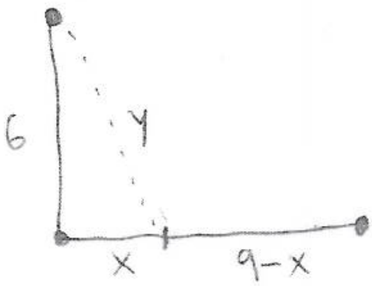
og arealet er da $A(5) = 5(10-5) = 5^2 = 25.$ (m^2)

eksempel



Vi skal bevege oss fra holmen til hytta: man kan ro med en fart av 3 km/t og gå med en fart av 5 km/t. (Hvor lenge skal man ro/gå)

Hvilken reisekombinasjon tar kortest tid?



Setter opp en funksjon $T(x)$ som gir tiden som reisen tar dersom man ror til punktet x og går derfra videre til hytta. Husker $\text{tid} = \frac{\text{strekning}}{\text{fart}}$, og får

$$T(x) = \frac{y}{3} + \frac{9-x}{5}$$

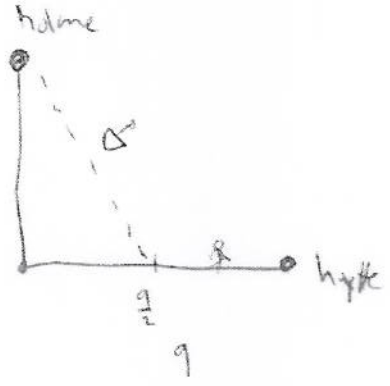
$$y^2 = x^2 + 6^2 \Rightarrow \quad y = \sqrt{x^2+6^2} = \sqrt{x^2+36}.$$

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2+36}}{3} + \frac{9-x}{5}.$$ Def. mengde $[0, 9]$.

Og minimumsverdien er da

$$T\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{\sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2+36}}{3} + \frac{9-\frac{9}{2}}{5} = \ldots = 3.4 .$$

Svar: Oppsettet



tar minst reisetid.

$$2z(t)\,z'(t) = 2x(t)\,x'(t) + 2y(t)\,y'(t).$$

$$2\sqrt{34}\,z'(t) = 2\cdot 3\cdot(-80) + 2\cdot 5\cdot 50 = -480 + 500$$

$$2\sqrt{34}\,z'(t) = 20$$

$$z'(t) = \frac{20}{2\sqrt{34}} = \frac{10}{\sqrt{34}} \approx 1{,}715.$$

Svar: Avstanden $z(t)$ mellom bil A og bil B er altså økende, og øker med 1.715 km/t.