7.4 Omvendte funksjoner

Funksjon $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

f tar inn punkter x og gir ut funksjonsverdier $y = f(x)$.

Definisjonsmengden til f

$$D_f = \{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ er definert} \}$$

Verdimengden til f

$$V_f = \{ f(x) \mid x \in D_f \}$$

Når man lager en funksjon f, er det opp til en selv å spesifisere definisjonsmengden (hvilke x ønsker jeg å sette inn i f?). Dette bestemmer dermed verdimengden (de verdiene vi får ut av f).

Man kan skrive $f: D_f \to V_f$.

eks. $f(x) = x^2$, og oppgir $D_f = \mathbb{R}$.

f? x^2 er alltid positivt, så de verdiene f gir ut er alltid positive tall. Altså: $V_f = [0, \infty)$.

$$f: \mathbb{R} \to [0, \infty)$$

eks. La $f(x) = x^2$, med $D_f = (0,4]$.

Dvs. x velges slik at $0 < x \leq 4$.

Dette gir at x^2 blir: $0 < x^2 \leq 16$.

Altså $V_f = (0, 16]$.

$f : (0,4] \longrightarrow (0,16]$.

eks. $f(x) = \frac{1}{x}$. Kan jeg velge $D_f = \mathbb{R}$? Nei, kan ikke spesifisere $D_f = \mathbb{R}$ ~~(skal være hele $\mathbb{R}$,)~~ fordi $f(0)$ er udefinert. ~~Man kan altså ikke~~ D_f kan ikke inneholde 0.

Gyldige eksempler på D_f:

$D_f = (-\infty, 0)$, $D_f = (2,3]$, $D_f = [16, 25]$,

enhver mengde som ikke inneholder 0.

$V_f = (-\infty, 0)$

$V_f = [\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$

$V_f = [\frac{1}{25}, \frac{1}{16}]$

Gitt en funksjon $f: D_f \to V_f$, kan man finne en funksjon $g: V_f \to D_f$ som "omgjør virkningen" ("omvendt operasjon"). ?

$$\begin{tikzcd} D_f \arrow[r, bend left, "f"] & V_f \arrow[l, bend left, "g"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "f"] & y \arrow[l, bend left, "g"] \end{tikzcd} \qquad \begin{array}{l} y = f(x) \\ x = g(y) \end{array}$$

Man trenger egenskapen <u>injektivitet</u>.

<u>Definisjon</u> En funksjon f kalles <u>injektiv</u> dersom:

$x_1, x_2 \in D_f \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

ekvivalent: til hver $y \in V_f$ finnes nøyaktig én $x \in D_f$ slik at $f(x) = y$.

<u>eks.</u> $f(x) = x^2$ med $D_f = \mathbb{R}$.

Funksjonen er <u>ikke</u> injektiv,

eksempelvis: $2 \neq -2$ men $f(2) = 2^2 = 4$
$f(-2) = (-2)^2 = 4$.

mer generelt: $x \neq -x$ $(x \neq 0)$ men $f(x) = x^2 = f(-x)$.

<u>eks</u> $f(x) = x^2$ med $D_f = [0, \infty)$

Funksjonen er injektiv. For $x_1, x_2 \in D_f$, dvs. $x_1 \geq 0$ og $x_2 \geq 0$, med $x_1 \neq x_2$, da kan vi anta $x_1 < x_2$. Det gir $f(x_1) < f(x_2)$. Dvs. $f(x_1) \neq f(x_2)$.

eks. $f(x) = x$, $D_f = \mathbb{R}$.
Funksjonen er injektiv.
$x_1, x_2 \in D_f$, $x_1 \neq x_2$. gir
$$f(x_1) = x_1 \neq x_2 = f(x_2) .$$

Observasjon
En strengt voksende funksjon f oppfyller per. def.
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$
Altså er f injektiv også.
En strengt avtagende funksjon f oppfyller per. def.
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$
Altså er f injektiv.
Monoton = fellesnavn på voksende og avtagende funksjoner.
Oppsummert: Strengt monotone funksjoner er injektive.

Definisjon For en injektiv $f: D_f \to V_f$ defineres den omvendte funksjonen $g: V_f \to D_f$ ved
$$g(y) = x \quad \text{for } f(x) = y . \quad \left(\text{Her er } \begin{matrix} D_g \overset{\text{def}}{=} V_f \\ V_g \overset{\text{def}}{=} D_f \end{matrix} \right)$$

Bemerkn. Hvis f ikke er injektiv, da kan det finnes
$x_1, x_2 \in D_f$, $x_1 \neq x_2$ med $y = f(x_1) = f(x_2)$.
Hvordan skal man da definere $g(y)$? $g(y) = x_1$
eller $g(y) = x_2$?
Tvetydighet. Derfor trengs injektivitet.

injektiv

Gitt en funksjon f, hvordan finne den omvendte g?

Noen ganger (dvs. sjeldent) ved å løse likningen

$$f(x) = y \quad \text{for } x.$$

dvs. $f(x) = \ln(x-8)$ $\qquad D_f = (8, \infty)$

$$V_f = \mathbb{R}$$

f er strengt voksende $\left(\text{fordi } f'(x) = \frac{1}{x-8} > 0 \text{ for } x \in D_f\right)$

altså er f injektiv.

La $y = f(x) = \ln(x-8)$

$y = \ln(x-8)$. Løs for x.

$e^y = e^{\ln(x-8)}$

$e^y = x-8$

$x = e^y + 8$.

Omvendt funksjon $\quad x = g(y) = e^y + 8$.

Nyttig huskeregel $\qquad$ For $x \in D_f$: $\quad g(f(x)) = x$

For $y \in V_f$: $\quad f(g(y)) = y$.

f injektiv,
omvendt funksjon g.
$y = f(x)$
$g(y) = x$

Eks. $f(x) = x^2+3$ med $D_f = [0,\infty)$. $V_f = [3,\infty)$

f er strengt voksende (fordi $f'(x) = 2x > 0$ for $x \in D_f$)

altså er f injektiv. Finn den omvendte funksjonen g.

La $y = f(x) = x^2+3$.

$y = x^2+3$. Løs for x.

$x^2 = y-3$

$x = \pm\sqrt{y-3}$. Husk at $x \in D_f = [0,\infty)$,

så vi må velge $x = \sqrt{y-3}$.

Omvendt funksjon $x = g(y) = \sqrt{y-3}$.

Stemmer dette? Sjekk: $g(f(x)) = x$? $f(g(y)) = y$?

$x \in [0,\infty)$: $g(f(x)) = g(x^2+3) = \sqrt{x^2+3-3} = \sqrt{x^2} = x$

$y \in [3,\infty)$: $f(g(y)) = f(\sqrt{y-3}) = (\sqrt{y-3})^2 + 3 = y-3+3 = y$.

OK!

Nyttig resultat $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ kontinuerlig og strengt voksende

$\Rightarrow$ omvendte g ~~[illegible]~~ også kontinuerlig og strengt voksende.

Likeledes med "strengt avtagende".

(Teorem 7.4.5).

Teorem (7.4.6) Anta f er kontinuerlig og strengt monoton, og deriverbar i punktet x med $f'(x) \neq 0$. Da er den omvendte funksjonen g deriverbar i punktet $y = f(x)$ og

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

Bevis

Husk at $g'(y) \overset{def}{=} \lim_{a \to y} \frac{g(y) - g(a)}{y - a}$.

Vi har $y = f(x)$ og $g(y) = x$. (dermed)

La oss si $g(a) = b$ og $f(b) = a$. (dermed)

Dette gir $g(y) - g(a) = x - b$

og $y - a = f(x) - f(b)$.

Da f er kontinuerlig og strengt monoton, følger det (Teorem 7.4.5) at g også er kontinuerlig og strengt monoton. Dette gir at

$$\begin{array}{ccccc} a \to y & \Rightarrow & g(a) & \to & g(y) \\ & & \parallel & & \parallel \\ & & b & \longrightarrow & x \end{array}$$

(kontinuiteten til g medfører $\lim_{a \to y} g(a) = g(y)$ altså $g(a) \to g(y)$).

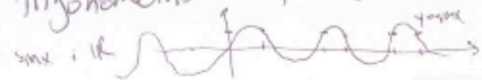
Nå fås

$$g'(y) = \lim_{a \to y} \frac{g(y) - g(a)}{y - a} = \lim_{b \to x} \frac{x - b}{f(x) - f(b)} = \lim_{b \to x} \left(\frac{1}{\frac{f(x) - f(b)}{x - b}} \right)$$

$$= \frac{1}{\lim_{b \to x} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}} = \frac{1}{f'(x)}. \blacksquare$$

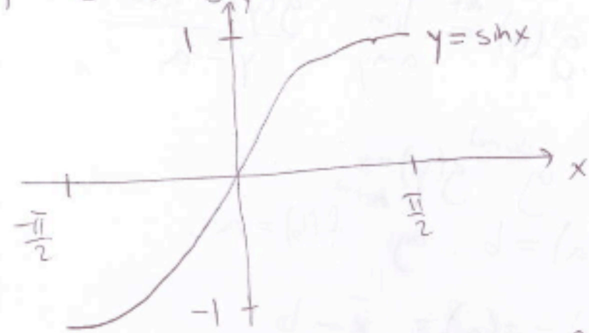
7.6 Arcusfunksjonene

Skal se på de omvendte funksjonene til de trigonometriske funksjonene $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ og $\cot x$.



Funksjonen $f(x) = \sin x$ med $D_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$f : [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1, 1]$$



Funksjonen er injektiv i intervallet $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

(fordi $f'(x) = \cos x > 0$ for $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ )

Omvendt funksjon $g : [-1, 1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Vi kaller denne $g(y) = \arcsin y$

"arcussinus"

Bestemt ved: $\arcsin y = x$ for $\sin x = y$.

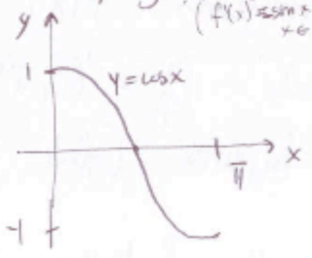
eks. $\arcsin -1 = -\frac{\pi}{2}$ fordi $\sin -\frac{\pi}{2} = -1$

$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ fordi $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$ fordi $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Funksjonen $f(x) = \cos x$ med $D_f = [0, \pi]$. Injektiv. ($f'(x) = -\sin x < 0$, $x \in (0, \pi)$)

$f : [0, \pi] \to [-1, 1]$



Omvendt funksjon

$g : [-1, 1] \to [0, \pi]$

$g(y) = \arccos y$ "arcus cosinus"

bestemt ved: $\arccos y = x$ for $\cos x = y$.

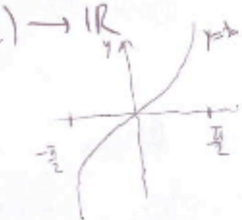
eks. $\arccos -1 = \pi$ fordi $\cos \pi = -1$

$\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$ fordi $\cos \frac{\pi}{2} = 0$

$\arccos 1 = 0$ fordi $\cos 0 = 1$.

Funksjonen $f(x) = \tan x$ med $D_f = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Injektiv (fordi $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} > 0$ for $x \in D_f$) $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$



Omvendt funksjon $g : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$g(y) = \arctan \cancel{x}\,y$ "arcus tangens"

bestemt ved $\arctan y = x$ for $\tan x = y$.

eks. $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ fordi $\tan \frac{\pi}{4} = 1$

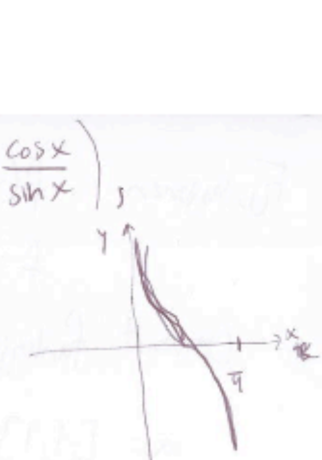
$\arctan 0 = 0$ fordi $\tan 0 = 0$

$\arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$ fordi $\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

Funksjonen $f(x) = \cot x \quad \left(= \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}\right)$,

med $D_f = (0, \pi)$. $f: (0,\pi) \to \mathbb{R}$

Injektiv $\left(\text{fordi } f'(x) = \frac{-1}{\sin^2 x} < 0 \text{ for } x \in D_f\right)$



Omvendt funksjon $g: \mathbb{R} \to (0, \pi)$

$g(y) = \text{arccot}\, y$ "arcus cotangens"

bestemt ved $\text{arccot}\, y = x$ for ~~opp~~ $\cot x = y$.

eks. $\text{arccot}\, 1 = \frac{\pi}{4}$ fordi $\cot \frac{\pi}{4} = 1$.

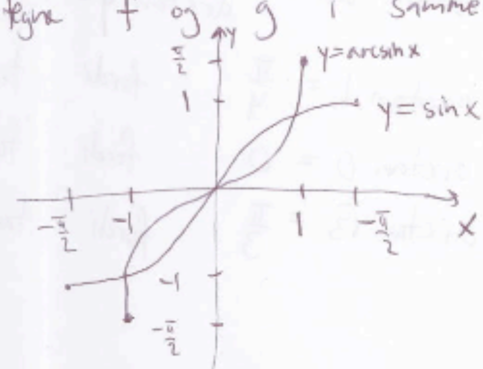
$\text{arccot}\, \sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$ fordi $\cot \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$.

Ofte bruker man x som variabel også for de omvendte funksjonene, eksempelvis

$\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, osv...

~~man~~

eks. $f(x) = \sin x$, $g(x) = \arcsin x$. Man bør da være ekstra varsom mtp. definmengder og verdimengder, spesielt hvis man skal tegne f og g i samme tegning.



$D_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ $V_f = [-1, 1]$

$D_g = [-1, 1]$ $V_g = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Husk **Teorem (7.4.6)** Anta f er kont., strengt monoton, deriverbar i x og $f'(x) \neq 0$. Omvendt funksjon g.
Da gjelder

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \text{ der } y = f(x).$$

Vi bruker dette teoremet til å finne de deriverte av arcusfunksjonene.

Setning

$$D[\arcsin x] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$D[\arccos x] = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$D[\arctan x] = \frac{1}{1+x^2}$$

$$D[\operatorname{arccot} x] = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Bevis La $f(x) = \sin x$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,
$g(y) = \arcsin y$.

Med $y = f(x)$ får vi $g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ (Teorem 7.4.6) altså

$$D[\arcsin y] = \frac{1}{D[\sin x]} = \frac{1}{\cos x}.$$

Husker at $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, som gir $\cos x = \pm\sqrt{1 - \sin^2 x}$

La $g(y) = \operatorname{arccot} y$, $f(x) = \cot x$, $x \in (0, \pi)$.

Husk at $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ og $D[\cot x] = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

Vi får, med $y = f(x) = \cot x$

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

$$D[\operatorname{arccot} y] = \frac{1}{D[\cot x]} = \frac{1}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = -\sin^2 x =$$

$$\frac{-\sin^2 x}{1} = \frac{-\sin^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{\frac{-\sin^2 x}{\sin^2 x}}{\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} = \frac{-1}{1 + \cot^2 x}.$$

Vi hadde cot $x = y$, så vi får

$$D[\operatorname{arccot} y] = \frac{-1}{1 + \cot^2 x} = \frac{-1}{1 + y^2}.$$

■