6.1 1bgh, 3ab, 4, 5, 6, 9, 10

1h $f(x) = \frac{\cos(\sqrt{x})}{x^2} = \frac{1}{x^2} \cdot \cos(\sqrt{x})$

$f'(x) = \frac{-2}{x^3} \cdot \cos(\sqrt{x}) + \frac{1}{x^2}(-\sin(\sqrt{x})) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$= \underline{\frac{-2\cos(\sqrt{x})}{x^3} - \frac{\sin(\sqrt{x})}{2x^2\sqrt{x}}}$

3. $D\left(\ln\left(f(x)\right)\right) = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) \qquad f(x) > 0$

$f'(x) = f(x) \cdot D(\ln(f(x)))$

3b

$$f(x) = \sqrt[17]{\sin x} \cdot e^{x^2} \cdot \tan x$$

$$f'(x) = f(x)\, D(\ln f(x))$$

$$= f(x)\, D(\ln \sqrt[17]{\sin x} + \ln e^{x^2} + \ln \tan x)$$

$$= f(x)\, D(\tfrac{1}{17} \ln \sin x + x^2 + \ln \tan x)$$

$$= f(x) \left(\frac{1}{17} \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x + 2x + \frac{1}{\tan x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \right)$$

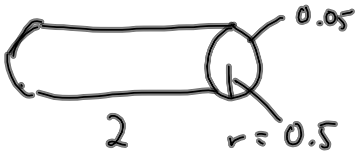
okt 6-12:22

4 $$D\left(f(x)^{g(x)}\right) = f(x)^{g(x)} \cdot D\left(\ln\left(f(x)^{g(x)}\right)\right)$$

$f(x) > 0$ $$= f(x)^{g(x)} D\left(g(x) \cdot \ln f(x)\right)$$

$$= f(x)^{g(x)} \left(g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)\right)$$

5.



$V(r) = 2 \cdot \pi r^2 \qquad V'(r) = 4\pi r$

$$V(0.5 + 0.05) - V(0.5) \approx V'(0.5) \cdot 0.05 = 4\pi \cdot 0.5 \cdot 0.05$$

$$= \frac{\pi}{10} \sim 0.3 m^3$$

6

$$v(t) = \frac{s}{t} = \frac{500}{t} \qquad v'(t) = -\frac{500}{t^2}$$

$$v(25+1) - v(25) \approx v'(25) \cdot 1 = -\frac{500}{625} \quad m\,s^{-1}$$

$$\sim -0.8 \quad m\,s^{-1}$$

9.
Gitt $\varepsilon > 0$

$$\left| \frac{x^2 - a^2}{x-a} - 2a \right| = \left| \frac{(x-a)(x+a)}{x-a} - 2a \right|$$

$$= |x-a| < \delta = \varepsilon$$

velger $\delta = \varepsilon$:

så $f'(x) = 2x$ når $f(x) = x^2$

okt 6-12:36

10 $f(x) = \sqrt{x}$

$\varepsilon > 0$ $\left| \frac{f(x) - f(a)}{x-a} - \frac{1}{2\sqrt{a}} \right| = \left| \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x-a} - \frac{1}{2\sqrt{a}} \right|$

$= \left| \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})} - \frac{1}{2\sqrt{a}} \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} - \frac{1}{2\sqrt{a}} \right|$

$= \left| \frac{2\sqrt{a} - \sqrt{x} - \sqrt{a}}{2\sqrt{a}(\sqrt{x} + \sqrt{a})} \right| = \left| \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{x})(\sqrt{a} + \sqrt{x})}{2\sqrt{a}\,(\sqrt{x} + \sqrt{a})^2} \right|$

$= \left| \frac{x-a}{2\sqrt{a}(\sqrt{x}+\sqrt{a})^2} \right| \leq \frac{|x-a|}{2\sqrt{a} \cdot a} < \varepsilon$ när $|x-a| < \delta = 2\sqrt{a} \cdot a \cdot \varepsilon$

så $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

6.2 2b

$$\text{MVS:} \quad \frac{f(a) - f(b)}{a - b} = f'(c)$$

for en $c \in (a,b)$

hvis $f'(c) \geq 0$ $c \in (a,b)$, så er f voksende på $[a,b]$

$f'(c) > 0$ $c \in (a,b)$, så er f strengt voksende på $[a,b]$

2b $f(x) = \ln x - \frac{1}{x}$ på $[1,e]$

f er kont. på $[1,e]$, f er deriverbar på $(1,e)$

$$f(1) = \ln 1 - \frac{1}{1} = -1 < 0$$

$$f(e) = \ln e - \frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{e} > 0$$

Av SS har f et nullpkt på intervallet.

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0 \quad \text{på } (1,e)$$

så f er strengt voksende på $(1,e)$, så f har <u>ett</u> nullpkt på $(1,e)$.

6.2 3, 5, 7, 8, 11, 13, 16, 20

3 $f(x) = 2 - x^3$ $g(x) = \ln(2+x)$ $x \in [0,1]$

$f(x) - g(x)$ er kont. på $[0,1]$ og deriverbar på $(0,1)$

$f(0) - g(0) = 2 - \ln 2 > 0$

$f(1) - g(1) = 1 - \ln 3 < 0$

$f'(x) - g'(x) = -3x^2 - \frac{1}{2+x} < 0$ på $x \in (0,1)$

Så av SS og MVS har

$f(x) - g(x)$ har ett nullpkt på $(0,1)$.

okt 6-12:58

5 $f(x) = x - \frac{4}{x}$ $f(-1) = f(4) = 3$

f er ikke definert i $x = 0$ så MVS gjelder ikke.

$f'(x) = 1 + \frac{4}{x^2} > 0$.

7. det fins en c mellom 0 og x slik at

$\sin x = x \cos c$

sinx er kont og derivbar fra x til 0.

$(\sin x)' = \cos x$

MVS: $\frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \cos c$

så $\sin x = x \cos c$, og $\left|\frac{\sin x}{x}\right| = |\cos c| \le \underline{1}$.

8 $x > -1$: $\ln(1+x) = \cancel{x}/(1+c)$

for en c mellom 0 og x.

$\ln(1+x)$ er kont og deriverbar på

$(x, 0)$ (evt. $(0, x)$).

MVS $\frac{\ln(1+x) - \ln(1+0)}{x - 0} = \frac{1}{1+c}$

$(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x}$ så $\ln(1+x) = \frac{x}{1+c} \begin{cases} \leq x & x>0 \\ \leq x & x<0 \end{cases}$

okt 6-13:26

11. a) $\sin x$ er kont og deriverbar for alle x.

MVS : $\left|\frac{\sin x - \sin y}{x - y}\right| = |\cos c| \le 1$ for en c mellom x og y.

$$|\sin x - \sin y| \le |x - y|$$

b) $\tan x$ er kont og deriverbar på $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

MVS : $\left|\frac{\tan x - \tan y}{x - y}\right| = \left|\frac{1}{\cos^2 c}\right| \ge 1$ c mellom x og y

så $|\tan x - \tan y| \ge |x - y|$

x, y i $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

13 f kont og to ganger deriverbar på $[a, b]$

$f(a) = f(d) = f(b) \qquad d \in (a, b)$

MVS: $\dfrac{f(a) - f(d)}{a - d} = f'(a') = 0 \qquad a' \in (a, d)$

MVS: $\dfrac{f(b) - f(d)}{b - d} = f'(b') = 0 \qquad b' \in (d, b)$

MVS: $\dfrac{f'(b') - f'(a')}{b' - a'} = f''(c) = 0$ for en $c \in (a', b') \subseteq (a, b)$

okt 6-13:35

16 f, g kont. på $[a, b]$
deriv. på (a, b)

$f(a) - g(a) = 0 \qquad f(b) - g(b) = 0$

MVS: $0 = \dfrac{(f(a) - g(a)) - (f(b) - g(b))}{a - b} = f'(c) - g'(c)$

for en $c \in (a, b)$.

20 g) f' kont på $[a, b]$
da er f' begrenset på $[a, b]$. av $|f'| < K$ $(> 0.)$

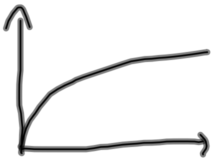
så MVS $\left|\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| = |f'(c)| < K$

$x, y \in [a, b]$

$c \in (a, b)$

så $|f(x) - f(y)| < K|x - y| \qquad x, y \in [a, b]$.

b) $f(x) = \sqrt{x}$



$\left|\dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x - y}\right| = \left|\dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}\right|$ er ubegrenset nær 0.

så $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| < K|x - y|$ ikke gjelder for noen K.

6.3

l'Hopital: $\lim_{x \to 0} \frac{f}{g} = \lim_{x \to 0} \frac{f'}{g'}$

dersom ....

$\lim_{x \to 0} f = 0 \ (\infty)$ og

$\lim_{x \to 0} g = 0 \ (\infty)$

f. i. g. der.

1.f

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x - x + 1}{(x-1)^2} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{(\ln x - x + 1)'}{((x-1)^2)'} = \frac{\frac{1}{x} - 1}{2(x-1)}$$

l'H

$$\frac{\left(\frac{1}{x} - 1\right)'}{(2(x-1))'} = \frac{-\frac{1}{x^2}}{2} \xrightarrow[x \to 1]{} -\frac{1}{2}$$

3 b

$$\lim_{\substack{x \to 0^+}} x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} - 1\right) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} - 1\right)}{\frac{1}{x}} = \underline{\underline{0}}$$

$x \to 0^+$

$\uparrow$ l'H.

$$\frac{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} - 1\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+\frac{1}{x}}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1+\frac{1}{x}}} \underset{x \to 0^+}{\to} 0$$

okt 6-13:55