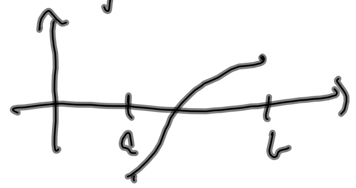
5.2 $\quad$ 1, 3, 4, 6, 7, 8, 10

Skjæringssetningen: (SS)

Hvis $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig og $f(a) < 0$ og $f(b) > 0$ så fins det en $c \in [a,b]$ slik at $f(c) = 0$.



1. b $\quad f(x) = e^x - x - 2$

f er kont. på $[0,2]$. $\quad f(0) = e^0 - 0 - 2 = -1$

$f(2) = e^2 - 2 - 2 = e^2 - 4 \qquad e = 2,7\ldots > 2$

så $f(2) > 0$. så av SS fins det en $c \in [0,2]$

slik at $f(c) = 0$.

sep 29-12:05

3b $\quad f(x) = \sin x \qquad g(x) = x^3 \qquad x \in [\pi/6, \pi/3]$

Grafene til f og g skjærer hverandre dersom det finns en $c \in [\pi/6, \pi/3]$ slik at $f(c) = g(c)$.

Ser på $\quad h(x) = f(x) - g(x)$

h er kontinuerlig på $[\pi/6, \pi/3]$

$$h\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} - \left(\frac{\pi}{6}\right)^3 = \frac{1}{2} - \left(\frac{\pi}{6}\right)^3 > 0$$

siden $\left(\frac{\pi}{6}\right)^3 < \frac{1}{2}$

$$h\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} - \left(\frac{\pi}{3}\right)^3 = \frac{1}{2}\sqrt{3} - \left(\frac{\pi}{3}\right)^3 < 0$$

siden $\left(\frac{\pi}{3}\right)^3 > 1$

Så av SS finns det en $c \in [\pi/6, \pi/3]$ slik at

$$h(c) = f(c) - g(c) = 0 \ .$$

4 $\quad f(x) = \tan x \qquad g(x) = x \qquad \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan\frac{\pi}{4} = 1 > \frac{\pi}{4} = g\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \tan\frac{3\pi}{4} = -1 < \frac{3\pi}{4} = g\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

f er ikke kontinuerlig på $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$

så SS gjelder ikke for $f - g$.

$f(x) > x$ når $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$

$f(x) < x$ når $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{4}$

så det fins ikke noe c slik at $f(c) = g(c)$.

6. $f(x) = a_{2n+1}x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \dots + a_1 x + a_0$

anta at $a_{2n+1} > 0$

$$f(x) = a_{2n+1}x^{2n+1}\left(1 + \frac{a_{2n}}{a_{2n+1}}\frac{1}{x} + \dots + \frac{a_1}{a_{2n+1}}\frac{1}{x^{2n}} + \frac{a_0}{a_{2n+1}x^{2n+1}}\right)$$

så $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ og $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Så det fins en $M < 0$ og $N > 0$

og $a < 0$, $b > 0$ slik at $f(a) = M$ og $f(b) = N$

f er kontinuerlig på $[a,b]$

$f(a) = M < 0$ og $f(b) = N > 0$ så av SS

fins det en $c \in [a,b]$ slik at $f(c) = 0$.

c er da en rot i polynomet f.

7 a $f(x)$ er høyden første dag $x \in [7, 15]$

$g(x)$ —— " — andre dag $x \in [7, 15]$

h — " — på toppen

$f(x) - g(x)$ kontinuerlig

$f(7) - g(7) = 0 - h < 0$

$f(15) - g(15) = h - 0 > 0$

så SS gir at det fins $c \in [7, 15]$

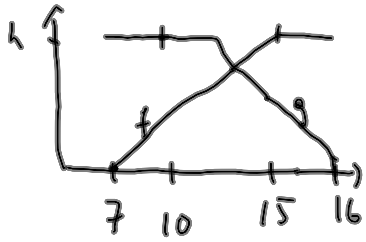
s.a. $f(c) = g(c)$

$f : [7, 15]$

$g : [10, 16]$

utvid: $f : [7, 16]$ $\quad f(x) = f(15)$, $x > 15$

$g : [7, 16]$ $\quad g(x) = g(10)$, $x < 10$.



samme konklusjon som i a.

8 $\quad f(x) : [0,1] \to [0,1]$ kont.

$g(x) = f(x) - x$

$g(0) = f(0) - 0 = f(0)$

hvis $f(0) = 0$ så er 0 et fikspunkt,

hvis ikke er $f(0) > 0$, så $g(0) > 0$

$g(1) = f(1) - 1$

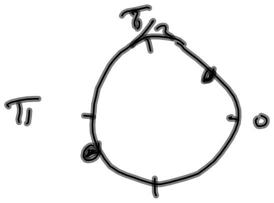
hvis $f(1) = 1$ så er 1 et fikspunkt,

hvis ikke er $f(1) < 1$, så $g(1) < 0$

Av SS finnes det da en $c \in (0,1)$ slik at

$g(c) = 0$ det vil si at $f(c) = c$.

10



$f(x)$ er høyden i x på sirkelen.

$x \in \mathbb{R}$

$$g(x) = f(x) - f(x+\pi)$$

$$g(0) = f(0) - f(\pi)$$

$$g(\pi) = f(\pi) - f(2\pi) = f(\pi) - f(0) = -g(0)$$

Så hvis $g(0) \neq 0$ så har $g(0)$ og $g(\pi)$ motsatt fortegn.

Hvis SS gjelder for g så fins det en $c \in [0, \pi]$ slik at $f(c) = f(c+\pi)$

5.3
1 b

$$f(x) = \frac{\ln(\sin^2 x + e^x)}{x-1} \qquad [1{,}0001,\ 3]$$

$x - 1 \neq 0$ på intervallet

$\sin^2 x + e^x > 0$ på intervallet

så f er definert og kontinuerlig på intervallet.

Derfor har den ekstrempunkter på intervallet.

2 $f(x) = \frac{1}{x}$ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

f er kontinuerlig på D_f

$f(x) \to \infty$ når $x \to 0^+$

$f(x) \to -\infty$ når $x \to 0^-$

så f er ikke begrenset og har ingen ekstrempunkt på $[-1, 1]$.

f er ikke definert på <u>hele</u> $[-1,1]$.

sep 29-13:34

3 a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kontinuerlig

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = M \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = N$

Det fins $a < 0$ og $b > 0$ slik at

$|f(x) - M| < 1$ når $x < a$

$|f(x) - N| < 1$ når $x > b$

f er kontinuerlig på $[a,b]$, så f er begrenset på $[a,b]$ og derfor også på hele $\mathbb{R}$.

5 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ kontinuerlig.

f har ekstrempunkter $f(c)$ og $f(d)$.

der $f(c)$ er et minimalpkt

og $f(d)$ — " — max punkt.

Da er $V_f \subseteq [f(c), f(d)]$

Siden $f(c) \in V_f$ og $f(d) \in V_f$ følger det

av SS at $V_f = [f(c), f(d)]$.

Altså at det for hver $e \in [f(c), f(d)]$ fins

en α slik at $f(\alpha) = e$.

sep 29-13:44

5.4

1b $$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^4+\sqrt{x}+e^{x^2}}{7+\sin(\sqrt{x})} = \frac{1}{7}$$ siden

$x^4 \to 0$, $\sqrt{x} \to 0$, $e^{x^2} \to 1$, $\sin\sqrt{x} \to 0$.

2b $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$

$$|x^2-9| = |x-3||x+3| < 13|x-3| < \varepsilon$$

$8 < x < 10$

dersom $|x-3| < \frac{\varepsilon}{13}$.

Velg $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{13}, 1\}$.

Da vil $|x-3| < \delta \Rightarrow |x^2-9| < \varepsilon$.

sep 29-13:49

3 b $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{8x^2 + 2x + 7}{\sqrt{x} - 4x^2}$

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{8x^2+2x+7}{\sqrt{x} - 4x^2} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{8 + \frac{2}{x} + \frac{7}{x^2}}{x^{-\frac{3}{2}} - 4} = \dfrac{8}{-4} = \underline{-2}$

sep 29-13:56