Plenum 19-10-12

7.4: 9, 10

7.5: 5, 7, 15

8.2: 1, 5

8.3: 1 b), d), f), g), 3 d), e), 5, 8

7.4: Omvendte funksjoner

9) $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ er en kont, injektiv funksjon.

Påstand: f er strengt monoton.

Injektiv betyr: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Anta for motsigelse at $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ er kont. og injektiv, men ikke strengt monoton. Da må det enten finnes

1) $x_1 < x_2$ s.a. $f(x_1) = f(x_2)$ eller

vokser, og så avtar

2) $x_1 < x_2 < x_3$ s.a. $f(x_1) < f(x_2)$, $f(x_3) < f(x_2)$

eller 3) $x_1 < x_2 < x_3$ s.a. $f(x_1) > f(x_2)$, $f(x_3) > f(x_2)$.

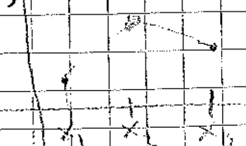
(NB: I alle tilfeller er $x_1, x_2, x_3 \in [a,b]$)

avtar, og så vokser

Vi ser på tilfellene separat:

1) Her er det opplagt at f ikke er injektiv, så vi har en motsigelse, og dermed er påstanden OK.

2) Anta $f(x_1) < f(x_3)$ (hvis det er omvendt lar vi x_1 og x_3 bytte roller).



Se på funksjonen $g(x) := f(x) - f(x_3)$.

Da er g kontinuerlig og $g:[x_1, x_2] \to \mathbb{R}$.

Merk at $g(x_1) = f(x_1) - f(x_3) < 0$ og

$g(x_2) = f(x_2) - f(x_3) > 0$ (fra antagelser)

Fra skjæringssetningen fins da en $c \in (x_1, x_2)$ s.a.
$g(c) = 0$, dvs. $f(c) = f(x_3)$.

Men dette betyr at $\exists\ c \neq x_3$ $(\in [a,b]$, siden $c \in (x_1, x_2)$, $x_3 > x_2)$ s.a. $f(c) = f(x_3)$, men dette motsier at f er injektiv. Dermed har vi en motsigelse, og påstanden er OK.

3): Tilsvarende som 2).

10.) Vis at $f(x) = x e^{\frac{(1-x^2)}{2}}$ er injektiv på $[-1,1]$:

Prøver å derivere for å se om f er strengt voksende eller avtagende:

$$f'(x) = e^{\frac{1-x^2}{2}} + x e^{\frac{1-x^2}{2}} \frac{-2x}{\cancel{2}}$$
$$= e^{\frac{1-x^2}{2}} - x^2 e^{\frac{1-x^2}{2}}$$
$$= \underbrace{e^{\frac{1-x^2}{2}}}_{>0} \underbrace{(1-x^2)}_{\geq 0}$$

≥ 0 for $x \in [-1,1]$ og
0 bare i endepunktene

$\Downarrow$

f er strengt voksende på $[-1,1] \Rightarrow f$ er injektiv på $[-1,1]$.

Finn def. området til den omvendte funksjonen g:

$$D_g = V_f = \{ f(x) : x \in [-1,1] \} = \{ x e^{\frac{1-x^2}{2}} : x \in [-1,1] \}$$

$\boxed{\text{Def. 7.4.2}}$

$= [-1, 1]$

f er kont. og strengt voksende:
$f(-1) = -1$, $f(1) = 1$

$$\lim_{y \to 1^-} (1-y)[g'(y)]^2$$

Husk: $g'(1) = \dfrac{1}{f'(x)}$ der $1 = f(x)$
$\Downarrow$
$x = 1$ hvis $f'(1) \neq 0$.

Nå viser det seg at $f'(1) = 0$, så $g'(1)$ er ikke def. Likevel er $\lim_{y \to 1^-} g'(1) = \infty$ (siden $f'(1) = 0$ og pga Thm. 7.4.6).

Derfor er:

$$\lim_{y \to 1^-} (1-y)(g'(y))^2 \underset{(0 \cdot \infty)}{=} \lim_{y \to 1^-} \frac{1-y}{\frac{1}{[g'(y)]^2}}$$

$$\underset{\left(\frac{0}{0}\text{ l'Hôpital}\right)}{=} \lim_{y \to 1^-} \frac{-1}{2 f'(x) f''(x)} = \infty$$

Når $y = 1 = f(x)$
er $x = 1$
$\Downarrow$
$f'(x) = 0$

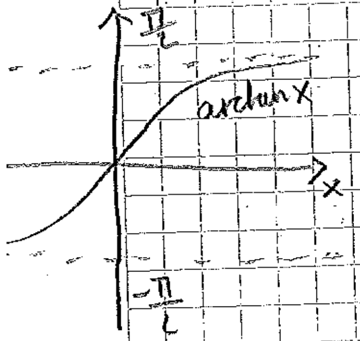
$$\frac{1}{[g'(y)]^2} = \left(\frac{1}{g'(y)}\right)^2 \underset{\text{Thm } 7.4.6}{=} [f'(x)]^2$$ der $y = f(x)$

7.6: Arcusfunksjonene

5.) $f(x) = x \arctan x$

a) Hvor er f voksende / avtagende?

$$f'(x) = \underbrace{\underbrace{\underbrace{\arctan x}_{\in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} + \underbrace{x \frac{1}{1+x^2}}_{\geq 0 \text{ for } x \geq 0}}_{\geq 0 \text{ for } x \geq 0}}_{\leq 0 \text{ for } x \leq 0}$$



$f'(x)$ - - - - - - - 0 ———

$\underbrace{\qquad\qquad}_{f \text{ avtagende}}$ $\underbrace{\qquad\qquad}_{f \text{ voksende}}$

Så f er avtagende i $(-\infty, 0]$ og voksende i $[0, \infty)$.

b) Hvor er f konveks/konkav?

$$f''(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1(1+x^2) - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1+\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}}{(1+x^2)^2} \geq 0 \text{ overalt.}$$

$\Rightarrow$ f er konveks (overalt).

c) Asymptoter: Vertikale: f er definert og kont. overalt, så har ingen vertikale asymptoter

Skrå: 1) $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \arctan x = \pm \frac{\pi}{2}$.

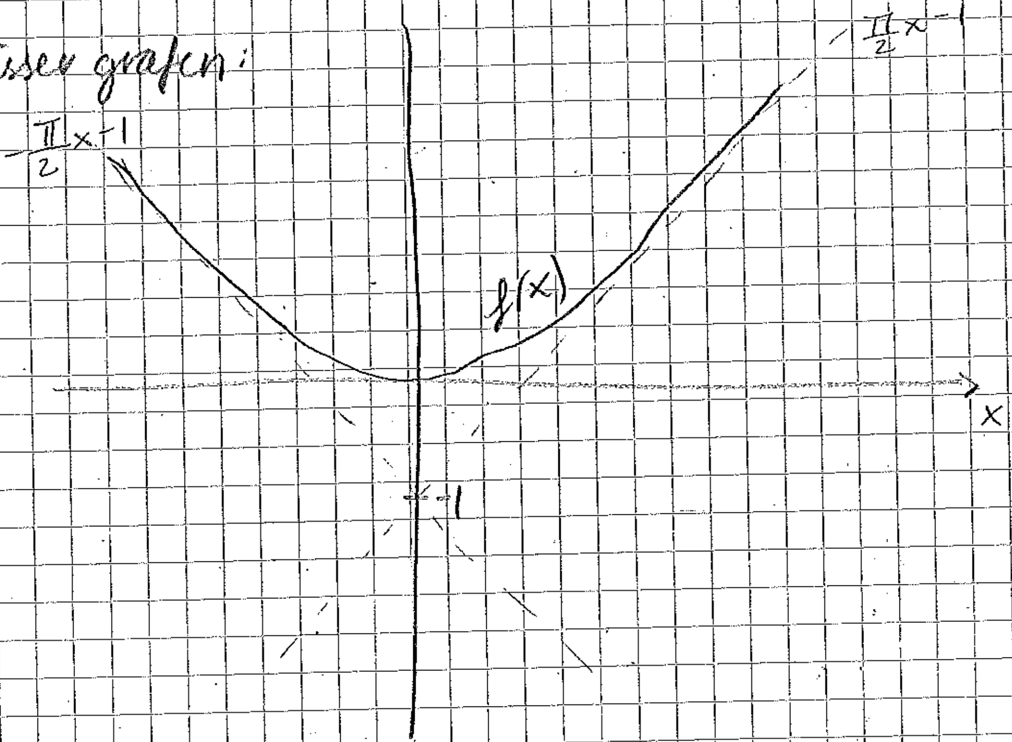
2) $\lim_{x \to \pm\infty} [x \arctan x \pm \frac{\pi}{2} x] = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\arctan x \pm \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}$

$\frac{0}{0}$; L'Hôpital $= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to \pm\infty} -\frac{x^2}{1+x^2} = $ "$\frac{\infty}{\infty}$"; L'Hôpital

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-2x}{2x} = -1$$

Så f har asymptotene $y = \pm\frac{\pi}{2}x - 1$ (når $x \to \pm\infty$ hhv.)

Skisser grafen:



7.) a) Vis at (*): $\frac{1+x}{1+x^2} = 2\arctan x$ har en reell løsning $x = x_0$ og at

$$\frac{\sqrt{3}}{3} < x_0 < 1.$$

La $f(x) = \frac{1+x}{1+x^2}$, $g(x) = 2\arctan x$. Dette er kontinuerlige, overalt definerte funksjoner. Se på $[\frac{\sqrt{3}}{3}, 1]$.

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\frac{3}{9}} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\frac{1}{3}}$$

$$g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 2\arctan\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) > g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

Desuten er $f(1) = 1$, $g(1) = 2\arctan 1 = 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow f(1) < g(1)$

Fra skjæringssetningens korollar fins $x_0 \in (\frac{\sqrt{3}}{3}, 1)$ s.a. $f(x_0) = g(x_0)$, dvs. at ligningen (*) har en reell løsning $x_0 \in (\frac{\sqrt{3}}{3}, 1)$.

Vil vise at dette er den eneste reelle løsningen:

Se på $h(x) = \frac{1+x}{1+x^2} - 2\arctan x$

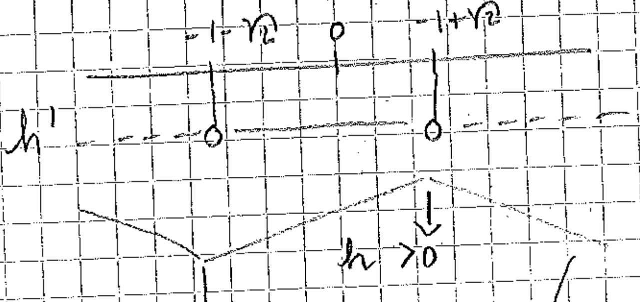
$$h'(x) = \frac{1(1+x^2) - (1+x)2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-2x-x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$-x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{-2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{-2} = -1 \mp \sqrt{2}$$

sjekker fortegn: $h'(0) = 1 > 0$ $\quad h'(-3) = \frac{1+6-9}{(1+9)^2} = \frac{-2}{100} < 0$

$$h'(1) = \frac{1-2-1}{(1+1)^2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} < 0$$



$h(-1-\sqrt{2}) > 0$

strengt avtagende
$\Downarrow$
Kun ett nullpunkt!

b) $\varphi(x) := \frac{\arctan x}{(1+x)^2}$ (ikke def. i -1) $\rightarrow$ går mot $-\infty$

Hvor er φ strengt voksende og avtagende?

$$\varphi'(x) = \frac{\frac{1}{1+x^2}(1+x)^2 - \arctan x \, 2(1+x)}{(1+x)^4}$$

$$= \frac{\frac{1+x}{1+x^2} - 2\arctan x}{(1+x)^3}$$

$\varphi'(x_0) = 0$ fra a), φ' er ikke def i $x = -1$.

og dette er eneste stedet der $\varphi'(x) = 0$.

$$\varphi'(-2)<0, \quad \varphi'(0)\geq 0, \quad \varphi'(1)<0$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$\varphi' \leq 0$ på $(-\infty,-1)$ $\qquad$ $\varphi' \geq 0$ på $(-1, x_0]$ $\qquad$ $\varphi' \leq 0$ på $[x_0, \infty)$

$$\Downarrow$$

φ er avtagende på $(-\infty,-1)$ og $[x_0,\infty)$ og voksende på $(-1, x_0]$.

Ser at x_0 må være globalt max hvis ikke φ blir stor mot $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = 0$$

$$\varphi(x_0) = \frac{\arctan x_0}{(1+x_0)^2} > 0 \quad (\text{siden } x_0>0)$$

$$\Downarrow$$

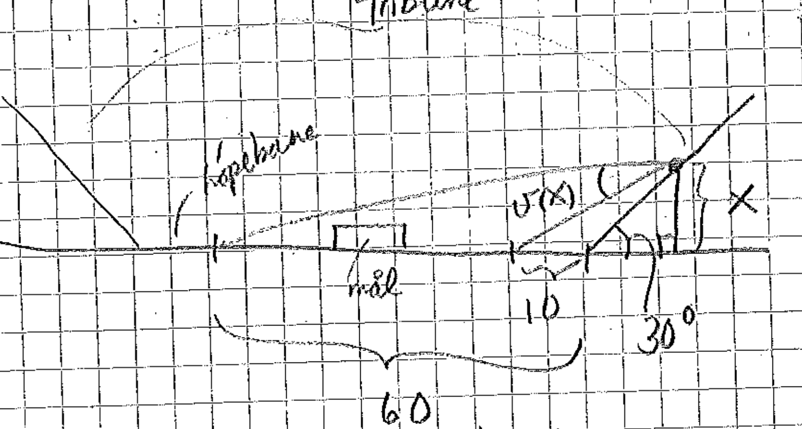
$$\varphi(x_0) = \frac{\arctan x_0}{(1+x_0)^2} \text{ er globalt max.}$$

Merk: $$\varphi(x_0) = \frac{\arctan x_0}{(1+x_0)^2} \overset{(a)}{=} \frac{\frac{1+x_0}{2(1+x_0^2)}}{(1+x_0)^2}$$

$$= \frac{1+x_0}{2(1+x_0^2)(1+x_0)^2} = \underline{\underline{\frac{1}{2(1+x_0^2)(1+x_0)}}}$$

15)

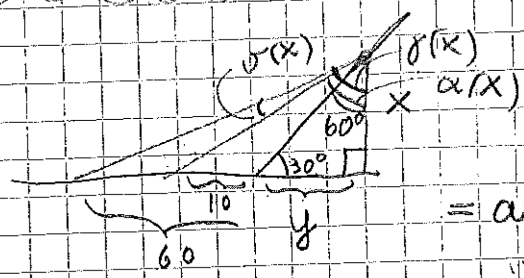
A og E på fotballkamp. Hvor skal de sitte?



A: Hvis de sitter x m over bakken er

$$v(x) = \arctan\left(\frac{60}{x}+\sqrt{3}\right) - \arctan\left(\frac{10}{x}+\sqrt{3}\right)$$

a) Hvordan finne formel?



$\tan 60° = \frac{y}{x} = \sqrt{3}$

$\tan 60° = \frac{\sin 60°}{\cos 60°} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$

$$v(x) = \gamma(x) - \alpha(x)$$
$$= \arctan\left(\frac{60+y}{x}\right)$$
$$- \arctan\left(\frac{10+y}{x}\right)$$
$$= \underline{\underline{\arctan\left(\frac{60}{x}+\sqrt{3}\right) - \arctan\left(\frac{10}{x}+\sqrt{3}\right)}}$$

b) $$v'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{60}{x}+\sqrt{3}\right)^2}\left(\frac{-60}{x^2}\right) - \frac{1}{1+\left(\frac{10}{x}+\sqrt{3}\right)^2}\left(-\frac{10}{x^2}\right)$$

$$= -\frac{10}{x^2}\left[\frac{6}{1+\left(\frac{60}{x}+\sqrt{3}\right)^2} - \frac{1}{1+\left(\frac{10}{x}+\sqrt{3}\right)^2}\right]$$

c) $\max_x v(x)$: $\quad v'(x) = 0$

$$\frac{6}{1+\left(\frac{60}{x}+\sqrt{3}\right)^2} = \frac{1}{1+\left(\frac{10}{x}+\sqrt{3}\right)^2}$$

$$6\left(1+\left(\frac{10}{x}+\sqrt{3}\right)^2\right) = 1+\left(\frac{60}{x}+\sqrt{3}\right)^2$$

$$6 + 6\left(\frac{100}{x^2} + 2\sqrt{3}\frac{10}{x} + 3\right) = 1 + \frac{3600}{x^2} + 2\sqrt{3}\frac{60}{x} + 3$$

$$\cancel{6} + \frac{600}{x^2} + \cancel{\frac{120\sqrt{3}}{x}} + 18 = \cancel{4} + \frac{3600}{x^2} + \cancel{\frac{120\sqrt{3}}{x}}$$

$$2\cancel{0} = \frac{300\cancel{0}}{x^2}$$

$$x^2 = 150$$

$$x = \underline{\underline{\sqrt{150}}} \quad \text{(må ha pos. høyde)}$$

8.2: Definisjon av integralet

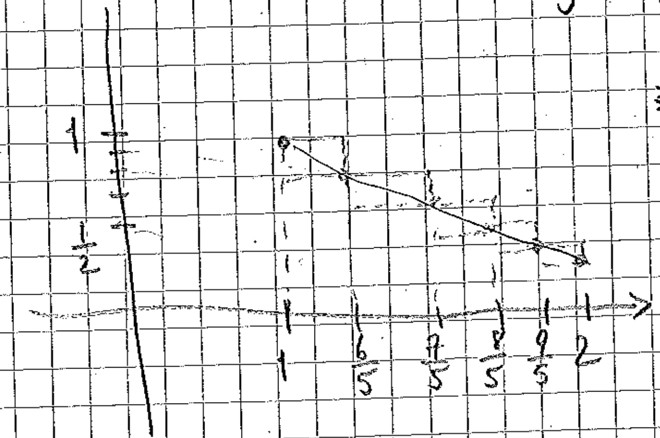
NB: $\Delta x = \frac{1}{5}$

1) $f: [1,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $\Pi = \{1, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}, \frac{8}{5}, \frac{9}{5}, 2\}$

øvre trappesum $= \varnothing(\Pi) = 1 \cdot \frac{1}{5} + \cancel{\frac{5}{6}} \cdot \cancel{\frac{1}{5}} + \cancel{\frac{5}{7}} \cdot \cancel{\frac{1}{5}} + \cancel{\frac{5}{8}} \cdot \cancel{\frac{1}{5}} + \cancel{\frac{5}{9}} \cdot \cancel{\frac{1}{5}}$

$= \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9}$

$\approx \underline{\underline{0{,}746}}$



nedre trappesum $= N(\Pi) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{5} + \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{5} + \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{5} +$

$\frac{5}{9} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \approx \underline{\underline{0{,}646}}$

$\Delta x = \frac{1}{n}$

5) $f: [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$. $\Pi_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}$

a) $\varnothing(\Pi_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k \underset{\boxed{\text{oppg. } 1.2.1}}{=} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n^2+n}{2} = \underline{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$

$N(\Pi_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} k \underset{\text{oppg. } 1.2.1}{=} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$

b) $\int_0^1 x\,dx = \inf\{\varnothing(\Pi) : \Pi \text{ partisjon for } [0,1]\}$

$= \inf\{\varnothing(\Pi_n) : n \in \mathbb{N}\}$

$= \inf_{n \in \mathbb{N}} \{\frac{1}{2}(1 + \frac{1}{n})\} = \frac{1}{2}$

Korollar 8.2.4: $f(x) = x$ er monoton (str. voksende) på $[0,1]$. Gjelder ikke bare for $\int$ men også $\overline{\int}$ og $\underline{\int}$ fra beviset for korollaret

Tilsv: $\int_0^1 x\,dx = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)\right\} = \frac{1}{2}$

c) Fra b er f integrerbar siden (evt siden f er monoton her)

$$\underline{\int_0^1} x\,dx = \int_0^1 x\,dx = \overline{\int_0^1} x\,dx = \frac{1}{2}$$

8.3: Analysens fundamentalteorem

1) b) $\int_0^2 2x^3\,dx = \left[\frac{1}{2}x^4\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left(2^4 - 0^4\right)$

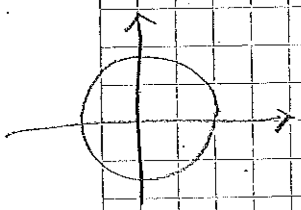
$= 2^3 = \underline{\underline{8}}$

$V_{\arcsin} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

d) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \left[\arcsin x\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$= \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

$\left(\frac{\pi}{3}\right]$



f) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \left[\arctan x\right]_1^{\sqrt{3}}$

$= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{(4-3)\pi}{12} = \underline{\underline{\frac{\pi}{12}}}$

g) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = \left[-\cot x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = -\left(\frac{\cos\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}} - \frac{\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}}\right)$

$= -\left(\frac{\frac{1}{\cancel{2}}}{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}} - \frac{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}}{\frac{1}{\cancel{2}}}\right) = \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \underline{\underline{\frac{2\sqrt{3}}{3}}}$

3) d) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+4x^2}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+(2x)^2}\,dx$

$= \left[\frac{1}{2}\arctan 2x\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{8}}}$

e) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{9\left(1-\frac{x^2}{9}\right)}}\,dx$

$= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{9}\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{3\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}}\,dx$

$= \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}}\,dx = \frac{1}{3}\left[3\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)\right]_0^1$

$= \arcsin\frac{1}{3} - \arcsin 0 = \underline{\underline{\arcsin\frac{1}{3}}}$

5.) a) $f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$

$f'(x) = \underline{\underline{e^{-x^2}}}$

Analysens fundamentalthm.

b) $f(x) = \int_1^x \frac{\sin t}{t}\,dt \Rightarrow f'(x) = \underline{\underline{\frac{\sin x}{x}}}$

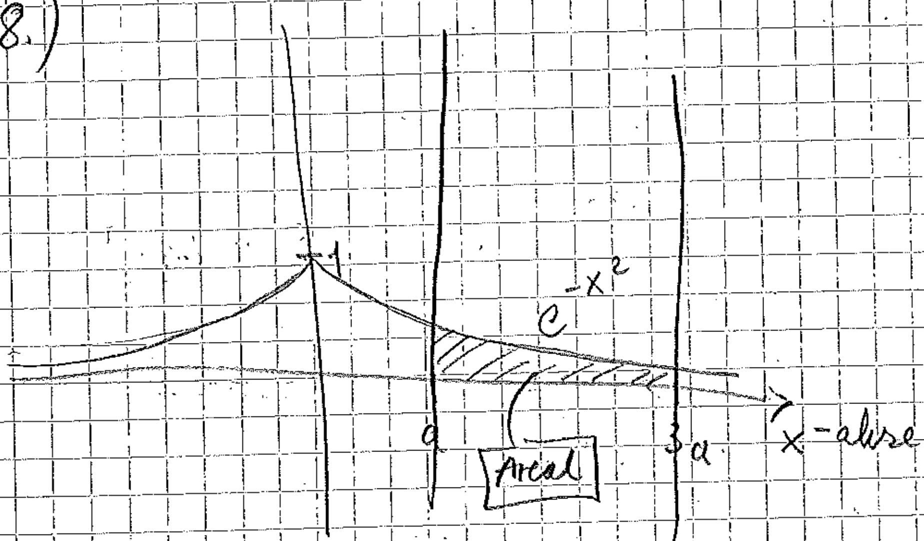
analysens fundamentalthm.

c) $f(x) = \int_1^x \arctan t^2\,dt$

$f'(x) = \underline{\underline{\arctan x^2}}$

analysens fundamentalthm

8.)



Hvorfor er $g(a) = \int_a^{3a} e^{-x^2} dx$ arealet på fig.

$\int_a^b f(x)\,dx$ angir arealet mellom funksjonen f, x-aksen og linjene $x = a$, $x = b$ (fra def. av integralet som grense av Riemannsum),

dermed er $\int_a^{3a} e^{-x^2} dx$ nettopp det oppgaven beskriver

$$\max_{a>0} \int_a^{3a} e^{-x^2} dx \ ?$$

$$\max_{a>0} \int_a^{3a} e^{-x^2} dx = \max_{a>0} \left(\int_0^{3a} e^{-x^2} dx - \int_0^{a} e^{-x^2} dx \right) = \max_{a>0} g$$

MERK: $F(a) := \int_0^a e^{-x^2} dx$ har derivert

$F'(a) = e^{-a^2}$ fra Analysens fundamentalthm.

$G(a) := \int_0^{3a} e^{-x^2} dx = F(3a)$. Bruker kjerneregelen

til å derivere G:

$$G'(a) = F'(3a)\,3 = 3e^{-(3a)^2}$$

Dermed er

$$g'(a) = 3e^{-9a^2} - e^{-a^2}, \text{ og } g'(a) = 0 \Leftrightarrow$$

$$3e^{-9a^2} = e^{-a^2} \Leftrightarrow$$

$e^{8a^2} = 3 \iff 8a^2 = \ln 3$

$a^2 = \frac{\ln 3}{8} \iff a = \sqrt{\frac{\ln 3}{8}} = \frac{\sqrt{\ln 3}}{2\sqrt{2}}$

$\boxed{a > 0}$

$= \frac{\sqrt{2}\,\sqrt{\ln 3}}{4}$