Plenum 21/09-12

4.3: 1 c), 3a), b), d), 4 b), 11, 13, 14, 15, 18 evt.

5.1: 1a), b), c), 3a), b), 5a), b), e), g), 6a), b), 7, 9a), b), c)

4.3: 1) c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^3+2n-13}{7n-4}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5+\frac{2}{n^2}-\frac{13}{n^3}}{\frac{7}{n^2}-\frac{4}{n^3}} = \infty$

Deler på n^3 oppe og nede

3) b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\sqrt{n}+n}+\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}-n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\sqrt{n}+n}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{\frac{n+\sqrt{n}}{n}} + 1 \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} + 1 \right) = 1+1 = \underline{\underline{2}}$$

4) b) $\lim_{n\to\infty} \frac{2\sin n}{n} = 0$

La $\varepsilon > 0$ være gitt. Vil finne $N \in \mathbb{N}$ s.a. for alle $n \geq N$ er

$$\left| \frac{2\sin n}{n} - 0 \right| = \left| \frac{2\sin n}{n} \right| = \frac{2|\sin n|}{n}$$

$$< \varepsilon$$

Merk: $|\sin n| \leq 1$ for alle n.

Derfor er det nok å finne $N \in \mathbb{N}$ s.a.

$$\frac{2}{N} < \varepsilon \quad \left(\frac{2|\sin n|}{n} \leq \frac{2}{n} \right)$$

Velg N til å være det første heltallet større (eller lik) enn $\frac{2}{\varepsilon}$. Da er, for alle $n \geq N$

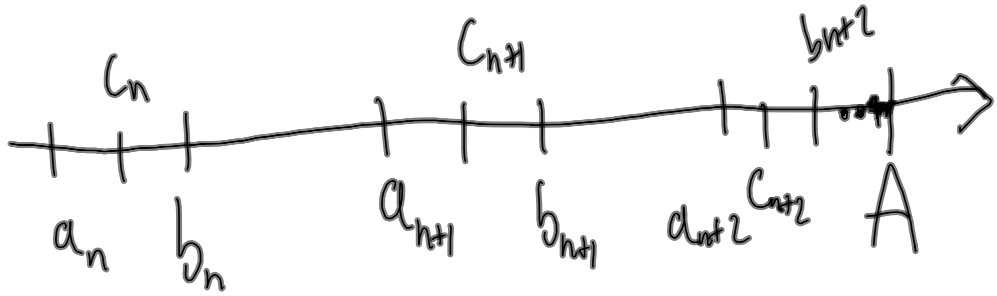
$$\left| \frac{2 \sin n}{n} - 0 \right| \leq \frac{2}{n} \leq \frac{2}{N} < \frac{2}{\frac{2}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

11.) Skviselemma

Anta $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = A$, og

$$a_n \leq c_n \leq b_n \text{ for alle } n.$$

Vil vise: Da er $\lim_{n\to\infty} c_n = A$



La $\varepsilon > 0$ være gitt. Da fins, siden $\lim_{n \to \infty} a_n = A$, $N_a \in \mathbb{N}$ s.a. for alle $n \geq N_a$ er $|a_n - A| < \varepsilon$.

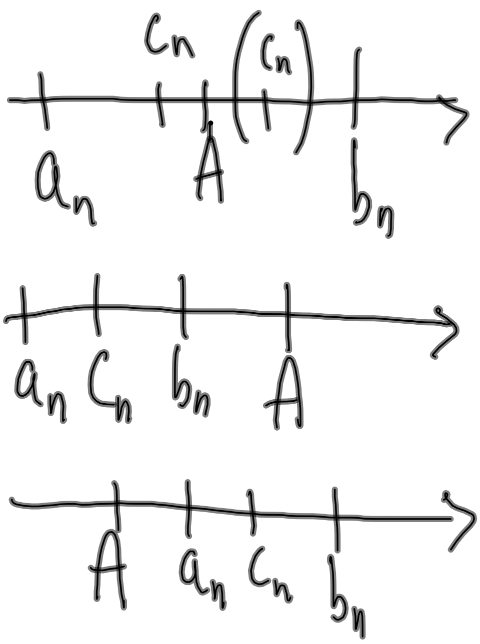
Tilsvarende, siden $\lim_{n \to \infty} b_n = A$, fins $N_b \in \mathbb{N}$ s.a. for alle $n \geq N_b$ er

$$|b_n - A| < \varepsilon.$$

Merk: For alle n,

$$|c_n - A| \le \max\{|a_n - A|, |b_n - A|\}$$

(siden $a_n \le c_n \le b_n$)



Velg $N = \max\{N_a, N_b\}$. Da er, for alle $n \ge N$,

$$|c_n - A| \le \max\{|a_n - A|, |b_n - A|\}$$

$$< \varepsilon .$$

siden $|a_n - A| < \varepsilon$ og $|b_n - A| < \varepsilon$

Dermed er

$$\underline{\underline{\lim_{n\to\infty} c_n = A.}}$$

5.1: Kontinuitet

5) e) $f(x) = \frac{1}{x}$, i pkt. $x=1$:

La $\varepsilon > 0$ være gitt. Vil finne $\delta > 0$ s.a. når $|x-1| < \delta$, så er $|f(x) - f(1)| < \varepsilon$.

La $h := x - 1$ (så $x = h + 1$)

Da er: $\left|f(x)-f(1)\right| = \left|\frac{1}{x} - 1\right|$

$$= \left|\frac{1-x}{x}\right| = \left|-\frac{(x-1)}{x}\right| = \left|\frac{x-1}{x}\right|$$

$$= \frac{|h|}{|h+1|}$$

Merk: Hvis $|h| < \frac{1}{2}$, så er $|h+1| > \frac{1}{2}$

Dermed er $\frac{1}{|h+1|} < \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

Så hvis $|h| < \frac{\varepsilon}{2}$ også, da vil

$$\frac{|h|}{|h+1|} < \frac{\varepsilon}{2} \cdot 2 = \varepsilon.$$

Så velg $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{2}\right\}$, da er det s.a. når $|x-1| = |h| < \delta$, så er

$$|f(x) - f(1)| = \frac{|h|}{|h+1|} < \varepsilon.$$

5.) g) $f(x) = \sqrt{x}$, $x = 4$:

La $\varepsilon > 0$ være gitt. Vil finne $\delta > 0$ s.a. når $|x-4| < \delta$, så er $|f(x) - f(4)| < \varepsilon$.

La $h := x - 4$ (så $x = h + 4$)

Da er: $|f(x) - f(4)| = |\sqrt{x} - 2|$

$$< |\sqrt{x}-2|\,|\sqrt{x}+2|$$

$\sqrt{x} \geq 0$ for alle x, så $\sqrt{x}+2 \geq 2$ for alle x

$$= |(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)|$$

$$= |x-4| = |h|$$

Velg derfor $\delta = \varepsilon$. Da er det s.a. hvis $|x-4| = |h| < \delta$,

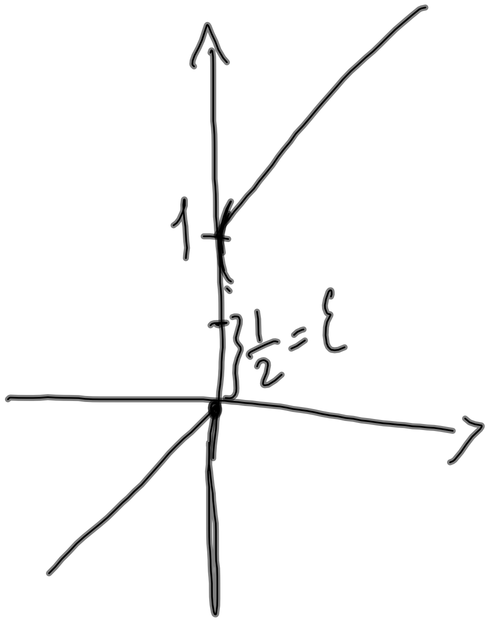
så er $|f(x)-f(4)| < |h| < \delta = \varepsilon$

Så f kontinuerlig i $x=4$.

6.) a) $\cancel{f(x)=\begin{cases} x+1, & \text{for } x \neq 0 \\ x, & \text{for } x \geq 0 \end{cases}}$

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{for } x > 0 \\ x & \text{for } x \leq 0 \end{cases} \quad i$$

pkt. x=0 .



Må finne $\varepsilon > 0$ s.a. samme hvilken $\delta > 0$ man velger, så vil det finnes noen x s.a. selvom $|x-0| = |x| < \delta$, så er $|f(x) - f(0)| = |f(x) - 0| = |f(x)| > \varepsilon$.

Velg $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Samme hvor liten $\delta > 0$ som velges, vil f. eks. $x = \frac{\delta}{2}$ oppfylle $|x| < \delta$, men siden $x > 0$, vil

$$|f(x) - f(0)| = x + 1 > 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon$$

Så f er ikke kontinuerlig i $x=0$.

b) $f(x) = \begin{cases} \cos\frac{1}{x} & \text{for } x \neq 0 \\ 0 & \text{for } x = 0 \end{cases}$ i pkt. $x=0$.

Merk at $\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} \infty$, så $\cos\frac{1}{x}$ vil ossillere (svinge) raskere og raskere når x nærmer seg 0.

Velg $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Samme hvor liten δ som velges vil det være mulig å finne en x s.a. $|x-0| = |x| < \delta$, men s.a. $\frac{1}{x} = 2k\pi$ for en eller annen $k \ (\in \mathbb{Z})$. (F. eks. $x = \frac{1}{2k\pi} \Rightarrow$

$$|x| = \frac{1}{2k\pi} < \delta \qquad \boxed{\frac{1}{2k\pi} \xrightarrow[k \to \infty]{} 0}$$

$k \in \mathbb{N}$

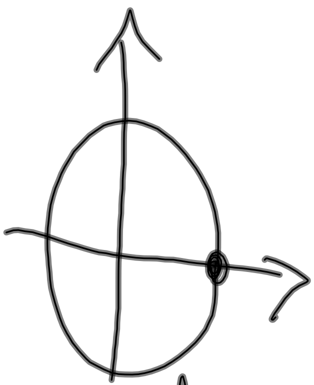
Kan få til dette!)

Men da er:

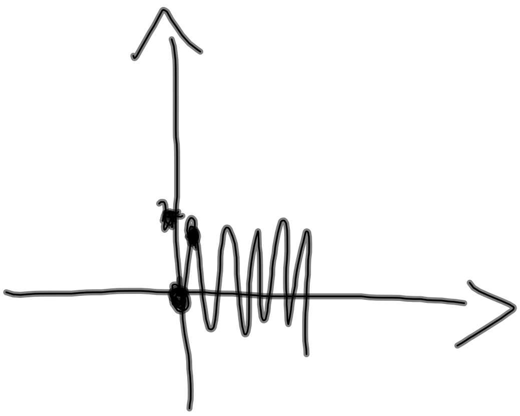
$$|f(x)-f(0)| = \left|\cos\frac{1}{x} - 0\right|$$

$$= \left|\cos\frac{1}{x}\right| = |\cos(2k\pi)|$$

$$= 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon$$



Dermed er f diskont. i $x=0$



7.) a) $\underbrace{f(x) = x^2 \sin x, \ i \ x = \pi}$:

x^2 er kont. overalt.

$\sin x$ er kont. overalt.

Da er produktet $x^2 \sin x$ kont. overalt, spesielt i $x = \pi$. Så $f(x)$ er kont. i $x = \pi$.

b) $\underbrace{f(x) = e^{x^2} \ln x, \ x = 2}$:

x^2 er kont. overalt. e^y er kont. overalt.

Derfor er den sammensatte funksjonen e^{x^2} kont. overalt. $\ln x$ er kont. der den er def., dvs. for alle positive x. Spes. er $\ln x$ kont. i $x=2$. Dermed er produktet $e^{x^2}\ln x = f(x)$ kont. i $x=2$.

9.) a) $\underline{f(x) = x^3}$: f er ikke diskont. noen steder.

b) $\underline{f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x > 0 \\ x+1, & x \leq 0 \end{cases}}$: $\sqrt{x}$ er kont. og $x+1$ er kont.

så eneste mulige diskont. er i $x = 0$.

Merk: $\lim\limits_{x \to 0_+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0_+} \sqrt{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to 0_-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0_-} (x+1) = 1 \neq 0$

Så $\lim_{x \to 0_+} f(x) \neq \lim_{x \to 0_-} f(x)$, så f er diskont. i $x=0$.

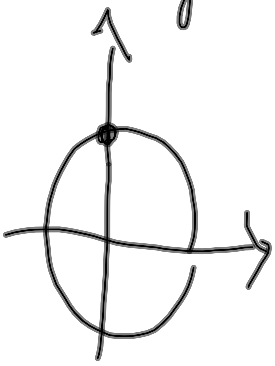
c) $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{når } x \neq 0 \\ 0 & \text{når } x = 0 \end{cases}$:

$\sin\frac{1}{x}$ er kont. når den er def., dvs. $x \neq 0$.

Dermed er eneste mulige diskont. i $x=0$.

Vil vise at f er diskont. v/ å finne en følge $\{\frac{1}{x_n}\}$ som konvergerer mot 0, men så. $\sin\frac{1}{x_n} = 1$ for alle n.

Velg: $\frac{1}{x_k} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{N})$



$$\left(x_k = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}\right)$$

Da vil $x_k \longrightarrow 0$ når $k \to \infty$. men

$\sin\frac{1}{x_k} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 1$ for alle

k. Dermed er: $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \lim_{k\to\infty} 1 = 1 \neq 0 = f(0)$