Plenum 4-10

6.1: 1 b), g), h), 3 a), b), 10, 11 a), 12

6.2: 2, 3, 5, 7, 8, 13, 16, 20

6.3: 1 a), b), c), d, e), f), 3 a), b), d), e), g)

6.1:

1) h) $f(x) = \dfrac{\cos(\sqrt{x})}{x^2}$

$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

$\dfrac{1}{x^2} = x^{-2}$

$f'(x) = -\sin(\sqrt{x})\dfrac{1}{x^2\, 2x^{\frac{1}{2}}} + \dfrac{\cos(\sqrt{x})(-2)}{x^3}$

$= \dfrac{-\sin(\sqrt{x})}{2x^{\frac{5}{2}}} - \dfrac{2\cos(\sqrt{x})}{x^3}$

$$= \frac{-x^2 \sin(\sqrt{x}) - 4x^{\frac{3}{2}} \cos(\sqrt{x})}{2x^{\frac{9}{2}}}$$

3) a) $f(x) = x^2 \cdot \cos^4 x \cdot e^x$

$$f'(x) = f(x) D[\ln|f(x)|]$$

$$= x^2 \cdot \cos^4 x \cdot e^x D[\ln(x^2 \cdot \cos^4 x \cdot e^x)]$$

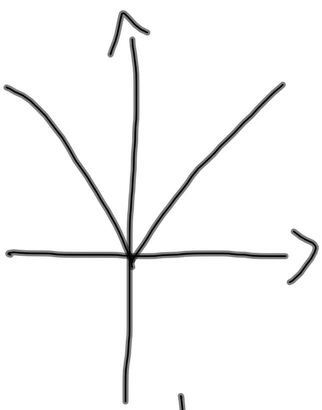
$$= x^2 \cdot \cos^4 x \cdot e^x \, D[2\ln|x| + 4\ln|\cos x| + x]$$

$$= x^2 \cdot \cos^4 x \cdot e^x \left(\frac{2}{x} + (-4 \cdot \tan x) + 1\right]$$

$$= x^2 \cdot \cos^4 x \cdot e^x \left(\frac{2}{x} - 4\tan x + 1\right)$$

Hvorfor er $(\ln|\cos x|)' = -\tan x$?

Husk: $|\cdot|$ også er en funksjon



m/ derivert -1 for $x < 0$ og 1 for $x > 0$ (ikke deriv.bar i 0). Må se på $\cos x > 0$ og $\cos x < 0$ separat: Får da resultatet.

Eks: $\cos x < 0$: $D[\ln|\cos x|]$

$= D[\ln(-\cos x)] = \frac{1}{-\cos x} \sin x$

$\cos x < 0$

$= -\tan x$.

b) $f(x) = \sqrt[17]{\sin x} \cdot e^{x^2} \cdot \tan x$

$f'(x) = f(x)\, D[\ln|f(x)|]$

$$= \sqrt[17]{\sin x} \cdot e^{x^2} \cdot \tan x \; D\left[\frac{1}{17}\ln|\sin x|\right.$$

$$\left. + x^2 + \ln|\tan x|\right]$$

$$= \sqrt[17]{\sin x} \cdot e^{x^2} \cdot \tan x \left[\frac{1}{17}\underbrace{\frac{1}{\tan x}}_{\frac{\cos x}{\sin x}}\right.$$

$$\left. + 2x + \frac{1}{\sin x \cos x}\right]$$

10.) __Vis:__ $D[\sqrt{x}] = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

La $f(x) = \sqrt{x}$.

Da er:

$$D[\sqrt{x}] = D[f(x)] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{x} + \cancel{\Delta x} - \cancel{x}}{\cancel{\Delta x}(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\underline{2\sqrt{x}}}$$

6.2

7) Vis: $\exists\, c \in [0, x] : \sin x = x \cos c$

Det fins et tall $c \in [0, x]$ slik at $\sin x = x \cos c$:

Anta først at $x = 0$: Da stemmer dette siden $\sin 0 = 0 \cos 0$

Anta deretter $x > 0$: La $f(x) = \sin x$.
Siden f er kont. og deriv. bar på $[0, x]$ fins det fra middelverdi-setningen en $c \in (0, x)$ s.a.

$$\underbrace{f'(c)}_{= \cos c} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sin x}{x}$$

$$\Updownarrow$$

$$\cos c = \frac{\sin x}{x}$$

$$\Rightarrow x \cos c = \sin x$$

Vis: $|\sin x| \leq |x|$:

$\cos c \in [-1, 1]$

Husk: $|\cos c| \underset{(*)}{\leq} 1$ (for alle c)

Da er: $|x \cos c| = |\sin x|$

$$|x| \geq |x|\,|\cos c| = |\sin x|$$

(*): $|\cos c| \leq 1$

Dermed er $|\sin x| \leq |x|$ for alle x.

8.) Anta $x > -1$. Vis: Fins c mellom 0 og x s.a. $\ln(1+x) = \frac{x}{1+c}$

Anta $x=0$: Opplagt OK ($c=0$ funker: $\ln(1) = \frac{0}{1+0} (=0)$)

Anta derfor $x \neq 0$:

$f(x) := \ln(1+x)$. Denne er veldef., kont. og deriverbar (for $x > -1$).

Fra middelverdiset. fins det en c mellom 0 og x s.a.

$$\underbrace{f'(c)}_{=\frac{1}{1+c}} = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{1+c} = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \ln(1+x) = \frac{x}{1+c} \qquad (\star)$$

Vil vise: $\ln(1+x) \leq x$

Anta først $x=0$: OK $(\ln(1) = 0 \leq 0)$

Anta $x>0$: Da er $c>0$ $(c \in (0,x))$,
og dermed $\frac{1}{1+c} < 1 \Rightarrow \frac{x}{1+c} < x$

$$\Downarrow (*)$$

$\ln(1+x) < x$.

Anta $-1<x<0$: Da er $-1 < c < 0$ $(c \in (x,0))$
Adderer 1: $0 < c+1 < 1$

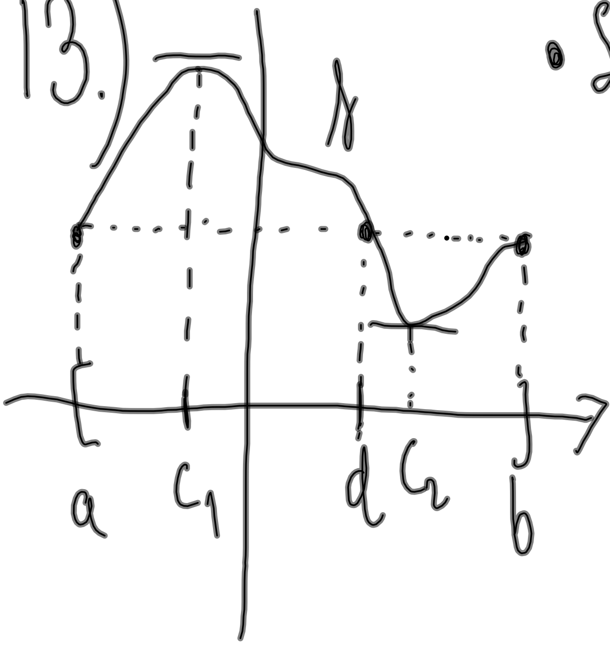
$$\Rightarrow \frac{1}{c+1} > 1 \Rightarrow \frac{x}{c+1} < x$$

multipliser m/ x : OBS! $x<0$

$$\Rightarrow \ln(x+1) < x \quad (*)$$

Altså er $\underline{\underline{\ln(x+1) \leq x}}$ for alle $x>-1$.

13.)



- Se først på [a, d].
  Her er f kont. og deriv.bar. Fra middelverdiset. fins $c_1 \in (a,d)$ s.a.

$$f'(c_1) = \frac{f(d)-f(a)}{d-a} = 0$$

$$\boxed{f(d) = f(a)}$$

- Se så på [d, b]. Her er også f kont. og deriv.bar. Fra middelverdiset. fins $c_2 \in (d,b)$ s.a. $f'(c_2) = \frac{f(b)-f(d)}{b-d} = 0$

La nå $g(x) := f'(x)$ og se på $[c_1, c_2]$. Her er g kont. og derivbar (siden f er 2x deriv.bar per antagelse). Fra middelverdiset. fins $c \in [c_1, c_2]$ s.a.

$$f''(c) = g'(c) = \frac{g(c_2) - g(c_1)}{c_2 - c_1}$$

Fra def av g

middelverdi

$$= \frac{0 - 0}{c_2 - c_1} = \underline{0}$$

Dermed er påstanden OK!

6.3: 3) b) $\lim_{x \to 0^+} x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} - 1\right)$

$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}}$

"$0 \cdot \infty$": må omforme til $\frac{0}{0}$ eller $\frac{\infty}{\infty}$ før bruk av L'Hôpital

$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}\cancel{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}}{\cancel{-\frac{1}{x^2}}}$

"$\frac{\infty}{\infty}$": L'Hôpital

$= \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$

$= \underline{0}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\sin\frac{1}{x}\right)^{x}$

$$= \lim_{x\to\infty} e^{x\ln\left(1+\sin\frac{1}{x}\right)}$$

Bruker logaritmer for å flytte x-avh. opp i eksponenten

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\ln\left(1+\sin\frac{1}{x}\right)}$$

Siden eksponensial-funksjonen er kont.

M: $\lim\limits_{x\to\infty} x\ln\left(1+\sin\frac{1}{x}\right)$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\sin\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

"$\infty\cdot 0$": Må omforme for L'Hôpital

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+\sin\frac{1}{x}}\left(\cos\frac{1}{x}\right)\cancel{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}}{\cancel{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}}$$

"$\frac{0}{0}$": L'Hôpital

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\cos\frac{1}{x}}{1+\sin\frac{1}{x}} = 1$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \sin\frac{1}{x}\right)^x = \cancel{\lim_{x \to \infty}}\ e^{\lim_{x \to \infty} \cdots\cdots}$$

$$= e^1 = \underline{\underline{e}}$$