Plenumsregning 4/10-13

Midtveis

Før: → Lese over boka (skriv oversikt over viktige resultater & def.)

→ Gjør gamle eksamener.

→ Orakel

På: → Mat & drikke → Eliminasjon

→ God tid → Pass tida

→ Svar på alt! → Se over

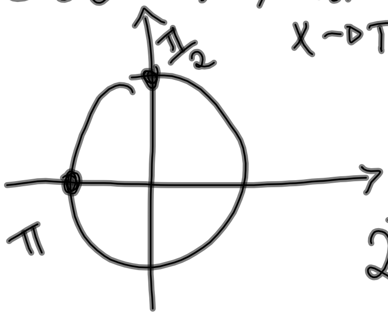
→ Kandidatnr. på alt!

5.4: 1c, 2ab, 3 bc

6.1: 1bgh, 3ab, 10, 11a, (12)

6.2: 2, 3, 5, 7, 8, 13, 16, 20

5.4: 1)c) $\lim_{x \to \pi} \frac{\tan x + 3\cos x}{\sin\left(\frac{x}{2}\right) + 4} = \frac{-3}{5}$



2)b) $\lim_{x \to 3} x^2 = 9$ fra def:

La $\varepsilon > 0$ være gitt. Lar $h = x - 3$.

Merk:

$$|f(x) - b| = |x^2 - 9| = |(x-3)(x+3)|$$
$$= |h|\,|x+3| = |h|\,|h+6|$$

Hvis $|h| < 1$, så vil $|h+6| < 7$. Så ved å velge $|h| < \min\left\{\frac{\varepsilon}{7}, 1\right\}$, så er

$$|x^2 - 9| = |h|\,|h+6| < \frac{\varepsilon}{7} \cdot 7 = \varepsilon$$

Velg $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{7}, 1\right\}$. Da vil, for alle x s.a. $|x-3| = |h| < \delta$, det være s.a.

$$|x^2 - 9| = |h|\,|h+6| < \varepsilon.$$

3.) b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{8x^2 + 2x + 7}{\sqrt{x} - 4x^2}$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{8 + \frac{2}{x} + \frac{7}{x^2}}{\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} - 4} = \frac{8}{-4} = \underline{\underline{-2}}$$

$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

c) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x} - x\right)$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+3x} - x\right)\left(\sqrt{x^2+3x} + x\right)}{\sqrt{x^2+3x} + x}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{x^2} + 3x - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+3x} + x} = \lim_{x \to \infty} \frac{3}{\frac{\sqrt{x^2+3x}}{x} + 1}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{3}{\sqrt{\frac{x^2+3x}{x^2}} + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{3}{x}} + 1}$$

$$= \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$$

6.1: 1) g) $f(x) = x \cdot \cos(\ln x)$

$$f'(x) = \cos(\ln x) + \cancel{x}(-\sin(\ln x))\frac{1}{\cancel{x}}$$

$$= \cos(\ln x) - \sin(\ln x)$$

h) $f(x) = \dfrac{\cos(\sqrt{x})}{x^2}$ $\quad \left(\cos(\sqrt{x}) \cdot \dfrac{1}{x^2} \right)$ $\quad \left(\dfrac{\cos(\sqrt{x})}{x^2} \right)$

$$f'(x) = -\sin(\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{1}{x^2}$$

$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ $\quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

$$+ \cos(\sqrt{x})(-2)\frac{1}{x^3}$$

$\boxed{\frac{1}{x^2} = x^{-2}}$

$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ $\quad \frac{1}{x^n} = x^{-n}$

$$= \frac{-\sin(\sqrt{x})}{2x^{\frac{5}{2}}} - \frac{2\cos(\sqrt{x})}{x^3}$$

$$\left(= \frac{-x^2\sin(\sqrt{x}) - 4x^{\frac{3}{2}}\cos(\sqrt{x})}{2x^{\frac{9}{2}}}\right)$$

3.) a) $f(x) = x^2 \cdot \cos^4 x \cdot e^x$

$$f'(x) = f(x)\, D[\ln|f(x)|]$$

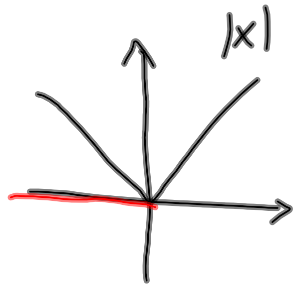
$$= x^2 \cdot \cos^4 x \cdot e^x \, D[\ln|x^2 \cdot \cos^4 x \cdot e^x|]$$

$$= x^2 \cdot \cos^4 x \cdot e^x \, D[\ln(x^2 \cdot \cos^4 x \cdot e^x)]$$

$$= x^2 \cdot \cos^4 x \cdot e^x \, D[2\ln|x| + 4\ln|\cos x| + x]$$

$$\overset{(*)}{=} \underline{\underline{x^2 \cdot \cos^4 x \cdot e^x \left(\frac{2}{x} - 4\tan x + 1\right)}}$$

(*): $D[\ln|\cos x|] = -\tan(x)$?



$D[\ln|f(x)|] = \frac{1}{f(x)} f'(x)$

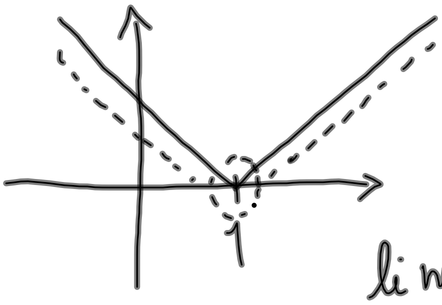
Eks:

$\cos x < 0$: $D[\ln|\cos x|]$

$$= D[\ln(-\cos x)] = \frac{1}{-\cos x} \sin x$$

$$= -\frac{\sin x}{\cos x} = -\underline{\tan x}$$

11.) a) $f(x) = |x-1|$:



$f'(1)$ eksisterer hvis og bare hvis:

$$\underbrace{\lim_{x \to 1_-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}}_{VS} = \underbrace{\lim_{x \to 1_+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}}_{HS}$$

VS: $$\lim_{x \to 1_-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1_-} \frac{1-x-0}{x-1} = \underline{-1}$$

HS: $$\lim_{x \to 1_+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1_+} \frac{x-1-0}{x-1} = \underline{1}$$

Så: $$\lim_{x \to 1_-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -1 \neq 1 = \lim_{x \to 1_+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

og dermed eksisterer ikke $f'(1)$.

6.2: 7.) Anta først at $x = 0$. Da stemmer dette, siden $\sin 0 = 0 \sin 0$ (så $c = 0$ virker).

Anta deretter at $x > 0$. La $f(x) = \sin x$.
Siden f er kont. og deriverbar på $[0, x]$, fins det fra <u>middelverdisetningen</u> en $c \in (0, x)$ s.a.

$$\underbrace{f'(c)}_{= \cos c} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sin x}{x}$$

$$\Downarrow$$

Det fins $c \in (0, x)$ s.a. $x \cos c = \sin x$.
(Tilsvarende hvis $x < 0$).

<u>Vis:</u> $|\sin x| \leq |x| \ \forall x$ (for alle x):

Husk at $|\cos c| \leq 1$. Derfor er:

$$|x \cos c| = |\sin x|$$

$$|x| \underset{\boxed{|\cos c| \leq 1}}{\geq} |x| \, |\cos c| = |\sin x|$$

Dermed er: $|\sin x| \leq |x|$.

8.) Anta $x = 0$. Da er påstanden OK

($c = 0$ funker; $\ln(1) = \frac{0}{1+0}$)

Anta $x \neq 0$. $f(x) = \ln(1+x)$, er definert, kont. og deriverbar for alle $x > -1$. Fra middelverdisetningen fins det en $c \in (0, x)$ s.a.

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

Vet: $f'(c) = \frac{1}{1+c}$, så derfor er

$$\frac{1}{1+c} = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{x}{1+c} = \ln(1+x) \qquad (\star)$$

Vil vise $\ln(1+x) \leq x$:

Anta $x = 0$: OK ($\ln 1 \leq 0$)

Anta $x>0$: Da er $c>0$, og dermed er

$$\frac{1}{1+c}<1$$

Gange m/x: $$\frac{x}{1+c} < x$$

$$\Updownarrow \; (*)$$

$$\ln(1+x) < x$$

Til slutt, anta $-1<x<0$: Da er $-1<c<0$

Adderer 1: $$0 < c+1 < 1$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{c+1} > 1$$

$$\Downarrow \quad \left(\text{ganger m/x. OBS! } -1<x<0\right)$$

$$\frac{x}{c+1} < x$$

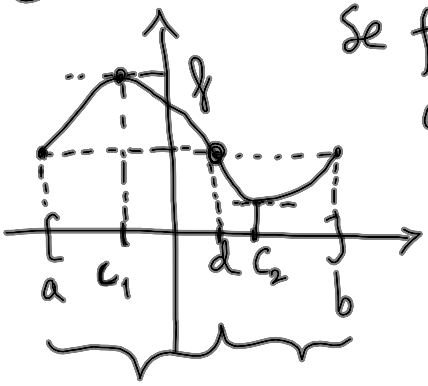
$$\Downarrow \; (*)$$

$$\ln(x+1) < x \quad \leadsto \text{OK!}$$

Altså er $\ln(x+1) < x$ for alle $x>-1$.

13.) f kont. i $[a, b]$, 2· deriv. bar, $f(a) = f(d) = f(b)$,

$d \in (a, b)$:



Se først på $[a, d]$. Her er f kont. og deriverbar. Fra middelverdiset. fins $c_1 \in (a, d)$ s.a.

$$f'(c_1) = \frac{f(d) - f(a)}{d - a} = 0.$$

Se på $[d, b]$. Her er også f kont. og deriverbar. Fra middelverdiset. fins $c_2 \in (d, b)$ s.a.

$$f'(c_2) = \frac{f(b) - f(d)}{b - d} = 0.$$

La $g(x) = f'(x)$. Se på $[c_1, c_2]$. Her er g kont. og deriverbar (siden f er $2\times$ deriv. bar). Fra middelverdiset. fins $c \in (c_1, c_2)$ s.a.

$$\underline{f''(c)} = g'(c) = \frac{g(c_2) - g(c_1)}{c_2 - c_1} = \frac{0 - 0}{c_2 - c_1} = \underline{0}$$

Dermed er påstanden vist.

20.) a) $\underline{|f(x) - f(y)| \leq K|x-y|}$:

Først:

$x = y$: OK

Anta $\underline{x \neq y}$: Anta $y < x$ (hvis omvendt: bytt navn!)

Middelverdisetn.: $c \in (y, x)$ s.a.

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

$$|f(x) - f(y)| = |x-y|\,|f'(c)|$$

f' kont., $[a,b]$ lukket & begrenset

$\Downarrow$ (Ekstremalverdiset.)

f' er begrenset: $|f'(x)| \leq K$ for alle $x \in [a,b]$

Da: $|f(x) - f(y)| \leq K|x-y|$, $x \in [a,b]$.

b) $\underline{f(x) = \sqrt{x}}$: Bruk motsigelse. Anta fins slik K. Velg $x = \frac{1}{4K^2}$: $\left|\frac{1}{x}\right| = 2K \nleq K$.

Strider ikke mot a): f' ikke er def. i $x = 0$.