Løsningsforslag utsatt eksamen Mat1100 09.01.2014

Oppgave 1

$$\nabla g = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}\right) = (12xy, 6x^2, 1)$$

$\boxed{D}$

Oppgave 2

$\nabla f = (y \cos xy , x \cos xy , 1)$, så

$\nabla f(1,1,1) = (0,0,1)$

Ergo $f'(\vec{a};\vec{r}) = \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{r} = (0,0,1)\cdot(1,1,1) = 1$

$\boxed{B}$

Oppgave 3

$$\begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 13 & -1 \end{vmatrix} = -8 - 117 = -125$$

Så arealet er $125/2$.

$\boxed{C}$

Oppgave 4

$$(2-i,\ 5,\ i)\cdot(2-i,\ 5,\ i)$$
$$= (2-i)(2+i) + 5\cdot 5 + i(-i)$$
$$= 4 - i^2 + 25 - i^2 = 31, \text{ dvs. lengde } \sqrt{31}.$$ $\boxed{E}$

Oppgave 5

Vi har $g'(f(0)) = \dfrac{1}{f'(0)}$, dvs. $g'(1) = \dfrac{1}{1} = 1$

$\boxed{C}$

Oppgave 6

$$\int \arcsin x \, dx = \int u \cos u \, du$$

$u = \arcsin x$ gir $x = \sin u$

$\dfrac{dx}{du} = \cos u$, $dx = \cos u \, du$

$\boxed{D}$

Oppgave 7

$$V = \int_0^1 \pi [f(x)]^2 dx = \pi \int_0^1 (1 + x^7) dx$$
$$= \pi \left[x + \frac{1}{8}x^8\right]_0^1 = \pi \cdot \frac{9}{8}$$ $\boxed{D}$

Oppgave 8

Vi har $I \cdot I = I$ for alle identitetsmatriser I.

Så alle identitetsmatriser er inverterbare. $\boxed{D}$

Oppgave 9

$$\int \frac{1}{3+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{1}{u}\cdot 2(u-3)\,du = \int \left(2 - \frac{6}{u}\right)du$$

$u = 3+\sqrt{x}$ gir $x = (u-3)^2$

$\frac{dx}{du} = 2(u-3)$, $dx = 2(u-3)\,du$

$\boxed{B}$

Oppgave 10

For $n > 0$ har vi $\lim\limits_{x\to\infty} e^{nx} = +\infty$,

så integralet divergerer åpenbart da. For $n = 0$ har vi

$$\lim_{x\to\infty} e^{nx} = \lim_{x\to\infty} e^{0} = \lim_{x\to\infty} 1 = 1,$$

så integralet divergerer for $n=0$ også. For $n<0$ får vi

$$\int_0^\infty e^{nx}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{nx}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{n}e^{nx}\right]_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{n}e^{nb} - \frac{1}{n}\cdot e^{0}\right] = -\frac{1}{n} = \frac{1}{|n|}.$$

$e^{nb} \to 0$ fordi $n<0$

Så integralet konvergerer for $n<0$. $\boxed{D}$

Oppgave 11

a)

$$M\cdot(-M) = \begin{array}{cc|cc} & & 0 & 2 \\ & & -\frac{1}{2} & 0 \\ \hline 0 & -2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ergo er M inverterbar, og $M^{-1} = -M$.

b) $\det M = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = 0 - (-2)\cdot\frac{1}{2} = \underline{\underline{1}}$

Vi har $M^3 = (-M)\cdot[M\cdot(-M)] \overset{a)}{=} -M\cdot I = -M \overset{a)}{=} M^{-1}$;

så $M^4 = M\cdot M^3 = M\cdot M^{-1} = I$. Ergo $\underline{\underline{n=4}}$

Oppgave 12

a) $$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{1}{(\tan^2 u+1)^2}\cdot\frac{1}{\cos^2 u}\,du$$

$u = \arctan x$ gir $x = \tan u$

$\frac{dx}{du} = \frac{1}{\cos^2 u}$, $dx = \frac{1}{\cos^2 u}\,du$

$$= \int (\cos^2 u)^2\cdot\frac{1}{\cos^2 u}\,du = \int \cos^2 u\,du.$$

$\tan^2 u + 1 = \frac{\sin^2 u}{\cos^2 u} + 1 = \frac{1}{\cos^2 u}\left[\sin^2 u + \cos^2 u\right] = \frac{1}{\cos^2 u}$

b) Vi har

$$(x^2+9)^2 = \left(\frac{x^2}{9}+1\right)^2 \cdot 9^2 = 81 \cdot \left[\left(\frac{x}{3}\right)^2+1\right]^2$$

så

$$\int \frac{dx}{(x^2+9)^2} = \frac{1}{81}\int \frac{3}{(v^2+1)^2}\,dv = \frac{1}{27}\int \cos^2 u\,du$$

$\boxed{v = \frac{x}{3} \text{ gir } dx = 3\,dv}$ $\boxed{\text{a) med } u = \arctan v}$

Videre: $\cos 2u = 2\cos^2 u - 1$ gir $\cos^2 u = \frac{1}{2}\cos 2u + \frac{1}{2}$.

Ergo

$$\int \frac{1}{(x^2+9)^2}\,dx = \frac{1}{54}\int (\cos 2u + 1)\,du$$

$$= \frac{1}{54}\left[\frac{1}{2}\sin 2u + u\right] + C$$

$$= \frac{1}{108}\sin\left[2\arctan\frac{x}{3}\right] + \frac{1}{54}\arctan\frac{x}{3} + C$$

(Første ledd kan forenkles til $\frac{1}{54}\frac{3x}{x^2+9}$, men det kreves ikke.)

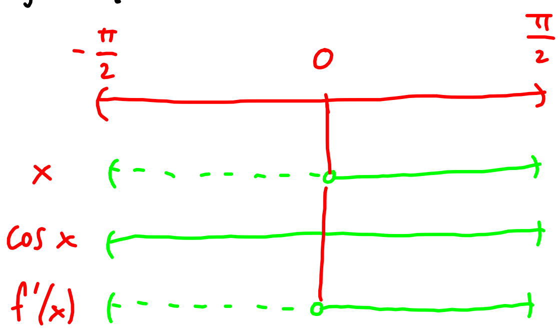
Oppgave 13

a) Ved fundamentalteoremet og kjerneregelen er

$$f'(x) = \arcsin(\sin x) \cdot \cos x = x \cdot \cos x$$

for alle $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

b) Fortegnsskjema for $f'(x)$:



Altså: f avtar på $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ og vokser på $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Globalt minimumspunkt $x = 0$.

c) $$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\int_0^{\sin x} \arcsin t \, dt}{x^2}$$

$$\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x \to 0} \frac{x \cos x}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

$= g(0)$, ergo er g kontinuerlig i $x = 0$.