

**Matematisk analyse**

**og lineær algebra**

**Foreløpig versjon, høsten 2013**



Arne Hole

---

# Matematisk analyse og lineær algebra

---

Foreløpig versjon, høsten 2013

©Arne Hole 2013

Det må ikke kopieres fra denne boken i strid med åndsverkloven eller i strid med avtaler om kopiering inngått med Kopinor, interesseorgan for rettighetshavere til åndsverk.

Forfatteren har mottatt støtte fra Faglitterært fond til andre bøker som deler av denne boken bygger på.

Henvendelser om boken kan rettes til  
Arne Hole  
Lillevannsveien 81 E  
0788 Oslo  
E-post: [Arne.Hole@ils.uio.no](mailto:Arne.Hole@ils.uio.no)

## Forord

Denne boken er skrevet som en direkte fortsettelse av *Matematikk i praksis* (heretter MIP), 6. utgave (Universitetsforlaget 2013). Boken kan imidlertid også, med litt tilpasninger, leses på andre grunnlag. De første kapitlene inneholder en del stoff som kompletterer og fordyper fremstillingen i MIP. Blant annet gir jeg noen beviser som MIP utelater.

Som tittelen angir, er bokens tema matematisk analyse og lineær algebra. *Matematisk analyse*, eller bare *analyse*, brukes som betegnelse på den delen av matematikken der *grensebegrepet* står sentralt. Grenser spiller en underliggende rolle i de fleste av denne bokens kapitler. F.eks. ligger de til grunn for begrepene derivasjon og integrasjon. *Algebra* brukes som betegnelse på matematikk som dreier seg om studium av ulike regneoperasjoner og deres egenskaper. For eksempel kan man sette opp algebraiske lover for addisjon av hele tall. Under algebraen hører teori for løsning av diverse typer *likninger*. Fagfeltet *lineær algebra* har sine historiske røtter i teori for såkalte *lineære* likninger og likningssystemer. Feltet inkluderer også ymse geometrisk preget teori som har sammenheng med lineære likningssystemer, for eksempel *vektorregning*, teori for *plan* og *rette linjer*, og så videre.

## Hvordan lese boken

Boken er skrevet for å kunne leses på ulike nivåer. Stoff jeg tror er spesielt vanskelig, er merket

\*

Enda vanskeligere stoff er merket \*\*, og det aller vanskeligste er merket \*\*\*. Generelt kan du hoppe over stjernemerket stoff uten å miste tråden.

Som hjelpemiddel når du leser boken bør du ha en kalkulator. I tillegg til å kunne håndtere de vanlige regningsartene, må den ha taster for funksjonene  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\tan$ ,  $\ln$  og deres inverse. Derimot er det ikke noen nødvendighet at den har grafisk vindu.

Du kan ikke regne med å lese denne boken som en roman. En god tilnæringsmåte er en rett, hard stol ved et bord, med blokk og blyant ved siden av boken. Prøv å *skrive* mye når du leser. Gjennomfør regninger som gjøres i teksten for deg selv på arket. Ofte mangler noen mellomregninger, og disse må du da prøve å fylle inn selv.

Til så godt som alle seksjonene finner du oppgaver. Mange av disse oppgavene er ikke der for å teste om du har forstått teksten foran, men derimot for å hjelpe deg å forstå den. Uansett hvor samvittighetsfullt og sakte du arbeider deg fremover, vil du sikkert komme til punkter hvor du står fast. Kikk da på oppgavene i slutten av seksjonen, og se om de hjelper. De fleste kapitler avsluttes med en samling blandede oppgaver til kapitlet.

## Notasjon

Bokstaver brukes mye i matematisk notasjon. Bokstavene brukes til å uttrykke lovmessigheter, som navn på spesielle objekter (f.eks. tall), som “ukjente” i likninger og så videre. For eksempel kan vi uttrykke en lovmessighet som gjelder for multiplikasjon av tall ved å skrive at “ $a \cdot b = b \cdot a$  for alle tall  $a$  og  $b$ ”. Meningen er da at utsagnet  $a \cdot b = b \cdot a$  blir sant uansett hvilke tall du setter inn for  $a$  og  $b$ . For eksempel er  $5 \cdot 4 = 4 \cdot 5$ . Når man skal uttrykke matematikk ved bokstaver, er det fint å ha så mange bokstaver av “forskjellig type” som mulig å velge blant. Derfor brukes også det *greske alfabetet* til å variere med:

$\alpha$ A alfa	$\eta$ H eta	$\nu$ N ny	$\tau$ T tau
$\beta$ B beta	$\theta$ $\Theta$ theta	$\xi$ $\Xi$ ksi	$\upsilon$ $\Upsilon$ ypsilon
$\gamma$ $\Gamma$ gamma	$\iota$ I iota	$\omicron$ O omikron	$\phi$ $\Phi$ phi
$\delta$ $\Delta$ delta	$\kappa$ $K$ kappa	$\pi$ $\Pi$ pi	$\chi$ X kji
$\epsilon$ E epsilon	$\lambda$ $\Lambda$ lambda	$\rho$ P rho	$\psi$ $\Psi$ psi
$\zeta$ Z zeta	$\mu$ M my	$\sigma$ $\Sigma$ sigma	$\omega$ $\Omega$ omega

Loven “ $a \cdot b = b \cdot a$  for alle tall  $a$  og  $b$ ” kan like gjerne skrives “ $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$  for alle tall  $\alpha$  og  $\beta$ ”, meningsinnholdet er nøyaktig det samme.

Jeg bruker ikke den norske “desimalkomma”-skrivemåten. Isteden bruker jeg *desimalpunkt*, som på engelsk. Jeg skriver altså 5.3 (kan leses “fem punkt tre”) istedenfor 5,3. Med den norske skrivemåten blir f.eks. punktet (5,3, 2,1) i planet skrevet (5,3, 2,1), og det gir tvetydighet.

Noen forkortelser jeg bruker er “dvs.” (det vil si), “mhp.” (med hensyn på), “osv.” (og så videre), “etc.” (et cetera, omtrent samme som “osv.”), “f.eks. (for eksempel), “jfr.” (jamfør), “pr. definisjon” (per definisjon, betyr at noe gjelder som direkte konsekvens av den aktuelle definisjonen).

Rent matematikkfaglig er notasjonen i denne boken standard, med ett unntak. Jeg bruker skrivemåten

$$f; A \rightarrow B$$

til å markere at  $f$  er en funksjon med definisjonsmengde *inneholdt* i mengden  $A$  og verdimengde inneholdt i mengden  $B$ . Ofte er denne skrivemåten mer praktisk enn den vanlige

$$f : A \rightarrow B,$$

som betyr at  $f$  har delmengde *lik*  $A$  og verdimengde innholdt i  $B$ . Begge disse skrivemåtene introduseres i seksjon 2.2.

Jeg refererer til oppgaver ved å angi seksjonsnummer etterfulgt av oppgavenummer. Oppgave 2.8.3 er altså oppgave 3 i seksjon 2.8. Nøyaktig på samme måte er det med teoremer, definisjoner og beviser. Oppgavene i de blandede samlingene som finnes ved slutten av kapitlene, har egne seksjonsnumre i referansene. Eksempel: Kapittel 2 har 15 ordinære seksjoner 2.1 til 2.15, og samlingen med blandede oppgaver bakerst i kapittel 2 er da “seksjon 2.16”. Med “oppgave 2.16.5” menes dermed oppgave 5 i samlingen med blandede oppgaver til kapittel 2. Avslutningen av beviser og eksempler er markert med

en rød firkant: ■ . Noen andre småting: Symbolet " $\neq$ " betyr "er ikke lik", og symbolet " $\stackrel{\text{def}}{=}$ " betyr "er definert lik". Tall ( gjerne symbolisert ved bokstaver) omtales av og til som "konstanter", "parametre" og "koeffisienter", avhengig av sammenhengen.

## Om dette eksemplaret av boken

Eksemplaret du nå leser i, er ikke ferdig korrekturlest. Det mangler også fasit til enkelte oppgaver, mest i de siste kapitlene. Jeg er takknemlig for alle rapporter om feil og mangler, forslag til forbedringer, eller forslag til stoff jeg burde ta med. Send for eksempel e-post til [Arne.Hole@ils.uio.no](mailto:Arne.Hole@ils.uio.no).

Oslo, august 2013  
Arne H.

# Innhold

## **1. Grunlagsstoff . . . . . 1**

- 1.1 Innledning: Matematiske bevis 2
- 1.2 Det reelle tallsystemet 3
- 1.3 Regning med reelle tall 6
- 1.4 Røtter 10
- 1.5 Plangeometri 12
- 1.6 Funksjoner 16
- 1.7 Grenser og kontinuitet 20
- 1.8 Derivasjon 26
- 1.9 Integrasjon 33
- 1.10 Numerisk integrasjon 39
- 1.11 Lengde av grafer 43
- 1.12 Anvendelse: Sirkler 45
- 1.13 Lineær algebra 48
- 1.14 Bevis for resten av grenselovene \* 61

## **2. Diverse temaer . . . . . 63**

- 2.1 Kombinatorikk 64
- 2.2 Sannsynligheter 68
- 2.3 Pascals trekant og binomialformelen 72
- 2.4 Endelige geometriske rekker 74
- 2.5 Hyperbolske funksjoner 76
- 2.6 Inverse hyperbolske funksjoner 78
- 2.7 l'Hôpitals regel 80
- 2.8 Direkte bruk av definisjonen på den deriverte 84
- 2.9 Skråasymptoter 86
- 2.10 Newtons metode 88
- 2.11 Koblede hastigheter 89
- 2.12 Uekte integraler 90
- 2.13 Ellipser, parabler og hyperbler 94
- 2.14 Geometriske egenskaper ved kjeglesnittene 98

## **3. Integrasjonsteknikker . . . . . 105**

- 3.1 Introduksjon til integrasjonsteknikker 106
- 3.2 Trigonometriske integraler 108

- 3.3 Trigonometriske substitusjoner 110
- 3.4 Integraler med annengradsuttrykk 112
- 3.5 Delbrøkkoppspalting 114
- 3.6 Rasjonaliserende substitusjoner 117

## **4. Rekker . . . . . 121**

- 4.1 Følger 122
- 4.2 Generelt om rekker 124
- 4.3 Konvergenstester for rekker 126
- 4.4 Taylorrekker og Taylorpolynomer 136
- 4.5 Potensrekker 144
- 4.6 Triksing med potensrekker 146
- 4.7 Summering av rekker 152
- 4.8 Teorien bak leddvis derivasjon og integrasjon \* 154

## **5. Koordinatsystemer og beskrivelser . . . . . 161**

- 5.1 Polarkoordinater 162
- 5.2 Noen annengradsflater i rommet 165
- 5.3 Sylinderkoordinater og kulekoordinater 168
- 5.4 Omegner og åpne mengder 170
- 5.5 Generelt om koordinatsystemer 173
- 5.6 Bevis for kompakthetsteoremet \* 177

## **6. Funksjoner av flere variable . . . . . 179**

- 6.1 Introduksjon 180
- 6.2 Grenser og kontinuitet 180
- 6.3 Ekstremalpunkter 182
- 6.4 Partielle deriverte 183
- 6.5 Vektorfunksjoner 185
- 6.6 Kjerneregelen. Inverse funksjoner 193
- 6.7 Kurver 196
- 6.8 Differensialgeometri for kurver 199
- 6.9 Flater 205
- 6.10 Gradienter og retningsderiverte 211
- 6.11 Implisitt definerte funksjoner 214



**7. Integrasjon av funksjoner med flere variable . . . . . 221**

- 7.1 Teori for multiple integraler 222
- 7.2 Dobbelintegraler 232
- 7.3 Trippelintegraler 240
- 7.4 Kurveintegraler 247
- 7.5 Flateintegraler 250
- 7.6 Fubinis teorem og koordinatskifteteoremet \* 254
- 7.7 Uavhengighet av parametrisering \*\* 257

**8. Vektoranalyse . . . . . 263**

- 8.1 Vektorfelder 264
- 8.2 Greens teorem 272
- 8.3 Divergensteoremet 277
- 8.4 Stokes' teorem 283
- 8.5 Konservative vektorfelder 288

**9. Reelle vektorrom . . . . . 297**

- 9.1 Aksiomatisering av reelle vektorrom 298
- 9.2 Lineærtransformasjoner 306
- 9.3 Kjerne, rekkevidde og inverse 309
- 9.4 Basiser og koordinatvektorer 316
- 9.5 Overgangsmatriser 324
- 9.6 Egenverdier og egenrom 326
- 9.7 Similære matriser 330
- 9.8 Diagonalisering 332
- 9.9 Anvendelse: Lineære difflikningssystemer 337

- 9.10 Anvendelse: Lineære differensiallikninger 344

**10. Reelle indreproduktrom . . . . . 347**

- 10.1 Indreprodukter 348
- 10.2 Gram-Schmidt-prosessen 352
- 10.3 Projeksjoner 354
- 10.4 Symmetriske lineærtransformasjoner 362
- 10.5 Ortogonale lineærtransformasjoner 364
- 10.6 Anvendelse: Selvmotsigende likningssystemer 370
- 10.7 Anvendelse: Minste kvadraters metode 372
- 10.8 Anvendelse: Kvadratiske former 374

**11. Kompleks lineær algebra . . . . . 381**

- 11.1 Komplekse vektorrom 382
- 11.2 Komplekse indreproduktrom 386
- 11.3 Hermitiske og unitære transformasjoner 391
- 11.4 Adjungerte og normale transformasjoner 399
- 11.5 Anvendelse: Komplekse difflikningssystemer 404
- 11.6 Bevis for algebraens fundamentalteorem \* 407

**Appendix: Tre vanskelige bevis \*\*\* . . . . . 409****Fasit . . . . . 416****Stikkord . . . . . 423**



# Kapittel 1

## Grunnlagsstoff

---

*Dette kapitlet bygger på kapitlene 1–7 og 10 fra MIP.*

---

## 1.1 Innledning: Matematiske bevis

---

Formelt sett består matematisk teori av tre typer byggeklosser, nemlig *definisjoner*, *teoremer* og *beviser*. Teoremer kalles også *setninger*, *lover* eller *resultater*. *Definisjonene* innfører ny terminologi, de beskriver deg matematiske språket. Det gir ingen mening å bevise en definisjon, for definisjonen forteller bare om språklige og notasjonsmessige *valg* vi gjør. *Teoremene* derimot representerer det matematiske "innholdet" i teorien, og til hvert av dem trengs et bevis. Beviset gir kort og godt en begrunnelse for at teoremet er riktig, ut fra de definisjoner som er gjort og tidligere teoremer. Et **korollar** er et teorem som følger "lett" fra et forutgående teorem.

Blar du fremover, vil du se diverse ting som er merket "Definisjon" eller "Teorem" eller "Bevis". Imidlertid er ikke alle forekomstene merket på denne måten. Teksten ellers inneholder små definisjoner, teoremer og beviser rundt omkring ellers også; vi innfører begreper og gjør resonnementer hele veien. Prøv å ha et bevisst forhold til hva som er hva når du arbeider med teksten.

Matematiske bevis kan basere seg på flere ulike metoder. Her er noen populære kategorier:

- *Direkte bevis*. Her utleder man konklusjonen direkte fra forutsetningene. De fleste bevisene i boken er av denne typen.
- *Bevis ved motsigelse*. Her starter man med å anta at konklusjonen i teoremet *ikke* er sann. Hvis man så kan utlede noe som åpenbart er *galt* (en selvmotsigelse) fra dette utgangspunktet, kan man konkludere med at teoremet må være sant. Eksempler er bevisene for teorem 1.7.3, 1.7.5 og 9.3.7.
- *Kontrapositivt bevis*. Denne bevisteknikken kan brukes til å vise teoremer som sier ting av formatet "Hvis  $A$  er sant, så er  $B$  også sant". Her er  $A$  og  $B$  matematiske utsagn. Ideen er at istedet for å anta at  $A$  er sant og prøve å utlede  $B$  (direkte bevis), starter vi i et kontrapositivt bevis med å anta at  $B$  er *usant*. Hvis vi kan vise at  $A$  da *også* må være usant, har vi slått fast at  $B$  er sant i alle tilfeller der  $A$  er sant. Ergo er teoremet bevist. Et eksempel er beviset for teorem 10.0.0.
- *Induksjonsbevis*. Denne bevisteknikken tas opp i seksjon 10.0.0. Du finner eksempler på bruk av induksjon i bevisene for teorem 1.13.1 og 1.13.2.

### Moderne matematisk bevisstandard

Man forestiller seg gjerne et matematisk bevis som en *sikker* begrunnelse for noe. Men hva betyr egentlig "sikker"? Hvordan skal man skille et gyldig bevis fra et som ikke er gyldig? Røft sagt har den standarden for bevisførsel som brukes av matematikere idag, har vært enerådende i "vanlig" matematikk

i drøyt 100 år. I forrige århundre ble det utviklet en teoretisk overbygning (*matematisk logikk*) som kobler denne standarden til “mekaniske” beviser som kan sjekkes av datamaskiner. Vi kan ikke gå på detaljene i dette, men det er mitt håp at du etter å ha lest denne boken i alle fall vil ha fått en *viss* følelse for hva som skiller et moderne bevis fra en hvilken som helst annen “matematisk begrunnelse”. Alt som er merket “bevis” i denne boken, er i prinsippet moderne beviser eller skisser av slike. Andre, mer uformelle begrunnelser er merket “begrunnelse”. De uformelle begrunnelsene brukes til eksempler, tolkninger, forsmaker og teoretiske sidespor. Moderne matematiske beviser kalles også *stringente* beviser, og av og til også *formelle* beviser.

Merk at både moderne matematiske beviser og mer uformelle begrunnelser kan være direkte, kontrapositive og så videre. Inndelingen i bevistyper vi gjorde i forrige delavsnitt har ingenting å gjøre med hvorvidt beviset er et moderne bevis.

## Den aksiomatiske metode

Den moderne bevisstandard er uløselig knyttet til den såkalte *aksiomatiske metode*. Dette er en metode for matematisk teoribygging der man starter med et sett grunnleggende antakelser, såkalte aksiomer, som man antar at visse objekter har. Så utleder man flere egenskaper ved objektene på grunnlag av disse aksiomene, helt uavhengig av hvordan objektene ellers er, eller om de overhodet eksisterer. Vi skal komme tilbake til denne metoden sånn litt etterhvert, for eksempel har jeg en kommentar om den allerede i den siste oppgaven til neste seksjon.

Siden vi i denne boken bruker moderne bevisstandard i den teoretiske oppbygningen, vil alt vi gjør rimelig greit kunne innpasses i en strengt aksiomatisk oppbygning. Imidlertid skal vi ikke gjøre alle detaljene i dette, det bringer oss for langt avgårde i forhold bokens hovedsiktemål. Vi skal likevel bruke en eksplisitt aksiomatisk oppbygning i visse deler av boken, særlig de tre siste kapitlene.

## 1.2 Det reelle tallsystemet

---

Med et **reelt tall** menes et desimaltall. Også desimaltall med uendelig mange desimaler regnes som reelle tall. Et eksempel på et reelt tall er altså

$$-237.200622222\dots$$

På den annen side kan godt alle desimalene til tallet være 0. Hele tall godtas altså også som reelle tall. Siden noen reelle tall har uendelig mange desimaler, er det like greit å si at “offisielt” har *all* reelle tall uendelig mange desimaler.

Men hvis alle desimalene er 0 fra et visst punkt av, kan man selvsagt droppe å skrive dem. For eksempel

$$23.7890000\dots = 23.789$$

Så et reelt tall er etter dette et objekt bestående av følgende: Først et eventuelt minustegn, så et endelig antall sifre foran komma, så et desimalpunkt, og så en uendelig rekke desimaler (som kan være 0) etter desimalpunktet.

Reelle tall som inneholder en uendelig rekke repeterende 9-ere betraktes som like med de tallene man får ved å “avrunde oppover”, for eksempel

$$13.5499999\dots = 13.55$$

Reelle tall som ikke har noe minustegn og som ikke er 0, kalles *positive* tall. Reelle tall som *har* minustegn og ikke er 0 kalles *negative*. Vi regner 0 som verken positivt eller negativt. Mengden av alle reelle tall, som altså kort og godt er mengden av alle tall på tallinjen, skrives **R**.

Reelle tall som har bare nuller bak kommaet, kalles *hele* tall. Mengden av alle hele tall betegnes **Z**. Vi har

$$\mathbf{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

Positive hele tall kalles *naturlige*. Mengden av naturlige tall skrives **N**. Altså

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}.$$

Tallene 1, 3, 5, ... kalles **oddetall**, mens 2, 4, 6, ... kalles **partall** eller *jevne* tall. Med **absoluttverdien** til et reelt tall  $a$  menes  $a$  med evt. minustegn foran fjernet. Eksempler:  $|-2| = 2$ ,  $|17| = 17$ .

La nå  $a$  og  $b$  være to ulike, positive reelle tall. Vi sier at  $a$  er **større enn**  $b$  hvis  $a$  har et større siffer enn  $b$  på den første plassen (fra venstre) der de to er ulike. Alle positive tall regnes som større enn negative. Hvis  $a$  og  $b$  begge er negative, sier vi at  $a$  er større enn  $b$  hvis  $|b|$  er større enn  $|a|$ . At  $a$  er **mindre enn**  $b$ , betyr per definisjon at  $b$  er større enn  $a$ .

## Begrensninger

La  $U$  være en delmengde av **R**. Med en **øvre begrensning** for  $U$  menes et reelt tall som er større enn eller lik alle tallene i  $U$ . Med en **nedre begrensning** for  $U$  menes et reelt tall som er mindre enn eller lik alle tallene i  $U$ .

**Eksempel 1** La  $U = \langle -\infty, 4 \rangle$ . Da er både 5 og 4 øvre begrensninger for  $U$ , fordi alle tall  $x \in U$  oppfyller  $x \leq 5$  og  $x \leq 4$ . Derimot har  $U$  ingen nedre begrensning. ■

Hvis  $U$  har en øvre begrensning, kalles den **oppad begrenset**. Hvis  $U$  har en nedre begrensning, kalles den **nedad begrenset**. Hvis  $U$  er både oppad begrenset og nedad begrenset, kalles den **begrenset**.

### Definisjon 1 Supremum og infimum

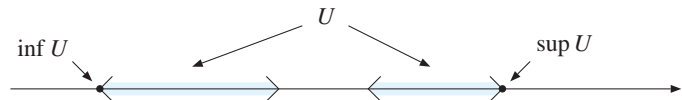
La  $U$  være en delmengde av  $\mathbf{R}$ . Vi definerer

$\sup U \stackrel{\text{def}}{=} \text{minste øvre begrensning for } U \text{ (hvis en slik fins)}$

$\inf U \stackrel{\text{def}}{=} \text{største nedre begrensning for } U \text{ (hvis en slik fins)}$

Tallet  $\sup U$  kalles **supremeum** til  $U$ , og  $\inf U$  kalles **infimum** til  $U$ .

Kort fortalt er  $\inf U$  punktet på tallinjen der  $U$  "begynner", og  $\sup U$  er punktet der  $U$  "slutter". Se figuren under.



**Eksempel 2** La  $U = \langle 0, 2 \rangle$ . Da er både 2, 5 og  $\pi$  øvre begrensninger for  $U$ , men  $\sup U = 2$ . Videre er 0 og  $-1$  begge nedre begrensninger for  $U$ , men  $\inf U = 0$ . Merk at her er  $\inf U \notin U$ , mens  $\sup U \in U$ . ■

### Omegner, åpne mengder etc.

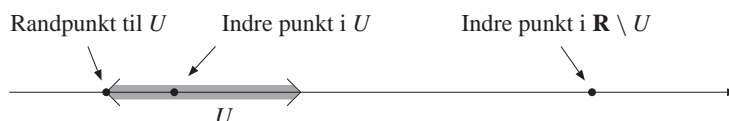
La  $x$  være et reelt tall. En delmengde  $U \subseteq \mathbf{R}$  kalles en **omegn** om  $x$  hvis  $U$  inneholder et intervall av typen  $\langle t, T \rangle$ , der  $t < x < T$ . For eksempel er  $U = [0, 1]$  en omegn om 0.8, for  $U$  inneholder intervallet  $\langle t, T \rangle = \langle 0.7, 0.9 \rangle$ . Se neste figur. Vi kunne også brukt  $\langle t, T \rangle = \langle 0, 1 \rangle$ .



La  $U \subseteq \mathbf{R}$ . Et punkt  $x \in U$  kalles et **indre punkt** i  $U$  hvis  $U$  er en omegn om  $x$ . Mengden av indre punkter i  $U$  kalles **det indre** av  $U$ , og skrives  $U^*$ . Hvis

$$U = U^*,$$

kalles  $U$  en **åpen** mengde. Hvis komplementet  $\mathbf{R} \setminus U$  er åpent, kalles  $U$  **lukket**. Et punkt  $x \in \mathbf{R}$  kalles et **randpunkt** til  $U$  dersom  $x$  verken ligger i det indre av  $U$  eller i det indre av  $\mathbf{R} \setminus U$ . Mengden av randpunkter til  $U$  skrives  $\partial U$ , og kalles **randen** til  $U$ . Se figur under.



**Eksempel 3** Intervaller på formen  $\langle a, b \rangle$ ,  $\langle a, \infty \rangle$  og  $\langle -\infty, a \rangle$  er åpne mengder. For *ethvert* punkt  $x$  i disse intervallene kan du nemlig finne et lite intervall  $\langle t, T \rangle$  rundt  $x$  som også ligger innenfor. Se figuren øverst på siden. Intervaller på formen  $[a, b]$  er *lukkede* mengder. I dette tilfellet er nemlig komplementet  $\langle -\infty, a \rangle \cup \langle b, \infty \rangle$  en åpen mengde. ■

Et punkt  $x \in U$  kalles **isolert** i  $U$  hvis det fins en omegn om  $x$  som ikke inneholder andre punkter fra  $U$  enn  $x$  selv. Et punkt  $x \in \mathbf{R}$  kalles et **opphevningspunkt** for  $U$  hvis alle omegner om  $x$  inneholder minst ett punkt fra  $U \setminus \{x\}$ . Oppgavene under illustrerer disse begrepene.

## 1.2 Oppgaver

1. Skriv følgende mengder som intervaller:

- a)  $\{x \in \mathbf{R} \mid 2 < x \leq 5\}$       b)  $\{x \in \mathbf{R} \mid x \leq 10\}$

2. La  $U = [3, 7) \cup (9, 12]$ . Vis at  $U$  er begrenset, og finn  $\inf U$  og  $\sup U$ .

3. La  $U = \langle 0, 1 \rangle$ . Konstruer  $\sup U$  desimal for desimal ved å bruke metoden i beviset for teorem 1.1. Angi  $\sup U$  med den desimalutviklingen dette gir, og kommenter svaret.

4. La  $U = [0, 9) \cup \langle 10, 12 \rangle$ .

a) Tegn  $U$  på tallinjen. Er  $U$  en omegn om tallet 2? Begrunn svaret. Er  $U$  en omegn om 10?

b) Finn  $U^*$ ,  $\mathbf{R} \setminus U$  og  $\partial U$ . Er  $U$  en åpen mengde? Er den lukket?

5. Gi et eksempel på en mengde  $U \subseteq \mathbf{R}$  og et punkt  $x \in \mathbf{R}$  slik at  $x$  er et opphevningspunkt for  $U$ , og  $x \notin U$ . Gi også et eksempel på en mengde som har et isolert punkt.

## 1.3 Regning med reelle tall

Vi tar definisjonene av de to regneoperasjonene **addisjon** og **multiplikasjon** for gitt her i hovedteksten. Definisjonene av de to regneoperasjonene gjennomgås imidlertid i seksjonen med diverse oppgaver ved slutten av dette kapitlet, se side 15. Vi har så følgende:



**Grunnleggende egenskaper ved det reelle tallsystemet** Følgende regler gjelder for tallsystemet  $\mathbf{R}$  av reelle tall:

1. For alle  $a, b \in \mathbf{R}$  er  $a + b = b + a$  og  $ab = ba$ .
2. For alle  $a, b, c \in \mathbf{R}$  er  $a + (b + c) = (a + b) + c$  og  $a(bc) = (ab)c$ .
3. For alle  $a, b, c \in \mathbf{R}$  er  $a(b + c) = ab + ac$ .
4. Der fins to elementer 0 og 1 i mengden  $\mathbf{R}$  slik at  $a + 0 = a$  og  $a \cdot 1 = a$  for alle  $a \in \mathbf{R}$ .
5. For ethvert tall  $a \in \mathbf{R}$  fins det et tall  $b \in \mathbf{R}$  slik at  $a + b = 0$ .
6. For ethvert tall  $a \in \mathbf{R}$  slik at  $a \neq 0$  fins det et tall  $b \in \mathbf{R}$  slik at  $ab = 1$ .
7. Hvis  $a, b$  og  $c$  er reelle tall slik at  $a < b$  og  $b < c$ , så er  $a < c$ .
8. Hvis  $a$  og  $b$  er reelle tall, så gjelder én av følgende tre muligheter: Enten er  $a < b$ , eller så er  $a = b$ , eller så er  $b < a$ .
9. Hvis  $a$  og  $b$  er reelle tall slik at  $a < b$ , så er  $a + c < b + c$  for alle reelle tall  $c$ .
10. Hvis  $a$  og  $b$  er reelle tall slik at  $a < b$ , så er  $ac < bc$  for alle reelle tall  $c > 0$ .
11. (Kompletthetsprinsippet) Hvis  $U$  er en ikke-tom, begrenset delmengde av  $\mathbf{R}$ , så eksisterer både  $\sup U$  og  $\inf U$ .

De fleste av disse er egenskaper som er vanlige å bruke når man regner med reelle tall. Unntaket er den siste regelen, som ikke har noe direkte med “regning” å gjøre. Denne regelen kalles **kompletthetsprinsippet**, fordi den i en viss forstand sier at den reelle tallinjen er “komplett”, uten “hull”. Tenk på hva den sier: Hvis du har en begrenset, ikke-tom delmengde av  $\mathbf{R}$ , så er det intuitivt rimelig at denne mengden må “begynne” og “slutte” et eller annet sted på tallinjen. Begynnelsen blir da  $\inf U$ , mens slutten bli  $\sup U$ . Kompletthetsprinsippet garanterer oss at det virkelig *ligger* noen tall på tallinjen som markerer begynnelsen og slutten på mengden  $U$ , altså at tallinjen ikke har noe hull akkurat der disse skulle ligget. Faktum er at kompletthetsprinsippet er en svært viktig egenskap ved den reelle tallmengden; det er blant annet den eneste sentrale egenskapen som skiller denne tallmengden fra mengden av såkalte *rasjonale* tall (se seksjon 10.0.0).

Ut fra vår konkrete oppfatning av reelle tall som desimaltall, kan man utlede både kompletthetsprinsippet og de øvrige 10 reglene i boksen. Dette blir tatt opp i seksjonen med utfyllende oppgaver ved slutten av dette kapitlet, se side 15.

Som du ser, har jeg ikke markert boksen side 7 som et teorem, til tross for at jeg nettopp skrev den er noe man kan “utlede”. Grunnen er at man i formell

teori vanligvis tar disse 11 egenskapene som *aksiomer*, altså *grunnleggende antakelser*, for det reelle tallsystemet. Teorien *starter* med disse antakelsene. Det viser seg nemlig at man på grunnlag av disse 11 antakelsene alene kan utlede *alle* egenskaper ved reelle tall, som for eksempel at reelle tall kan skrives som desimaltall! For å gi deg et glimt av hvordan slik teoribygging arter seg, skal jeg nå bevise et lite teorem som kan inngå i starten av oppbygningen.

### Teorem 1 Forkortningsloven for addisjon

Hvis  $a, b, c$  er reelle tall slik at  $a + c = b + c$ , så er  $a = b$ .

**Bevis** Ved regel (5) fins det et tall  $d$  slik at  $c + d = 0$ . Hvis vi antar at  $a + c = b + c$ , må vi også ha

$$(a + c) + d = (b + c) + d.$$

Ved regel (4) kan vi skrive dette  $a + (c + d) = b + (c + d)$ , og siden  $c + d = 0$  følger at  $a + 0 = b + 0$ . Ved regel 4 er imidlertid  $a + 0 = a$  og  $b + 0 = b$ , så vi får  $a = b$ . ■

Beviset ovenfor kan virke pedantisk. Men i mange sammenhenger er det en fordel å vite at vi *kan* utlede alle viktige egenskaper for reelle tall på denne måten — altså ved kun å bygge mekanisk på reglene i boksen side 7. For eksempel får vi bruk for det i kapittel 6.

I den aksiomatiske oppbygningen må også alle nye *definisjoner* tilbakeføres til de to grunnleggende operasjonene pluss og gange, og egenskapene i boksen. Eksempler:

- Ifølge aksiom 5 finnes det til hvert tall  $a$  et unikt tall  $b$  slik at  $a + b = 0$ . Man kan vise (oppgave 1.3.3) at dette tallet  $b$  er *unikt*. Dermed kan vi *definere* det “motsatte” tallet  $-a$  til  $a$  ved å la  $-a$  være dette tallet  $b$ .

Dermed har vi  $a + (-a) = 0$ , som seg hør og bør. Tallet  $(-a)$  kalles ofte den *additive inversen* til  $a$ . På tilsvarende måte kan vi definere en *multiplikativ invers* til et tall  $a \neq 0$  ved å bruke aksiom 6:

- Ifølge aksiom 6 finnes det til hvert tall  $a \neq 0$  et unikt tall  $b$  slik at  $ab = 0$ . Man kan vise (oppgave 1.3.4) at dette tallet  $b$  er *unikt*. Dermed kan vi *definere* tallet  $a^{-1}$  som dette tallet  $b$ .

Da har vi  $a \cdot a^{-1} = 1$ . Videre kan vi nå definere subtraksjon og divisjon av reelle tall ved å sette

$$a - b \stackrel{\text{def}}{=} a + (-b) \quad \text{og} \quad a/b \stackrel{\text{def}}{=} a \cdot a^{-1},$$

der vi i definisjonen av divisjon forutsetter  $b \neq 0$ . I stedet for  $a : b$  skriver vi vanligvis  $a/b$  eller  $\frac{a}{b}$ , disse uttrykkene kalles **brøker**.

På grunn av resultatene (3) og (4) i boksen trenger vi ikke skrive parenteser i regnestykker som består av flere addisjoner eller flere multiplikasjoner etter hverandre; om  $abc$  regnes ut som  $a(bc)$  eller  $(ab)c$  spiller ingen rolle. Videre kan vi innføre **potensuttrykk** ved å si at hvis  $a$  være et reelt tall og  $n \geq 1$  er et helt tall, definerer vi

$$a^n \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ ganger}} \quad a^0 \stackrel{\text{def}}{=} 1 \quad a^{-n} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{a^n}$$

der vi forutsetter  $a \neq 0$  i definisjonen til høyre. Uttrykket  $a^n$  kalles en **potens** med grunntall  $a$  og eksponent  $n$ . Uttrykket leses “ $a$  opphøyd i  $n$ -te”. Uttrykket  $a^2$  kalles ofte *kvadratet* av  $a$ , eller “ $a$  kvadrert”.

For å slippe å skrive så mye parenteser, har man blitt enige om at operasjonen  $a^b$  “binder” sterkere enn  $ab$  og  $a/b$ , mens  $ab$  og  $a/b$  binder sterkere enn  $a + b$  og  $a - b$ . Så  $a + bc$  skal oppfattes som  $a + (bc)$ , for eksempel.

Etter å ha bevist noen flere småregler, kan man komme frem til følgende teorem. Jeg nummererer punktene i det slik at de fortsetter etter de 11 punktene i boksen side 7.

### Teorem 2 Regneregler for reelle tall

Følgende regler gjelder for alle reelle tall  $a, b, c, d$  og hele tall  $n, m$ . Tall som det deles på, forutsettes å være forskjellige fra 0.

12. (Minusregler)  $-(-a) = a$      $a(b - c) = ab - ac$
13. (Minusregler)  $a - (b + c) = a - b - c$      $a - (b - c) = a - b + c$
14. (Faktorregel) Hvis  $ab = 0$ , så er  $a = 0$  eller  $b = 0$
15. (Trekantulikheten)  $|a + b| \leq |a| + |b|$
16. (Eksponenter)  $a^n a^m = a^{n+m}$      $(a^n)^m = a^{nm}$      $(ab)^n = a^n b^n$
17. (Eksponenter)  $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$      $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
18. (Brøker)  $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$      $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$
19. (Brøker)  $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$      $\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd}$      $\frac{a}{c} \cdot b = \frac{ab}{c}$

De aksiomatiske bevisene for disse reglene er tema for oppgavene 1.3.2–1.3.17 i slutten av seksjonen. Jeg anbefaler deg å gå gjennom reglene og prøve å overbevise deg om at de er riktige når  $a, b$  og  $c$  er hele tall. Velg da konkrete tall og sett inn.

Ut fra boksen side 7 kan man som nevnt utlede hele teorien for reelle tall. Blant annet må man da vise at hvert reelt tall kan representeres som et

desimaltall, og det trengs en ganske lang rekke av resultater før man kommer så langt! Vi skal imidlertid ikke bry oss med å gjøre alt dette. For våre formål er det greit å basere seg direkte på den konkrete definisjonen av  $\mathbf{R}$  som mengden av alle desimaltall. Når vi gjør det slik, gir reglene (1)–(19) fra denne seksjonen alt vi trenger av grunnleggende regneregler. Faktum er nemlig at *all* vanlig regning med reelle tall kan tilbakeføres ganske direkte til reglene (1)–(19).

### 1.3 Oppgaver

1. Bruk trekantulikheten til å begrunne at vi for alle reelle tall  $a$  og  $b$  har

$$\left| |a| - |b| \right| \leq |a - b|$$

#### Aksiomatiske bevis for regneregler \*

Vi skal her blant annet se hvordan reglene i teorem 1.3.2 kan bevises på grunnlag av “aksiomene” i boksen side 7 samt teorem 1.3.1.

2. Vis at  $a \cdot 0 = 0$  for alle reelle tall  $a$ . (Hint: Skriv  $a + 0 = a = a \cdot 1 = a \cdot (1 + 0) = a \cdot 1 + a \cdot 0$ . Hvilke aksiomer bruker vi her?)
3. Vis at for hvert reelt tall  $a$  fins nøyaktig ett reelt tall  $b$  slik at  $a + b = 0$ . (Hint: Anta at  $a + b = 0$  og  $a + c = 0$ .) Vi definerer dette tallet  $b$  som  $-a$ .
4. Vis at for hvert reelt tall  $a \neq 0$  fins nøyaktig ett reelt tall  $b$  slik at  $ab = 1$ . (Hint: Anta at  $ab = 1$  og  $ac = 1$ .) Vi definerer tallet  $b$  som  $a^{-1}$ .
5. Vis at  $-(-a) = a$  for alle hvert reelt tall  $a$ .
6. Vis at  $(-a)b = -(ab)$  for alle reelle tall  $a, b$ .
7. Vis at  $(-a)(-b) = ab$  for alle reelle tall  $a, b$ .
8. Vis at hvis  $a, b, c$  er reelle tall slik at  $ac = bc$  og  $c \neq 0$ , så er  $a = b$ .
9. Vis at hvis  $a$  og  $b$  er reelle tall slik at  $ab = 0$ , så er  $a = 0$  eller  $b = 0$ . (Hint: Anta at  $a \neq 0$  og at  $ab = 0$ . Vis at da må  $b = 0$ .)

10. Vis at  $(a^{-1})^{-1} = a$  for alle reelle tall  $a \neq 0$ .

11. Vis at  $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$  for alle reelle tall  $a \neq 0$  og  $b \neq 0$ .

12. Vi definerer  $a - b = a + (-b)$  for alle reelle tall  $a$  og  $b$ . Vis at følgende regler gjelder for alle reelle tall  $a, b, c$ .

a)  $a(b - c) = ab - ac$

b)  $a - (b + c) = a - b - c$

c)  $a - (b - c) = a - b + c$

13. Vi definerer  $a/b = ab^{-1}$  for alle reelle tall  $a$  og  $b$  slik at  $b \neq 0$ . Vis at hvis  $a, b, c, d$  er reelle tall slik at  $c \neq 0$  og  $d \neq 0$ , så er

a)  $\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd}$

b)  $\frac{ad}{cd} = \frac{a}{c}$

14. Vis at for alle reelle tall  $a, b$  og  $c$  slik at  $c \neq 0$  gjelder

a)  $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$

b)  $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$

15. Hvis  $a$  er et reelt tall, definerer vi absoluttverdien  $|a|$  som  $a$  hvis  $0 < a$  eller  $0 = a$ , og som  $-a$  ellers. Vis at for alle reelle tall  $a$  og  $b$  gjelder

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

16. Vis at at eksponentreglene i punkt (14) og (15) fra teorem 1.3.2 gjelder. (Egentlig trengs her en teknikk som kalles induksjonsbevis, se seksjon 1.0. Hvis du ikke kjenner til denne bevisteknikken, så kan du resonnerer litt mer uformelt.)

17. Systematiser resultatene fra de foregående oppgavene, og overbevis deg om at alle reglene i teorem 1.3.2 nå er bevist.

### 1.4 Røtter

Med en  $n$ 'te-rot av et reelt tall  $x$  menes et reelt tall  $t$  slik at  $t^n = x$ .

**Eksempel 1** 2 er en tredjeterot av 8, fordi  $2^3 = 8$ . ■

**Teorem 1 Unikhet av røtter**

Det fins alltid høyst én  $n$ 'te-rot av  $a$  som har samme fortegn som  $a$ . Denne  $n$ 'te roten skrives  $\sqrt[n]{a}$ .

**Bevis** Anta at  $b^n = c^n$ , der  $0 < b < c$ . Vi kan da skrive  $c = b + t$ , der  $t > 0$ . Dermed fås

$$c^n = (b + t)^n = b^n + [\text{positive ledd}]$$

ved utgangning av parenteser. Prøv  $n = 2$  og  $n = 3$ , så ser du det. Dermed er det umulig at  $b^n = c^n$ . På helt tilsvarende måte viser man at hvis  $c$  og  $d$  er ulike og begge negative, er  $c^n = d^n$  umulig. ■

Annenrøtter kalles vanligvis *kvadratrøtter*, og  $\sqrt[2]{a}$  skrives vanligvis  $\sqrt{a}$ . Men merk at kvadratrotten  $\sqrt{-4}$  ikke fins. Du finner nemlig ikke noe reelt tall  $b$  slik at  $b^2 = -4$ . Grunnen er at "minus gange minus er pluss". Mønsteret er angitt i neste teorem:

**Teorem 2 Eksistens av røtter**

Hvis  $n \geq 2$  er oddetall, fins  $\sqrt[n]{a}$  for alle reelle tall  $a$ .

Hvis  $n \geq 2$  er partall, fins  $\sqrt[n]{a}$  for alle tall  $a \geq 0$ , men *ikke* for  $a < 0$ .

**Bevis** Utsettes til seksjon 10.0.0. ■

**Teorem 3 Regneregler for røtter**

Følgende regneregler gjelder for alle  $a$ ,  $b$  og  $n$  slik at røttene som inngår er definert:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

**Bevis** Regnereglene (16) og (17) fra teorem 1.3.2 gir

$$\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = ab \qquad \left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n} = \frac{a}{b}.$$

Resultatet følger nå direkte fra unikhetssegenskapen i teorem 1.4.1. ■

Når man snakker om "kvadratrotten" til  $x$  uten noe mer forklaring, er det alltid underforstått at man mener  $\sqrt{x}$ , altså den positive kvadratrotten. Tilsvarende kaller man  $\sqrt[4]{x}$  for fjerderoten til  $x$ , etc.

## 1.5 Plangeometri

Med **planet** menes mengden  $\mathbf{R}^2$  definert ved

$$\mathbf{R}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{R}\}.$$

Med *produktet* av to mengder  $A$  og  $B$  mener man mer generelt mengden

$$A \times B \stackrel{\text{def}}{=} \{(a, b) \mid a \in A \text{ og } b \in B\}.$$

Med andre ord er  $\mathbf{R}^2$  det samme som produktet  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ . Et eksempel til:

Hvis  $A = [1, 3]$  og  $B = [1, 2]$

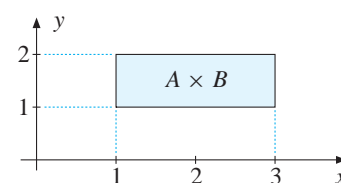
(lukkede intervaller i  $\mathbf{R}$ ),

så blir produktet  $A \times B$

mengden av alle punkter  $(x, y)$

slik at  $x \in [1, 3]$  og  $y \in [1, 2]$ .

Dette blir en delmengde av  $\mathbf{R}^2$ ,  
se figuren til høyre.



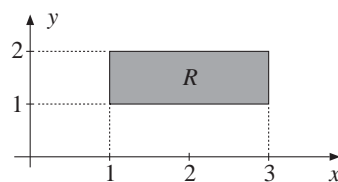
Med *avstanden* mellom punktene  $(x_1, y_1)$  og  $(x_2, y_2)$  i planet menes

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Denne definisjonen er inspirert av Pythagoras' setning for trekanter.

### Definisjon 1 Rektangel

Med et **rektangel** i planet  $\mathbf{R}^2$  menes en delmengde på formen  $R = [a, b] \times [c, d]$ , der  $a < b$  og  $c < d$  er reelle tall. Med *arealet* til rektanglet  $R$  menes produktet av sidelengdene, altså  $A = (b - a) \cdot (d - c)$ .



**Figur 1.5.2** Eksempel på rektangel

Et rektangel er med andre ord det samme som produktet av to begrensede, lukkede intervaller. Figur 1.5.2 viser rektanglet  $R = [1, 3] \times [1, 2]$ . Det består av alle punkter  $(x, y)$  slik at  $1 \leq x \leq 3$  og  $1 \leq y \leq 2$ . Arealet av dette rektanglet er  $A = (3 - 1) \cdot (2 - 1) = 2 \cdot 1 = 2$ .

## Om begrepene areal og volum

Vi har foreløpig kun definert begrepet **areal** for rektangler. Vi skal definere arealet av en mer generell delmengde av planet i seksjon 3.2. Den aller mest generelle arealdefinisjonen kommer vi til først i kapittel 13, side 468. Fra denne mest generelle definisjonen følger visse "intuitivt opplagte" egenskaper ved areal, såsom at

- Hvis  $U$  og  $V$  er disjunkte mengder slik at arealene til  $U$  og  $V$  er definert, så er arealet til  $U \cup V$  summen av arealene til  $U$  og  $V$ .

Akkurat dette følger av teorem 7.1.3, punkt (3), med  $f = 1$  innsatt. Men du trenger ikke bry deg om det nå. Inntil generelle definisjoner gis, vil ikke arealbegrepet bli brukt i den teoretiske oppbygningen i denne boken. Jeg vil imidlertid snakke om areal i *eksempler* som er der for å belyse annen teori. Vi vil da også ta for gitt visse intuitivt opplagte resultater om areal, såsom egenskapen nevnt ovenfor. Helt tilsvarende er det med begrepet **volum**. Dette skal vi ikke nærme oss formelt før i kapittel 11, og den generelle formalismen er i kapittel 13. En intuitiv forsmak er gitt i seksjon 3.8. Imidlertid skal vi i *eksempler* anta at vi vet at volumet av en “rettvinklet kasse” fås ved å gange sammen sidelengdene.

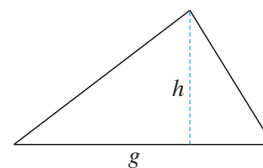
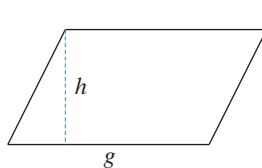
## Noen plane figurer

Vi skal nå studere en noen kjente figurer i planet. Stoffet om areal i denne delseksjonen er uformelt beskrevet og vil ikke bli brukt i den teoretiske oppbygningen. Det vil imidlertid være aktuelt i eksempler, oppgaver og tolkninger av teorien. I den presise arealformalismen vi senere skal utlede, vil arealformelene vi ser på kunne etableres som spesialtilfeller.

La oss begynne med begrepet rektangel. Slik vi definerte dette i sted, begrenset vi oss til “rektangler” som med sidekanter parallelle med koordinataksene. Disse rektanglene vil spille størst teoretisk rolle for oss, og derfor reserverer vi ordet rektangel for dem. Imidlertid vil man gjerne kunne snakke om rektangler som ligger “skjevt” også; disse kan vi offisielt kalle *rektangulære områder* i planet. Randen til et rektangulært område består av fire linjestykker  $L_1, \dots, L_4$ , der  $L_1$  og  $L_2$  står normalt på hverandre og har et felles endepunkt, der  $L_2$  og  $L_3$  står normalt på hverandre og har et felles endepunkt, der  $L_3$  og  $L_4$  står normalt på hverandre og har et felles endepunkt, og der  $L_4$  og  $L_1$  står normalt på hverandre og har et felles endepunkt. Arealet av det rektangulære området er produktet av lengdene til to sider som har et felles endepunkt. Hvis alle sidelengdene er like lange, kalles det rektangulære området for et *kvadrat*.

Et **parallelogram** kan beskrives på akkurat samme måte som et rektangel, bortsett fra at vi erstatter kravene om vinkelretthet med kravet om at  $L_1$  skal være parallell med  $L_3$ , og at  $L_2$  skal være parallell med  $L_4$ . Kaller vi en av sidene i parallelogrammet **grunnlinjen**, er arealet gitt ved  $A = gh$ , der  $g$  er lengden av grunnlinjen og  $h$  er høyden vinkelrett ned på grunnlinjen fra motsatt sidekant. Se figuren til venstre under.

Randen til *trekanter* er tre linjestykker  $L_1, L_2, L_3$ , der  $L_1$  og  $L_2$  har et felles endepunkt, der  $L_2$  og  $L_3$  har felles endepunkt, og der  $L_3$  og  $L_1$  har et felles endepunkt. Kaller vi en av sidene i trekanten for *grunnlinjen*, så er arealet av trekanten gitt ved  $A = \frac{1}{2}gh$ , der  $g$  er lengden av grunnlinjen og  $h$  er høyden vinkelrett ned på grunnlinjen fra det tredje hjørnet. Se figuren til høyre under.



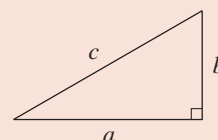
## Pythagoras' setning

Som avslutning på denne seksjonen skal vi se på **Pythagoras' setning**, som ble nevnt i forbindelse med definisjonen av avstand. Lengden av et linjestykke er definert som avstanden mellom endepunktene, og derfor gjelder Pythagoras' setning *pr. definisjon* når katetene i trekanten er parallelle med koordinataksene. Men setningen holder for alle trekanter, også de som ligger "skrått".

### Teorem 1 Pythagoras' setning

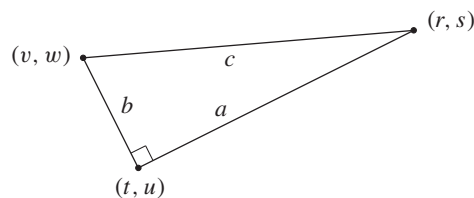
I en rettvinklet trekant med kateter  $a$ ,  $b$  og hypotenus  $c$  har vi

$$a^2 + b^2 = c^2.$$



**Bevis** Vi skal nå se på et bevis for Pythagoras' setning som er uavhengig av geometriske tolkninger. Riktignok bruker vi en figur, men den er der kun for å få oversikt over argumentet. I prinsippet kunne vi klart oss uten den.

Per definisjon er en trekant avgrenset av tre rette linestykker  $L_1$ ,  $L_2$  og  $L_3$ . Linjestykkene  $L_1$  og  $L_2$  skal ha et felles endepunkt, la oss kalle dette  $(t, u)$ . Videre skal linjestykkene  $L_2$  og  $L_3$  ha et felles endepunkt, la oss kalle det  $(r, s)$ . Til slutt skal  $L_3$  og  $L_1$  ha et felles endepunkt, la oss kalle dette  $(v, w)$ . Vi skal se på en *rettvinklet* trekant, og uten tap av generalitet kan vi da anta at linjestykkene  $L_1$  og  $L_2$  står vinkelrett på hverandre. (Er den rette vinkelen et annet sted, dørper vi om sidene.) La lengdene til  $L_1$ ,  $L_2$  og  $L_3$  være henholdsvis  $a$ ,  $b$  og  $c$ . Figuren nedenfor illustrerer oppsettet. Merk at trekanten er tegnet i generell, skrå posisjon.





Ved å bruke lengdedefinisjonen til å finne  $a$ ,  $b$  og  $c$ , får du at kravet

$$a^2 + b^2 = c^2$$

er ekvivalent med

$$u^2 + t^2 = su + rt + uw + tv - sw - rv. \quad (1)$$

La oss så se på stigningstallene til katetene:

$$\text{Stigningstall } a\text{-side: } s_1 = \frac{u - s}{t - r}$$

$$\text{Stigningstall } b\text{-side: } s_2 = \frac{u - w}{t - v}$$

At de to sidene er vinkelrette, betyr pr. definisjon at  $s_2 = -1/s_1$ . Se side 29. Setter du inn for  $s_1$  og  $s_2$ , får du nettopp kravet (1). ■

## 1.5 Oppgaver

### Egenskaper for reelle tall \*

Vi skal her se på hvordan man kan definere de to regneoperasjonene multiplikasjon og addisjon for reelle tall, når vi oppfatter  $\mathbf{R}$  konkret gitt som mengden av desimaltall. Videre skal vi utlede regnereglene fra boksen side 7 på dette grunnlaget.

**1. Kompletthetsprinsippet.** Lag en begrunnelse for at komplettetsprinsippet (punkt 11 i boksen på side 7) er gyldig når  $\mathbf{R}$  oppfattes konkret gitt som mengden av alle desimaltall. Hint: Gitt en begrenset, ikketom delmengde  $U$ . Konstruer  $s = \sup U$  siffer for siffer ved å la heltallsdelen i  $s$  være største heltallsdel som forekommer blant tallene i  $U$ , deretter la første desimal i  $s$  være største siffer som forekommer som første desimal blant de tallene i  $U$  som har samme heltallsdel som  $s$ , og så videre. Tilsvarende for  $\inf U$ .

**2. Ordningsegenskapene.** Begrunn at punktene 7, 8, 9 og 10 fra boksen side 7 er oppfylt for alle reelle tall.

**3. Addisjon og multiplikasjon av naturlige tall.** Praktisk sett kan vi si at hvis  $a$  og  $b$  er naturlige tall, så er  $a + b$  definert som det antallet vi får ved først å telle  $a$  objekter, og deretter  $b$ . Vi definerer så *multiplikasjon* av naturlige tall som gjentatt addisjon, ved

$$a \cdot b = \underbrace{b + b + \cdots + b}_a \text{ stykker}$$

Feks. er  $3 \cdot 2 = 2 + 2 + 2 = 6$ , mens  $2 \cdot 3 = 3 + 3 = 6$  og  $1 \cdot 5 = 5$ .

Dessuten er  $2 \cdot 0 = 0 + 0 = 0$ . Vi definerer  $0 \cdot a = 0$  for alle tall  $a$ . Overbevis deg, ved hjelp av konkretiseringer eller innsetting av tall, om at regnereglene (1)–(6) fra boksen side 7 holder når  $a$ ,  $b$  og  $c$  er naturlige tall.

**4. Addisjon og multiplikasjon av positive reelle tall.** La oss kalle et positivt reelt tall *endelig* hvis det har en desimalutvikling der kun et endelig antall desimaler er forskjellig fra 0. For eksempel er  $23.45000\dots = 23.45$  et endelig tall. Naturlige tall er også endelige, selvsagt. Vi definerer addisjon og multiplikasjon av endelige, positive reelle tall ved å la svaret være det vi får ved å først droppe desimalkommaet i regnestykket, og så deretter sette inn kommaet på den "riktige" plassen. Eksempler på hvordan det fungerer:

- For å regne ut  $2.3 + 5.16$ , skriver vi  $2.3 = 2.30$ , slik at tallene vi skal legge sammen har like mange desimaler. Deretter regner vi ut at  $230 + 516 = 746$ . Til slutt plasserer vi kommaet slik at vi har like mange desimaler i svaret som i hvert av de to tallene vi adderte. Vi får da  $2.3 + 5.16 = 2.30 + 5.16 = 7.46$ .
- For å regne ut  $2.3 \cdot 5.16$ , regner vi først ut  $23 \cdot 516$ . Deretter plasserer vi kommaet slik at svaret vårt har like mange desimaler som de to tallene vi multipliserte hadde *til sammen*. Vi får da  $2.3 \cdot 5.16 = 11.868$ .

Tenk over hvorfor dette er rimelige definisjoner.

- a) Overbevis deg om at reglene (1)–(6) fra boksen side 7 frem-

deles holder når  $a$ ,  $b$  og  $c$  tillates å være endelige reelle tall som er  $\geq 0$ . Hint: Kommaflyttingen blir den samme på begge sider.

Hvis  $a$  er et positivt reelt tall, så la  $a_n$  være det tallet som fås fra  $a$  ved å erstatte alle desimalene til  $a$  fra og med plass  $n + 1$  og utover med 0. (Hvis  $a$  har to ulike desimal-utviklinger, tar vi utgangspunkt i den utviklingen som ikke har en uendelig rekke 9-ere.) Eksempel: Hvis  $a = 3.156323555\dots$ , så er  $a_0 = 3$ ,  $a_2 = 3.15$  og  $a_5 = 3.15632$ . Hvis  $a, b \geq 0$  er reelle tall som ikke begge er endelige, definerer vi

$$a + b = \sup\{a_n + b_n \mid n \geq 1\}$$

$$a \cdot b = \sup\{a_n \cdot b_n \mid n \geq 1\}.$$

Vi må nå sjekke at reglene (1)–(6) fra boksen holder også når ett eller flere av tallene  $a, b, c$  ikke er endelige. Dette gjøres ved akkurat samme tankegang for alle reglene. Vi nøyer oss med å en av dem som eksempel.

- b) Lag et bevis for at regelen  $a(b + c) = ab + ac$  holder for positive reelle tall også hvis et eller flere av tallene  $a, b$  og  $c$  ikke er endelige. Du kan ta utgangspunkt i følgende bevis-skisse:

Gitt  $n$ . Velg  $k > n$  slik at

$$a_k \cdot (b + c)_k \geq [a(b + c)]_n$$

Velg så  $r > k$  slik at  $b_r + c_r \geq (b + c)_k$ .

Vi har  $ab + ac > a_r b_r + a_r c_r$ .

Det følger at det fins  $m$  slik at

$$[ab + ac]_m \geq a_r b_r + a_r c_r$$

$$\stackrel{\text{vet}}{=} a_r (b_r + c_r) \geq [a(b + c)]_n.$$

Vi har nå vist at  $ab + ac \geq a(b + c)$ . Den omvendte ulikheten vises tilsvarende.

**5. Neagitive tall.** Vi antar nå at reglene (1)–(6) i boksen side 7 holder så lenge alle forkomster av  $a, b$  og  $c$  er  $\geq 0$ . I denne oppgaven skal vi se at de da også vil holde når negative tall er inne i bildet. Vi trenger følgende hjelpresultat:

- a) Anta  $0 \leq a \leq b$ . Vis at det finnes et unikt reelt tall  $t \geq 0$  slik at

$$a + t = b.$$

Hint: La  $t = \sup\{x \in \mathbf{R} \mid a + x \leq b\}$ .

Definisjonene av addisjon og multiplikasjon som involverer negative tall er enkle å tilbakeføre til definisjonene for positive tall. Skal du regne ut  $(-p) + q$  der  $0 < p \leq q$ , blir svaret per definisjon det entydige tallet  $t \geq 0$  slik at  $p + t = q$ . Skal du regne ut samme stykket i tilfellet at  $0 < q \leq p$ , blir svaret  $-t$ . Videre er  $(-p) + (-t) = -(p + t)$  og  $(-p)(-q) = pq$  for alle  $p \geq 0$  og  $q \geq 0$ . Vi kan nå verifisere alle reglene i boksen side 7 ved en felles teknikk. Vi starter med regelen  $a + b = b + a$ . Anta først at både  $a$  og  $b$  er negative, altså  $a = -p$  og  $b = -q$  der  $p, q \geq 0$ . Da blir  $a + b = -(p + q)$  og  $b + a = -(q + p)$ . Men vi vet allerede at  $p + q = q + p$ , så ergo er  $a + b = b + a$ . Anta så at  $a = p$  og  $b = -q$ , der  $0 < q < p$ . Da er både  $a + b$  og  $b + a$  lik det entydige tallet  $t \geq 0$  slik at  $q + t = p$ .

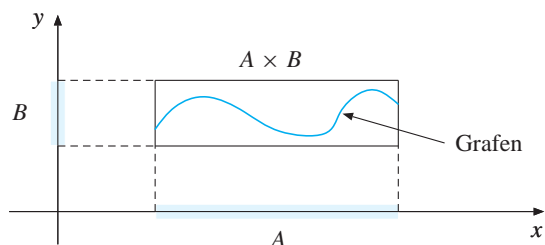
- b) Gjør et tilsvarende resonnement for regelen  $a + b = b + a$  i tilfellet at  $a = p$  og  $b = -q$ , der  $0 < p < q$ . Hva skjer hvis  $a = -p$  og  $b = q$ , der  $p$  og  $q$  er positive? Lag resonnementer som dekker alle mulige kombinasjoner, slik at regelen  $a + b = b + a$  blir fullstendig verifisert.
- c) Bruk tilsvarende teknikk til å verifisere de øvrige reglene (1)–(6) i boksen side 7.

## 1.6 Funksjoner

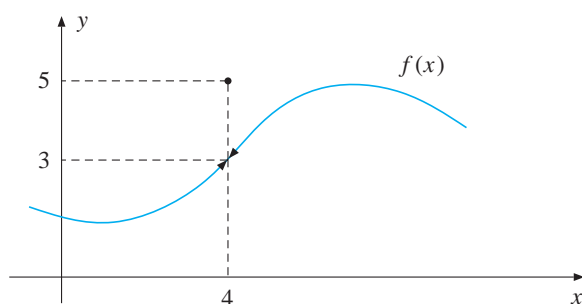
Litt uformelt kan man definere en reell **funksjon**  $f$  definert på en mengde  $D_f \subseteq \mathbf{R}$  er en regel som til hvert tall  $x \in D_f$  gir oss et entydig bestemt reelt tall  $f(x)$ . Denne definisjonen er egentlig litt upresis, fordi vi ikke har forklart hva som kan godtas som en “regel”. Innstillingen vår er at vi godtar hva som helst, bare vi får en entydig funksjonsverdi  $f(x)$  for hver  $x \in D_f$ . I praksis er det greit å tenke slik, men for å ha vårt på det tørre bør vi også ha en presis variant av definisjonen i bakhånd.

Det er vanskelig å finne en direkte presisering av begrepet “regel” som fungerer i alle situasjoner. Istedet tar vi utgangspunkt i *grafbegrepet*. La  $f$

være en funksjon fra mengden  $D_f = A$  til mengden  $B$ , der  $A$  og  $B$  er inneholdt i  $\mathbf{R}$ . Grafen til  $f$  er da en delmengde av produktet  $A \times B$ :



Men for at  $f$  skal være en funksjon, kan ikke grafen være en hvilken som helst delmengde av  $A \times B$ . For hver  $x \in A$ , må vi ha en *entydig*  $y \in B$  slik at punktet  $(x, y)$  ligger på grafen. Ellers er ikke funksjonsverdien  $f(x)$  entydig definert. Figuren under viser en delmengde av  $A \times B$  som *ikke* representerer grafen til noen funksjon:



F.eks. er både  $(9, 7)$  og  $(9, 11)$  med i denne delmengden, dvs. funksjons-verdien  $f(9)$  er ikke entydig. Vi ledes frem til følgende definisjon:

- At en delmengde  $G$  av  $A \times B$  er grafen til en funksjon fra  $A$  til  $B$ , betyr at det for hver  $x \in A$  fins en entydig  $y \in B$  slik at  $(x, y) \in G$ .

Dette gir oss nøkkelen til den presise definisjonen av funksjonsbegrepet. Vi definerer en funksjon  $f$  til å være *det samme som grafen sin*:

### Definisjon 1 Funksjoner

Med en *funksjon* fra en mengde  $A$  til en mengde  $B$  menes en delmengde  $f$  av  $A \times B$  som oppfyller følgende:

For hver  $a \in A$  fins nøyaktig én  $b \in B$  slik at  $(a, b) \in f$

Den unike  $b$ -en kalles *funksjonsverdien* til  $f$  i punktet  $a$ , og skrives  $f(a)$ . Altså:

$$\text{Utsagnet } (a, b) \in f \text{ betyr at } b = f(a).$$

Mengden  $A$  kalles *definisjonsmengden* til  $f$ , og skrives  $D_f$ . Mengden  $V_f = \{f(a) \mid a \in D_f\}$  kalles *verdimengden* til  $f$ .

Hvis du misliker denne definisjonen, så ta det ikke så tungt. I praksis holder det lenge å betrakte en funksjon som en "regel"  $f$  som til element  $a \in D_f$  gir oss en funksjonsverdi  $f(a)$ . Fordi det er så greit å tenke slik, vil vi også fortsette å snakke om "grafene til en funksjon", selv om de to tingene altså pr. def. egentlig er samme sak.

Merk at definisjonen ovenfor ikke forutsetter at  $A$  og  $B$  er delmengder av  $\mathbf{R}$ , de kan være *vilkårlige* mengder. Vi kan derfor oppsummere den uformelle definisjonen av en funksjon på følgende måte:

Hvis  $D_f = A$  og  $V_f \subseteq B$ , sier vi at  $f$  er en funksjon *fra mengden  $A$  til mengden  $B$*  og skriver

$$f : A \rightarrow B.$$

(Leses " $f$  går fra  $A$  til  $B$ "). Hvis vi bare vet at  $D_f \subseteq A$  og  $V_f \subseteq B$ , altså at  $D_f$  kun er en delmengde av  $A$ , skriver vi isteden

$$f; A \rightarrow B.$$

Denne siste skrivemåten er praktisk i situasjoner hvor det holder å angi at  $D_f$  er inneholdt i en eller annen kjent mengde. Vi skal bl.a. bruke den mye i kapittel 12.

Funksjoner  $f$  slik at  $D_f$  er en delmengde av  $\mathbf{R}$ , kalles *funksjoner av én variabel*. Hvis  $V_f \subseteq \mathbf{R}$ , sier man at  $f$  er *reell*.

## Sammensetning av funksjoner

Hvis

$$f : A \rightarrow B$$

er en funksjon som går fra mengden  $A$  til mengde  $B$ , og

$$g : B \rightarrow C$$

er en funksjon som går videre fra mengden  $B$  til mengden  $C$ , så kan vi lage en såkalt sammensatt funksjon

$$h : A \rightarrow C$$

som går direkte fra mengden  $A$  til mengden  $C$  ved å først "reise med"  $f$  og så "reise videre" med  $g$  etterpå. Man skriver den sammensatte funksjonen

$$h = g \circ f,$$

der den lille sirkelen leses “ring” eller “sammensatt med”. Funksjonen  $h$  kalles **sammensetningen** eller **komposisjonen** av funksjonene  $f$  og  $g$ . Vi har

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

for alle  $x \in A$ . Hvis vi har formler for funksjonsuttrykkene til  $f$  og  $g$ , betyr dette at vi finner funksjonsuttrykket til den sammensatte funksjonen  $h$  ved å

- putte funksjonsuttrykket til  $f$  inn i funksjonsuttrykket til  $g$ .

Merk at det er den *siste* funksjonen  $g$  som havner ytterst i uttrykket  $g(f(x))$ . Dette skyldes at man begynner innerst når man regner ut uttrykket  $g(f(x))$ . Se eksemplet under. I det eksemplet er  $A = B = C = \mathbf{R}$ .

**Eksempel 1** La  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  være funksjonen gitt ved  $f(x) = x^3 + 1$ , og la  $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  være funksjonen gitt ved  $g(x) = x^2$ . Da er komposisjonen  $h = g \circ f$  også en funksjon  $h : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , og den er gitt ved

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^3 + 1) = (x^3 + 1)^2.$$

For å forstå hva som skjer her, la oss følge reisen til et tilfeldig tall. La oss si  $x = 3$ . Når dette “reiser” med  $f$ , blir det til  $f(3) = 3^3 + 1 = 28$ . Når det så reiser videre med  $g$ , blir det til

$$g(28) = g(f(3)) = 28^2 = 784. \blacksquare$$

## Algebraiske operasjoner på funksjoner

*Algebra* er, røft sagt, studiet av regneoperasjoner. I kapittel 1 studerte vi blant annet hvilke regneregler som gjaldt for operasjonene addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon med reelle tall. Det vi drev med da, kan beskrives som algebra med reelle tall. Vi skal nå se hvordan man kan definere noen enkle algebraiske operasjoner på funksjoner.

Utgangspunktet er at vi har to funksjoner  $f : A \rightarrow B$  og  $g : A \rightarrow B$  som går mellom de samme to mengdene. For det første sier vi at de to funksjonene er *like*, og skriver  $f = g$ , hvis  $f(x) = g(x)$  for alle  $x \in A$ . Anta så at vi har definert en operasjon “pluss” på mengden  $B$ , slik at det går an å regne ut  $b_1 + b_2$  for alle  $b_1$  og  $b_2$  i  $B$ . Da kan vi definere en ny funksjon  $f + g$ , som vi kaller *summen* av funksjonene  $f$  og  $g$ , ved

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{for alle } x \in A.$$

**Eksempel 2** Hvis  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  og  $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  er gitt ved  $f(x) = x^2$  og  $g(x) = x^3$ , så er  $f + g$  funksjonen gitt ved

$$(f + g)(x) = x^2 + x^3. \blacksquare$$

Det kan virke som keiserens nye klær, men det er et begrepsmessig poeng å tenke over: I operasjonen  $f + g$  betrakter vi funksjonene som helhetlige objekter uavhengig av konkrete funksjonsverdier; vi legger dem sammen og får et nytt objekt av samme type. Riktignok er den nye funksjonen *definert* ved hjelp av funksjonsverdiene til  $f$  og  $g$ , men hovedpoenget er likevel at vi starter med to helhetlige funksjoner og får en ny helhetlig funksjon ut som svar. Ofte er det en fordel å tenke slik.

På nøyaktig tilsvarende måte kan man definere subtraksjon, multiplikasjon og divisjon av funksjoner fra  $A$  til  $B$ , dersom man slike operasjoner på mengden  $B$ . Vi har altså

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x),$$

og tilsvarende  $(fg)(x) = f(x)g(x)$  og  $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$ , der vi i tilfellet  $f/g$  må forutsette  $g(x) \neq 0$  for at funksjonen  $f/g$  skal være definert i punktet  $x$ .

## 1.7 Grenser og kontinuitet

Vi skal begynne med å se på de formelle definisjonene av ulike varianter av grenser.

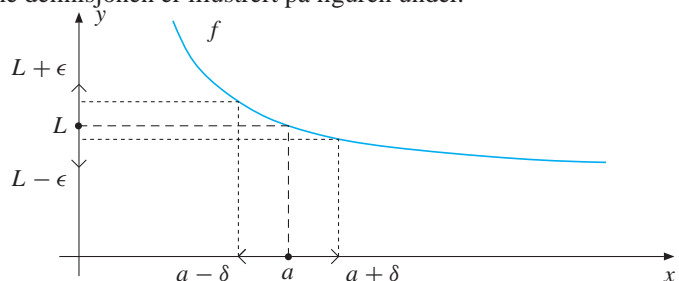
La  $a$  være et opphopningspunkt for  $D_f$ , og la  $L$  være et reelt tall.

At  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  betyr formelt sett følgende:

For hvert tall  $\epsilon > 0$  fins et tall  $\delta > 0$  slik at vi for alle  $x \in D_f$  har at

$$|x - a| < \delta \quad \text{og} \quad x \neq a \quad \text{medfører} \quad |f(x) - L| < \epsilon.$$

Denne definisjonen er illustrert på figuren under.



Vi skal nå definere noen andre varianter av grensebegrepet.

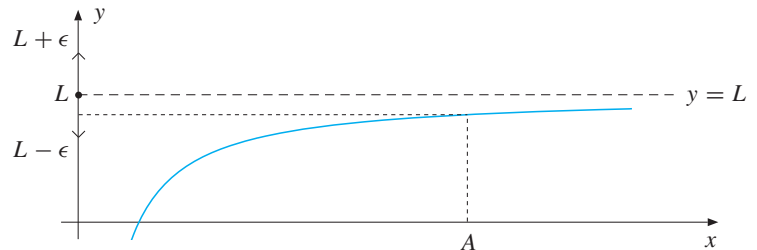
Anta at  $D_f$  er ubegrenset oppover, og la  $L$  være et reelt tall.

At  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$  betyr formelt sett følgende:

For hvert tall  $\epsilon > 0$  fins et tall  $A$  slik at vi for alle  $x \in D_f$  har at

$$x > A \quad \text{medfører} \quad |f(x) - L| < \epsilon.$$

Intuitivt betyr dette at  $f(x)$  nærmer seg  $L$  når  $x$  "går mot uendelig". Illustrasjon:



Definisjonen av  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$  er helt tilsvarende.

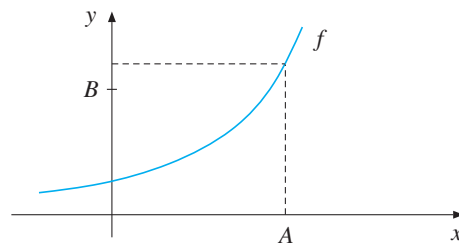
Anta nå at  $D_f$  er ubegrenset oppover.

At  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$  betyr formelt sett følgende:

For hvert tall  $B$  fins et tall  $A$  slik at vi for alle  $x \in D_f$  har at

$$x > A \quad \text{medfører} \quad f(x) > B.$$

Illustrasjon:



Grensene  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$  og  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  defineres tilsvarende.

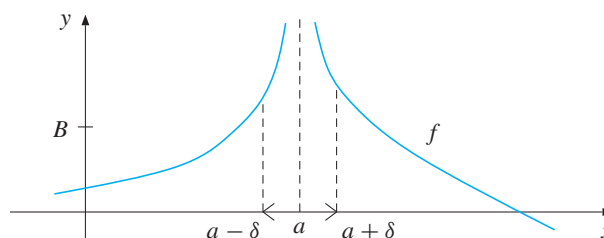
La  $a$  være et opphøpningspunkt for  $D_f$ .

At  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  betyr formelt sett følgende:

For hvert tall  $B$  fins et tall  $\delta > 0$  slik at vi for alle  $x \in D_f$  har at

$$|x - a| < \delta \quad \text{og} \quad x \neq a \quad \text{medfører} \quad f(x) > B.$$

Illustrasjon:



Definisjonen av  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$  er helt tilsvarende.

### Definisjon 1 Høyresidig grenseverdi

Med uttrykket

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

menes grensen  $\lim_{x \rightarrow a} f^+(x)$ , der  $f^+$  er funksjonen vi får fra  $f$  ved å fjerne alle punkter til venstre for  $a$  fra  $D_f$ .

Venstresidig grenseverdi defineres tilsvarende.

### Teorem 1 Sammenheng mellom ensidige og tosidige grenser

Hvis  $L \in \mathbf{R}$  og  $a$  er et opphopningspunkt både for  $D_f \cap \langle -\infty, a \rangle$  og  $D_f \cap [a, \infty)$ , har vi at

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad \iff \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L.$$

**Bevis**  $\Rightarrow$ . Hvis den tosidige grensen er  $L$ , er det opplagt at de ensidige grensene også er  $L$ . Årsak: Hvis

$$|f(x) - L| < \epsilon$$



for alle  $x \in D_f$  slik at  $|x - a| < \delta$  og  $x \neq a$ , gjelder dette også for alle  $x \in D_f$  slik at  $|x - a| < \delta$  og  $x > a$ ! (Eller  $x < a$ .)

$\Leftarrow$ . Gitt en  $\epsilon > 0$ . Siden den høyresidige grensen er  $L$ , fins da  $\delta_1 > 0$  slik at  $|f(x) - L| < \epsilon$  for alle  $x \in D_f$  slik at

$$x \in \langle a, a + \delta_1 \rangle.$$

Og siden den venstresidige grensen er  $L$ , fins  $\delta_2 > 0$  slik at  $|f(x) - L| < \epsilon$  for alle  $x \in D_f$  slik at  $x \in \langle a - \delta_2, a \rangle$ . Velg  $\delta$  som den minste av  $\delta_1$  og  $\delta_2$ . Da har vi  $|f(x) - L| < \epsilon$  for alle  $x \in D_f$  slik at  $x \in \langle a - \delta, a + \delta \rangle$  og  $x \neq a$ . Siden  $\epsilon > 0$  var vilkårlig, er den tosidige grensen  $L$ . ■

### Definisjon 2 Eksistens av grenser

At en grense *eksisterer* (eller *fins*) betyr at det fins et reelt tall  $L$  slik at grensen er lik  $L$ . Merk at vi ikke tillater  $\infty$  og  $-\infty$  som svar her.

Så forrige teorem sier at den tosidige grensen av funksjonen  $f$  i punktet  $x = a$  eksisterer hvis og bare hvis de to ensidige grensene begge eksisterer og er like.

Vi skal nå definere begrepet **kontinuitet**. At en funksjon  $f$  er kontinuerlig i et punkt  $x = a$ , betyr intuitivt at grafen til  $f$  "henger sammen" i punktet  $x = a$ . Det betyr at  $f(x)$  nærmer seg  $f(a)$  når  $x$  går mot  $a$ :

### Definisjon 3 Kontinuitet

At funksjonen  $f$  er kontinuerlig i et opphopningspunkt  $a \in D_f$  betyr at

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

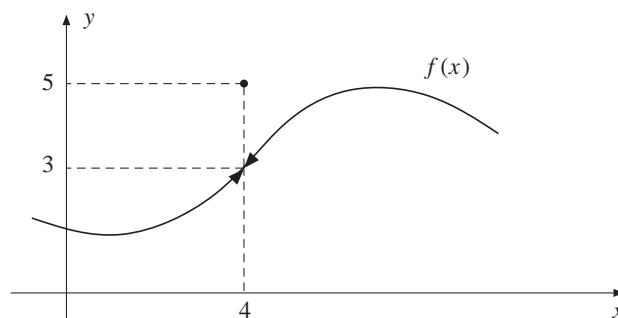
Vi regner  $f$  som kontinuerlig i eventuelle isolerte punkter  $a \in D_f$ .

Hvis  $f$  er kontinuerlig i alle  $x \in D_f$ , sier vi bare at  $f$  er *kontinuerlig*.

Definisjonen av kontinuitet er illustrert på figur 1.7.1. Funksjonen på denne figuren er diskontinuerlig i  $x = 4$ . Grunnen er at funksjonsverdien

$$f(4) = 5$$

ikke er lik grenseverdien for  $f(x)$  når  $x$  går mot 4, som er 3.

Figur 1.7.1 Funksjon som er diskontinuerlig i  $x = 4$ .**Teorem 2 Generelle grenselover**

La  $a$ ,  $s$  og  $r$  være reelle tall. Anta at  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = r$  og  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = s$ . Da gjelder

1.  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = r + s$
2.  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = r - s$
3.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = rs$
4.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{r}{s}$  hvis  $s \neq 0$

Anta at  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = s$ , og at  $f$  er kontinuert i  $x = s$ . Da er

5.  $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(s)$

**Bevis** Vi skal her nøye oss med å bevise lov 1. I oppgave 6 blir du bedt om å bevise lov 2; dette kan gjøres på helt tilsvarende måte. Bevisene for lovene 3, 4 og 5 er flyttet til seksjon 1.14.

Vi går altså løs på lov 1. Gitt  $\epsilon > 0$ . La  $x \neq a$  være et reelt tall som ligger i definisjonsmengdene til både  $f$  og  $g$ . Trekantulikheten gir

$$\begin{aligned} |[f(x) + g(x)] - [r + s]| &= |f(x) - r + g(x) - s| \\ &\leq |f(x) - r| + |g(x) - s|. \end{aligned}$$

Ifølge grensedefinisjonen må vi finne  $\delta > 0$  slik at hvis  $|x - a| < \delta$ , så er uttrykket ovenfor mindre enn  $\epsilon$ . Vi skal bruke et såkalt "ε/2-argument". Siden  $f(x) \rightarrow r$ , kan vi finne  $\delta_1 > 0$  slik at

$$|f(x) - r| < \epsilon/2$$

når  $|x - a| < \delta_1$ . Og siden  $g(x) \rightarrow s$ , kan vi finne  $\delta_2 > 0$  slik at

$$|g(x) - s| < \epsilon/2$$

når  $|x - a| < \delta_2$ . La  $\delta$  være den minste av  $\delta_1$  og  $\delta_2$ . Hvis da  $|x - a| < \delta$ , er

$$|f(x) - r| + |g(x) - s| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Siden  $\epsilon > 0$  var vilkårlig, er loven bevist. ■

### Teorem 3 Skjæringssetningen

Anta at  $f$  er kontinuert på intervallet  $[a, b]$ . Hvis  $K$  er et tall mellom  $f(a)$  og  $f(b)$ , så fins en  $c \in [a, b]$  slik at  $f(c) = K$ .

**Bevis** Vi antar at  $f(a) \leq K$ . Tilfellet  $f(a) \geq K$  behandles tilsvarende. La

$$c = \sup S, \quad \text{der} \quad S = \{x \in [a, b] \mid f(x) \leq K\}$$

Siden mengden  $S$  er inneholder  $a$ , er den ikke tom. Dessuten er  $S$  oppad begrenset av  $b$ , så ved kompletthetsprinsippet er  $c$  veldefinert. Jeg påstår at

$$f(c) = K.$$

For å vise dette, anta først  $f(c) < K$ . Ved oppgave 10.0.0 fins i så fall  $\delta > 0$  slik at  $f(x) < K$  for alle  $x \in [c - \delta, c + \delta]$ . Men da er jo  $c + \delta \in S$ , som strider mot at  $c = \sup S$ . Selvmotsigelse.

Alternativt, anta  $f(c) > K$ . Ved oppgave 10.0.0 fins da  $\delta > 0$  slik at  $f(x) > K$  for  $x \in [c - \delta, c + \delta]$ . Men  $c = \sup S$ , selvmotsigelse igjen. Så  $f(c) = K$ . ■

En funksjon  $f$  kalles *oppad begrenset* dersom  $V_f$  er oppad begrenset, og *nedad begrenset* dersom  $V_f$  er nedad begrenset. Dersom  $f$  er både oppad og nedad begrenset, kalles den *begrenset*.

### Teorem 4 Begrensethet

Hvis  $f$  er kontinuert og  $D_f$  er et lukket intervall  $[a, b]$ , så er  $f$  begrenset.

**Bevis** La

$$c = \sup\{x \in [a, b] \mid f \text{ er begrenset på } [a, x]\}.$$

Ved kompletthetsprinsippet er  $c$  veldefinert, for mengden den er supremum av er oppad begrenset og ikketom (inneholder  $a$ ). Anta  $c < b$ . Siden  $f$  er kontinuert, fins en  $\delta > 0$  slik at  $|f(x) - f(c)| < 1$  for  $x \in [c, c + \delta]$ . Men da er jo  $f$  begrenset på  $[a, c + \delta]$ , selvmotsigelse. Så  $c = b$ . Siden  $f$  er kontinuert i endepunktet  $b$ , finnes  $t > 0$  slik at  $|f(x) - f(b)| < 1$  for  $x \in [b - t, b]$ . Dermed er  $f$  begrenset på  $[a, b]$ . ■

**Teorem 5 Ekstremverdisetningen**

Hvis  $f$  er kontinuert og  $D_f$  er et lukket intervall  $[a, b]$ , så har  $f$  minst ett maksimumspunkt og ett minimumspunkt. (Se på figuren over!)

**Bevis** Det er nok å vise at  $f$  har et maksimumspunkt, for da fås resultatet om minimum ved å anvende maksimumsresultatet på funksjonen  $-f(x)$ .

Ved teorem 1.7.4 fins  $M = \sup\{f(x) \mid x \in D_f\}$ . Anta  $f(x) < M$  for alle  $x \in D_f$ . Da er funksjonen  $g(x) = 1/(M - f(x))$  kontinuert på  $[a, b]$ , dvs. ved teorem 1.7.4 fins  $C$  slik at  $g(x) < C$ . Så  $f(x) < M - 1/C$  for alle  $x \in D_f$ . Dette strider mot definisjonen av  $M$ . ■

## 1.8 Derivasjon

---

Den *deriverte* av funksjonen  $f(x)$  er funksjonen  $f'(x)$  definert ved

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

for alle  $x \in D_f$  slik at denne grensen fins. Hvis  $f'(a)$  fins, kalles  $f$  *deriverbar* i  $a$ . Hvis  $f$  er deriverbar i alle  $a \in D_f$ , kalles  $f$  **deriverbar**. Ved hjelp av denne definisjonen kan man bevise de velkjente derivasjonsreglene. Vi tar med bevisene for noen av de viktigste her.

**Teorem 1 Derivasjon av en sum**

Anta at  $u(x)$  og  $v(x)$  er deriverbare funksjoner. Da er også funksjonen  $f(x) = u(x) + v(x)$  deriverbar, og

$$f'(x) = u'(x) + v'(x).$$

**Bevis** Vi får

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[u(x+h) + v(x+h)] - [u(x) + v(x)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} = u'(x) + v'(x). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Beviset for at  $(u - v)' = u' - v'$  er helt tilsvarende.

**Teorem 2 Produktregelen**

Anta at  $u(x)$  og  $v(x)$  er deriverbare funksjoner. Da er også funksjonen  $f(x) = u(x)v(x)$  deriverbar, og

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

**Bevis** Vi får

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ v(x+h) \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + u(x) \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \right] \\ &= v(x)u'(x) + u(x)v'(x). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Teorem 3 Kjernerregelen**

Anta at funksjonen  $u$  er deriverbar i punktet  $x$ , og at funksjonen  $g$  er deriverbar i punktet  $u(x)$ . Da er den sammensatte funksjonen  $f = g \circ u$  gitt ved  $f(x) = g(u(x))$  deriverbar i punktet  $x$ , og

$$f'(x) = g'(u(x)) \cdot u'(x).$$

**Bevis** Merk at når  $f(x) = g(u(x))$ , er

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = g'(u(x)) \cdot \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + E, \quad (*)$$

der  $E$  er gitt ved dåpene  $y = u(x)$ , og  $t = u(x+h) - u(x)$ , og

$$E = \frac{g(y+t) - g(y) - g'(y) \cdot t}{h}.$$

Sjekk det ved innsetting! Hvis vi kan vise at  $E \rightarrow 0$  når  $h \rightarrow 0$ , fås kjernerregelen fra likningen (\*) i grensen  $h \rightarrow 0$ . Vel, hvis  $h$  er slik at  $t = 0$ , er  $E = 0$ . Hvis  $t \neq 0$ , kan vi skrive

$$E = \left[ \frac{g(y+t) - g(y)}{t} - g'(y) \right] \cdot \frac{t}{h}$$

Når  $h \rightarrow 0$  går  $t \rightarrow 0$  ved kontinuitet av  $u$ . Da går hakeparentesen mot 0, pr. def. av  $g'(y)$ . Faktoren  $\frac{t}{h}$  går mot  $u'(x)$ . Så  $E \rightarrow 0$  ■

**Teorem 4 Brøkregelen**

Anta at  $u(x)$  og  $v(x)$  er deriverbare funksjoner. Da er også funksjonen

$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$  deriverbar, og

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}.$$

**Bevis** La  $N(x) = 1/x$ . Vi kan da vise (se f.eks. MIP eksempel 6.1.1) fra definisjonen av den deriverte at  $N'(x) = -1/x^2$ . Videre kan vi skrive  $g(x) = u(x) \cdot N(v(x))$ , og produktregelen kombinert med kjerneregelen gir da

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x) \cdot N(v(x)) + u(x) \cdot N'(v(x))v'(x) \\ &= \frac{u'(x)}{v(x)} + u(x) \cdot \frac{(-1)}{[v(x)]^2} \cdot v'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Teorem 5 Derivasjon av potensfunksjoner**

Hvis  $n \neq 0$  er et helt tall, og la  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  være gitt ved  $f(x) = x^n$ . Da er  $f$  deriverbar, og

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

**Bevis** For  $n = 1$  sier regelen at  $f(x) = x$  gir  $f'(x) = 1 \cdot x^{n-1} = x^0 = 1$ , noe som er lett å se at stemmer. Anta at regelen er ok for  $n = k$ , dvs. at  $u(x) = x^k$  gir  $u'(x) = kx^{k-1}$ . Hvis da  $f(x) = x^{k+1}$ , kan vi skrive  $f(x) = x \cdot u(x)$ , der  $u(x) = x^k$ . Produktregelen gir så

$$f'(x) = 1 \cdot u(x) + x \cdot u'(x) = 1 \cdot x^k + x \cdot kx^{k-1} = x^k + kx^k = (k+1)x^k.$$

Ergo holder regelen for  $n = k+1$  også, dvs. vi har vist ved induksjon at regelen holder for alle  $n \geq 1$ . Hvis  $n < 0$ , så kan  $f(x) = x^n$  skrives  $f(x) = 1/(x^m)$ , der  $m = -n$  er positiv. Brøkregelen gir så

$$f'(x) = \frac{0 - mx^{m-1}}{(x^m)^2} = -mx^{m-1}x^{-2m} = -mx^{-m-1} = nx^{n-1}. \quad \blacksquare$$

**Teorem 6 Test for lokale ekstremalpunkter**

La  $a$  være et punkt i det indre av  $D_f$ , og anta at  $f$  er deriverbar i  $a$ .

Hvis  $x = a$  er et lokalt ekstremalpunkt for  $f$ , så er  $f'(a) = 0$ .

**Bevis** Vi har

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Anta at  $a$  er et lokalt maksimum. (Tilfellet minimum er tilsvarende.) Hvis  $h > 0$  er liten nok, er da telleren negativ og nevneren positiv, dvs. brøken er negativ. Så  $f'(a) \leq 0$ . Hvis  $h < 0$  er både teller og nevner negative, dvs. brøken er positiv. Så  $f'(a) \geq 0$ . Altså  $f'(a) = 0$ . ■

### Teorem 7 Rolles teorem

Anta at  $f$  er kontinuertlig på  $[a, b]$  og deriverbar på  $\langle a, b \rangle$ . Hvis  $f(a) = f(b) = 0$ , så fins minst ett punkt  $c \in \langle a, b \rangle$  slik at  $f'(c) = 0$ .

**Bevis** Ved ekstremverdisetningen har  $f$  et globalt maksimum  $f(c_1) = M$  og et globalt minimum  $f(c_2) = m$  på  $[a, b]$ . Anta at  $f(c_1) > 0$ . Da må  $c_1 \in \langle a, b \rangle$ , så teorem 1 gir  $f'(c_1) = 0$ . Hvis  $f(c_2) < 0$ , fås på samme måte  $f'(c_2) = 0$ . Eneste mulighet som ikke er dekket nå er at  $f(c_1) = f(c_2) = 0$ . Da må  $f(x) = 0$  på hele  $\langle a, b \rangle$ , dvs.  $f'(x) = 0$  overalt. ■

### Teorem 8 Cauchys middelverditeorem

Hvis  $f$  og  $g$  er kontinuertlige på  $[a, b]$  og deriverbare på  $\langle a, b \rangle$ , fins  $c \in \langle a, b \rangle$  slik at

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c).$$

**Bevis** La  $h(x) = [f(a) - f(x)][g(b) - g(a)] + [g(x) - g(a)][f(b) - f(a)]$ . Vi har da  $h(a) = h(b) = 0$ , og

$$h'(x) = -f'(x)[g(b) - g(a)] + g'(x)[f(b) - f(a)].$$

Ved Rolles teorem fins dermed en  $c \in \langle a, b \rangle$  slik at  $h'(c) = 0$ , dvs.

$$0 = -f'(c)[g(b) - g(a)] + g'(c)[f(b) - f(a)]. \quad \blacksquare$$

### Teorem 9 Middelverditeorem

La  $f$  være kontinuertlig på  $[a, b]$  og deriverbar på  $\langle a, b \rangle$ . Da fins  $c \in \langle a, b \rangle$  slik at

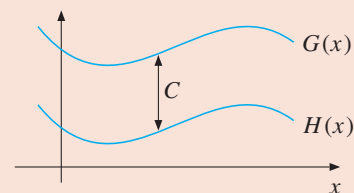
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

**Bevis** Sett  $g(x) = x$  i Cauchys middelverditeorem. Da blir  $g'(c) = 1$ , samt at  $g(b) = b$  og  $g(a) = a$ . Resultatet faller rett så rett ut. ■

**Teorem 10** Funksjoner med samme derivert

La  $G(x)$  og  $H(x)$  være kontinuerlige på  $[a, b]$ , og anta at  $G'(x) = H'(x)$  for alle  $x \in (a, b)$ . Da fins et tall  $C$  slik at vi for alle  $x \in [a, b]$  har

$$G(x) = H(x) + C.$$



**Bevis** La  $f(x) = G(x) - H(x)$ , da har vi  $f'(x) = G'(x) - H'(x) = 0$ . Ved middelverditheoremet får vi at  $f(b) - f(a) = 0$  for alle  $a$  og  $b$ , siden  $f'(c) = 0$ . Altså er  $f(x)$  konstant, dvs. det fins en  $C$  slik at  $f(x) = C$ . Med andre ord:  $G(x) - H(x) = C$ . ■

La  $I$  være et intervall og  $f(x)$  en funksjon definert på  $I$ . La  $a$  og  $b$  være to vilkårlige punkter i intervallet. At  $f$  er

<b>strengt voksende</b> på $I$	betyr at	$a < b$ medfører	$f(a) < f(b)$
<b>voksende</b> på $I$	betyr at	$a < b$ medfører	$f(a) \leq f(b)$
<b>strengt avtakende</b> på $I$	betyr at	$a < b$ medfører	$f(a) > f(b)$
<b>avtakende</b> på $I$	betyr at	$a < b$ medfører	$f(a) \geq f(b)$

At  $f$  er **monoton** på  $I$  betyr at  $f$  er enten voksende på hele  $I$  eller avtakende på hele  $I$ . At  $f$  er *strengt monoton* på  $I$  betyr at  $f$  er enten strengt voksende på hele  $I$  eller strengt avtakende på hele  $I$ .

**Teorem 11** Den deriverte bestemmer monotonitet

Anta at  $f$  er kontinuerlig på intervallet  $I$ .

- Hvis  $f'(x) > 0$  på det indre av  $I$ , så er  $f$  strengt voksende på  $I$
- Hvis  $f'(x) < 0$  på det indre av  $I$ , så er  $f$  strengt avtakende på  $I$

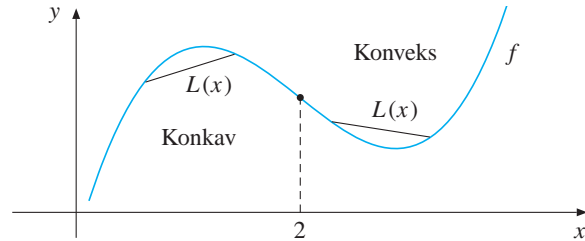
**Bevis** Anta  $f'(x) > 0$  på det indre av  $I$ . La  $a$  og  $b$  være to punkter i  $I$ , og anta at  $a < b$ . Middelverditheoremet brukt på intervallet  $[a, b]$  gir da at telleren  $f(b) - f(a)$  må være positiv, siden både  $f'(c)$  og nevneren  $b - a$  er positive. Altså  $f(b) > f(a)$ . Tilsvarende hvis  $f'(x) < 0$ . ■

Med den *annenderiverte*  $f''$  av en funksjon  $f$  menes den deriverte av  $f'$ , gitt at denne fins.

En funksjon  $f$  kalles **konveks** på et intervall  $I \subseteq D_f$  hvis det er slik at når vi velger to punkter  $a, b$  fra  $I$ , så vil den lineære funksjonen  $L(x)$  som går gjennom punktene  $(a, f(a))$  og  $(b, f(b))$  alltid oppfylle  $L(x) \geq f(x)$  for



$x \in (a, b)$ . Hvis vi alltid får  $L(x) > f(x)$  for  $x \in (a, b)$ , kalles  $f$  *strengt konveks*. Tilsvarende kalles  $f$  **konkav** på  $I$  hvis vi alltid får  $L(x) \leq f(x)$  for  $x \in (a, b)$ , og *strengt konkav* hvis  $L(x) < f(x)$  for  $x \in (a, b)$ .



Funksjonen på figuren er strengt konkav på  $(-\infty, 2]$  og strengt konveks på  $[2, \infty)$ . At  $f$  er strengt konveks på et intervall, er altså det samme som at grafen "krummer oppover" der. At  $f$  er strengt konkav betyr at grafen krummer nedover. Definisjonene vi har gitt her, forutsetter ikke at  $f''(x)$  eksisterer. Men hvis den gjør det, har vi følgende sammenheng:

### Teorem 12 Den annenderiverte bestemmer krumningen

Anta at  $f'$  er kontinuerlig på intervallet  $I$ .

- Hvis  $f''(x) > 0$  på det indre av  $I$ , så er  $f$  strengt konveks på  $I$
- Hvis  $f''(x) < 0$  på det indre av  $I$ , så er  $f$  strengt konkav på  $I$

**Bevis** Anta at  $f''(x) > 0$  på det indre. Gitt et intervall  $[a, b] \subseteq I$ , la  $L(x)$  være linjen fra  $(a, f(a))$  til  $(b, f(b))$ . La  $g(x) = f(x) - L(x)$  for  $x \in [a, b]$ . Skriv  $L(x) = Ax + B$ . Da er  $g(x) = f(x) - Ax - B$ , og

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x) - A \\ g''(x) &= f''(x) - 0 = f''(x) > 0 \quad \text{for } x \in (a, b). \end{aligned}$$

Ved teorem 1.8.11 brukt på funksjonen  $g'$ , er  $g'(x)$  strengt voksende på  $[a, b]$ . Siden  $g(a) = g(b) = 0$ , fins ved Rolles teorem  $c \in (a, b)$  slik at  $g'(c) = 0$ . Da må  $g'(x) < 0$  på  $(a, c)$  og  $g'(x) > 0$  på  $(c, b)$ . Ved teorem 1.8.11 følger at  $g$  er strengt avtakende på  $[a, c]$  og strengt voksende på  $[c, b]$ . Ergo er  $g(x) < 0$  for alle  $x \in (a, b)$ . Tilfellet  $f''(x) < 0$  tas tilsvarende. ■

Et punkt  $a$  kalles et **vendepunkt** for  $f$  hvis det fins  $\epsilon > 0$  slik at  $f$  er konkav på  $(a - \epsilon, a]$  og konveks på  $[a, a + \epsilon)$ , eller omvendt. Så et vendepunkt er et punkt der  $f$  skifter fra konveks til konkav, eller omvendt. På figuren forrige side er  $x = 2$  et vendepunkt. For å finne vendepunkter, løser vi likningen  $f''(x) = 0$  og tegner fortegnsskjema for  $f''(x)$ . Skjemaet sier også hvor  $f$  er konveks/konkav (teorem 10.0.0).

Vi definerer den tredjederiverte  $f'''(x)$  som den deriverte av  $f''(x)$ , og så videre. Den  $n$ -te deriverte av  $f$  skrives ofte  $f^{(n)}(x)$ . Vi regner da  $f$  selv som den "nulte" deriverte. Altså  $f^{(0)}(x) = f(x)$ .

## Inverse funksjoner

Funksjonene  $f$  og  $g$  kalles *inverse* av hverandre hvis

$$g(f(x)) = x \quad \text{for alle } x \in D_f \quad f(g(x)) = x \quad \text{for alle } x \in D_g$$

og  $D_g = V_f$ ,  $V_g = D_f$ . Vi skriver  $g(x) = f^{-1}(x)$  og  $f(x) = g^{-1}(x)$ .

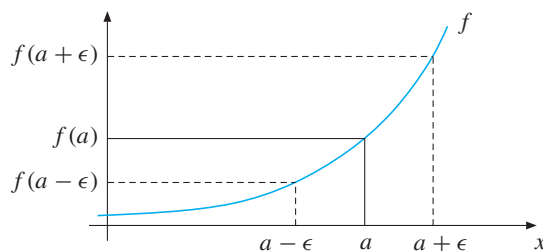
### **Teorem 13** Kontinuitet og deriverbarhet av inverse funksjoner

Hvis  $D_f$  er et intervall og  $f$  er kontinuerlig og strengt monoton, så:

1. Den inverse  $f^{-1}$  er også kontinuerlig.
2. Hvis  $f$  er deriverbar i  $x$  og  $f'(x) \neq 0$ , så er  $f^{-1}$  deriverbar i punktet  $f(x)$ , og

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

**Bevis** (1) Anta at  $f$  er strengt voksende. (Tilfellet avtakende går tilsvarende.) Vi må vise at  $f^{-1}$  er kontinuerlig i et gitt punkt  $b = f(a)$ . Vi antar at  $a$  er i det indre av  $D_f$ , tilfellet at  $a$  er et endepunkt er helt analogt. Vi har  $f^{-1}(b) = a$ . Gitt  $\epsilon > 0$ , velg  $\delta > 0$  som det minste av tallene  $f(a + \epsilon) - b$  og  $b - f(a - \epsilon)$ . Hvis da  $|y - b| < \delta$ , følger det lett at  $f^{-1}(y) \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$ . Figur:



(2) La  $g = f^{-1}$ , og la  $k(h) = g(f(x) + h) - g(f(x))$ . Da er

$$\begin{aligned} g'(f(x)) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(f(x) + h) - g(f(x))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(h)}{f(x + k(h)) - f(x)} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k}{f(x + k) - f(x)} = \frac{1}{f'(x)} \end{aligned}$$

Annen overgang kan sjekkes ved innsetting. Tredje overgang: Siden  $g$  er kontinuerlig ved (1), går  $k(h)$  mot 0 når  $h \rightarrow 0$ . Grensen etter tredje overgang vet vi fins, fordi den er  $f'(x)$  snudd opp ned og  $f'(x) \neq 0$ . ■

## Rot-funksjonene

La  $v > 1$  være et helt tall. Vi definerer funksjonen

$$g(x) = \sqrt[n]{x},$$

som den inverse til funksjonen  $f(x) = x^n$ . For  $n$  odde kan vi definere  $\sqrt[n]{x}$  for alle  $x \in \mathbf{R}$ , mens vi for  $n$  jevn må begrense oss til området  $[0, \infty)$ . Teorem 1.8.13 gir at funksjonen  $\sqrt[n]{x}$  er kontinuerlig. Så ved skjæringssetningen følger at  $\sqrt[n]{x}$  er definert for *alle* reelle tall  $x$  når  $n$  er odde, og for alle reelle tall  $x \geq 0$  når  $n$  er jevn. Siden funksjonene er inverse, er

$$(\sqrt[n]{x})^n = \sqrt[n]{x^n} = x$$

for alle  $x \in \mathbf{R}$  når  $n$  er odde, og for alle  $x \geq 0$  når  $x$  er jevn. Dermed har vi også, automatisk, bevist teorem 1.4.2 om eksistens av  $n$ 'te-røtter.

### Teorem 14 Derivasjon av rot-funksjoner

For alle  $x \neq 0$  slik at  $\sqrt[n]{x}$  er definert gjelder

$$\frac{d}{dx} \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$$

**Bevis** Vi bruker at  $g(x) = \sqrt[n]{x}$  er invers av  $f(x) = x^n$ . Teorem 1.8.13 gir

$$g'(x^n) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{nx^{n-1}}$$

for  $x \neq 0$ . Hvis vi setter  $u = x^n$ , fås  $x = \sqrt[n]{u}$ . Innsatt gir dette

$$g'(u) = \frac{1}{n(\sqrt[n]{u})^{n-1}} \quad (\text{Døp så om } u \text{ til } x.) \quad \blacksquare$$

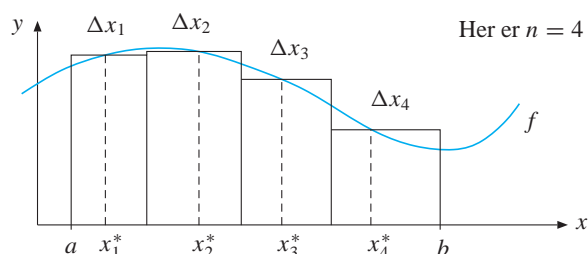
**Spesialtilfelle :**  $\frac{d}{dx} \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$  for alle  $x > 0$ .

## 1.9 Integrasjon

La  $f$  være begrenset på intervallet  $[a, b]$ . En **Riemannsum** for  $f$  på  $[a, b]$  er en sum på formen

$$R = \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i = f(x_1^*) \Delta x_1 + f(x_2^*) \Delta x_2 + \dots + f(x_n^*) \Delta x_n,$$

der  $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n$  er lengdene til  $n$  lukkede delintervaller som til sammen utgjør hele  $[a, b]$  og som snitter hverandre kun i endepunktene, og der  $x_i^*$  ligger i delintervall nummer  $i$ . Hvis  $f(x) \geq 0$  for alle  $x \in [a, b]$ , kan Riemannsummen tolkes som en tilnærming til arealet under grafen til  $f$  på  $[a, b]$  ved bruk av rektangler. Se figur 1.9.1. Rektangel nummer  $i$  har bredde  $\Delta x_i$  og høyde  $f(x_i^*)$ , så arealet av det er  $f(x_i^*) \Delta x_i$ .

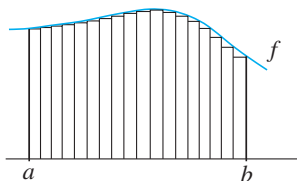


**Figur 1.9.1** Geometrisk tolkning av en Riemannsum

Den største bredden  $\Delta x_i$  som forekommer i Riemannsummen  $R$ , kalles Riemannsummens **maskevidde** og skrives

$$m(R).$$

Det virker intuitivt rimelig at når  $m(R)$  går mot 0, vil Riemannsummens verdi nærme seg det vi kan oppfatte som arealet under grafen til  $f$  på  $[a, b]$ . Se figur 1.9.2. Dette gir grunnlag for følgende definisjon:



**Figur 1.9.2** Maskevidden på vei mot 0

### Definisjon 1 Integrerbarhet

La funksjonen  $f$  være begrenset på intervallet  $[a, b]$ . At  $f$  er *integrerbar* på  $[a, b]$  betyr at det fins et tall  $I$  slik at følgende betingelse holder:

For hver  $\epsilon > 0$  fins  $\delta > 0$  slik at hvis  $R$  er en Riemannsum for  $f$  på  $[a, b]$  med maskevidde mindre enn  $\epsilon$ , så er  $|R - I| < \delta$ .

Hvis  $f$  er integrerbar på  $[a, b]$ , kalles tallet  $I$  fra denne definisjonen for det **bestemte integralet** av  $f$  på  $[a, b]$ .

Skrivemåten for Riemannsummer viser klart hvordan notasjonen man bruker for integraler har oppstått. Når maskevidden går mot 0, nærmer Riemannsummen seg integralet av  $f$ . Vi kan skrive

$$\sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i \rightarrow \int_a^b f(x) dx.$$

Hvis  $a = b$ , blir intervallet  $[a, b]$  kun et punkt. Da definerer vi integralet av  $f$  som 0. Hvis  $a > b$  setter vi

$$\int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} - \int_b^a f(x) dx \quad \text{hvis integralet til høyre er definert.}$$

## Beregning av Riemannsummer

Vi skal nå se på et eksempel der vi regner ut en Riemannsum. I eksemplet vårt bruker vi en Riemannsum til å beregne en tilnærming til et areal under grafen. I oppgavene får du eksempler på hvordan man kan bruke Riemannsummer til å finne et integral eksakt. I eksemplet vårt skal vi bruke en Riemannsum der alle delintervallene  $\Delta x_i$  er like lange. Slike Riemannsummer kalles **regulære**.

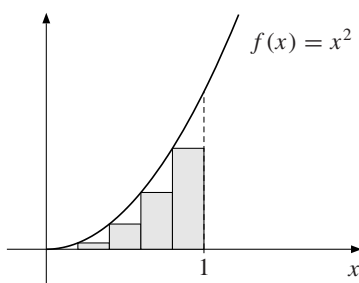
**Eksempel 1** La  $f(x) = x^2$ . Beregn den regulære Riemannsummen for  $f$  på  $[0, 1]$  med  $n = 5$  og venstre endepunkt av hvert delintervall som  $x_i^*$ .

**Løsning** Figur 1.9.3 viser den geometriske tolkningen av Riemannsummen vår. Høyden av rektanglene er her funksjonsverdien til  $f$  i venstre endepunkt i hvert delintervall. Siden  $f$  er strengt voksende på  $[0, 1]$ , fører dette til at rektanglene ligger under grafen. Vi ser at

$$\Delta x_i = 1/5$$

for alle  $1 \leq i \leq 5$ . Vi får

$$\begin{aligned} R &= \sum_{i=1}^5 f(x_i^*) \Delta x_i \\ &= f(0) \Delta x_1 + f(1/5) \Delta x_2 + f(2/5) \Delta x_3 + f(3/5) \Delta x_4 + f(4/5) \Delta x_5 \\ &= 0^2 \cdot \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \frac{1}{5} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \frac{1}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \frac{1}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^2 \cdot \frac{1}{5} \\ &= 0 + \frac{1}{125} + \frac{4}{125} + \frac{9}{125} \\ &= \frac{14}{125}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$



Figur 1.9.3

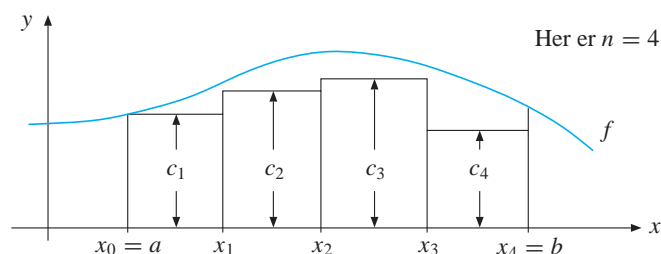
## Nedresummer og øvresummer

Vi skal nå studere sammenhengen mellom Riemannsummer og såkalte *nedresummer* og *øvresummer*.

Anta at funksjonen  $f$  er begrenset på intervallet  $[a, b] \subseteq D_f$ . Med en **nedresum** for  $f$  på intervallet  $[a, b]$  menes en sum på formen

$$S = c_1(x_1 - x_0) + c_2(x_2 - x_1) + \cdots + c_n(x_n - x_{n-1})$$

der vi har  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$  og tallene  $c_i$  oppfyller  $c_i \leq f(x)$  for alle  $x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$ . Hvis  $f$  er positiv, kan  $S$  tolkes som en *nedre* tilnærming til arealet under grafen til  $f$  ved bruk av rektangler. Se figur 1.9.4. Første rektangel på denne figuren har bredde  $x_1 - x_0$  og høyde  $c_1$ , dvs. det har areal  $c_1(x_1 - x_0)$ . Tilsvarende for de andre. Summen av alle arealene er  $S$ .



Figur 1.9.4

Hvis vi gjør oppdelingen stadig finere, er det intuitivt rimelig at nedresummen kan nærme seg arealet under grafen stadig mer. Motivert av dette definerer vi **nedreintegralet** av  $f$  på  $[a, b]$  ved å sette

$$\int_a^b f(x) dx = \sup\{S \mid S \text{ er en nedresum for } f \text{ på } [a, b]\}.$$

Skrivemåten for nedreintegral er altså som for det vanlige integralet, bortsett fra at vi setter en strek under integraltegnet.

På helt analogt vis kan vi definere begrepet **øvreintegral** for  $f$  på  $[a, b]$  ved å ta utgangspunkt i begrepet **øvresum**. Definisjonen av øvresum blir akkurat som definisjonen av nedresum, bortsett fra at vi krever  $c_i \geq f(x)$  for alle  $x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$  istedenfor  $c_i \leq f(x)$ . Øvreintegralet skrives med en strek over integraltegnet og er definert ved

$$\overline{\int_a^b f(x) dx} = \inf\{S \mid S \text{ er en øvresum for } f \text{ på } [a, b]\}.$$

Som for det vanlige integralet, definerer vi både ned- og øvreintegralene til å være 0 hvis  $a = b$ , og til å skifte fortegn hvis  $a$  og  $b$  byttes slik at  $b < a$ .

En fordel med nedreintegralet og øvreintegralet er at disse *alltid* eksisterer, gitt at  $f$  er begrenset. Hvis  $f$  er integrerbar, blir de lik det vanlige integralet:

### Teorem 1 Nedreintegral, øvreintegral og integrerbarhet

La  $f$  være begrenset på intervallet  $[a, b]$ . Da har vi:

1. Hvis  $f$  er integrerbar på  $[a, b]$  med integral  $I$ , så er både nedreintegralet og øvreintegralet av  $f$  på  $[a, b]$  lik  $I$ .
2. Hvis nedreintegralet og øvreintegralet av  $f$  på  $[a, b]$  er like, så er  $f$  integrerbar på  $[a, b]$  med integral lik denne felles verdien. .

**\*Bevis** (1). Anta at  $f$  er integrerbar på  $[a, b]$  med integral  $I$ . For hver  $\epsilon > 0$  fins da en  $\delta > 0$  slik at vi for alle Riemannsummer  $R$  med maskevidde mindre enn  $\delta$  har  $|R - I| < \epsilon$ . Gitt  $\epsilon > 0$ , velg en slik tilhørende  $\delta$ . Velg så en oppdeling av  $[a, b]$  med maskevidde mindre enn  $\delta$ . La  $S_-$  være nedresummen vi får fra denne ved å velge  $c_i$  som supremum av funksjonsverdiene til  $f$  i delintervall nummer  $i$ , for hver  $1 \leq i \leq n$ . La videre  $R$  være en Riemannsum basert på den samme oppdelingen, slik at  $f(x_i^*) < c_i + \epsilon$  for hver  $1 \leq i \leq n$ . Da er

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^n c_i \Delta x_i > \sum_{i=1}^n (f(x_i^*) - \epsilon) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n [f(x_i^*) \Delta x_i - \epsilon \Delta x_i] \\ &= R - \epsilon \sum_{i=1}^n \Delta x_i > (I - \epsilon) - \epsilon(b - a). \end{aligned}$$

Siden  $\epsilon > 0$  var vilkårlig, viser dette at det fins nedresummer for  $f$  på  $[a, b]$  ligger vilkårlig nær opptil tallet  $I$ . Tilsvarende kan man vise at det fins øvresummer som ligger vilkårlig nær  $I$  på oversiden. Så

$$A_- = A_+ = I.$$

(2). Anta at  $A_- = A_+$ . La oss kalles denne felles verdien  $I$ . Gitt  $\epsilon > 0$ , velg en nedresum  $S$  slik at

$$S > I - \epsilon/2.$$

Siden  $f$  er begrenset på  $[a, b]$  fins  $M > 0$  slik at  $|f(x)| < M$  for alle  $x \in D$ . La  $Z$  være mengden bestående av endepunktene til  $D$  samt alle delepunkter for nedresummen  $S$ . Da finnes lukkede intervaller  $E_1, \dots, E_k$  slik at unionen

$$E = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_k$$

inneholder  $Z$  i sitt indre, samtidig som samlet lengde av intervallene er mindre enn  $\epsilon/2M$ . Velg  $\delta_1 > 0$  så liten at dersom et lukket intervall med lengde  $\delta$  inneholder et punkt fra  $Z$ , så er dette intervallet inneholdt i  $E$ . La

$$R = \sum_{i=1}^m f(x_i^*) \Delta x_i$$

være en vilkårlig Riemannsum for  $f$  på  $D$  med maskevidde mindre enn  $\delta_1$ . Vi kan dele leddene i  $R$  inn i to kategorier: Kategori 1 er de leddene der delintervallet inneholder et punkt fra  $Z$ , og kategori 2 er resten av leddene. La oss anta at de  $s$  første leddene i  $R$  er av kategori 2, resten av kategori 1. Da har vi

$$\sum_{i=s+1}^m f(x_i^*) \Delta x_i > \sum_{i=s+1}^m (-M) \Delta x_i > (-M) \cdot \frac{\epsilon}{2M} = -\frac{\epsilon}{2}.$$

Hvert av de  $s$  første delintervallene for  $R$  ligger helt inneholdt i et av delintervallene til nedresummen  $S$ , og det følger at summen av disse  $s$  leddene ikke kan være mindre enn  $S$ . Vi får dermed

$$R > S - \epsilon/2 > (I - \epsilon/2) - \epsilon/2 = I - \epsilon.$$

På den annen side, siden  $f$  er integrerbar finnes en øvresum  $S_+$  for  $f$  slik at

$$S_+ < I - \epsilon/2.$$

Ved å gjøre en tilsvarende konstruksjon med denne, kan man finne en  $\delta_2 > 0$  slik at hvis  $R$  er en Riemannsum for  $f$  på  $D$  med maskevidde mindre enn  $\delta_2$ , så er  $R < I + \epsilon$ . La  $\delta$  være den minste av  $\delta_1$  og  $\delta_2$ . Hvis da maskevidden til  $R$  er mindre enn  $\delta$ , er

$$|R - I| < \epsilon.$$

Dermed har vi vist at  $f$  er integrerbar på  $[a, b]$  med integral  $I$ . ■

### **Teorem 2** Analysens fundamentalteorem, del 1

Hvis  $f$  er kontinuertlig på et intervall  $I$ , så er  $f$  integrerbar på ethvert lukket intervall inneholdt i  $I$ . Hvis  $c \in I$ , så er funksjonen  $A : I \rightarrow \mathbf{R}$  definert for hver  $t \in I$  ved

$$A(t) = \int_c^t f(x) dx$$

kontinuertlig på  $I$ , og den oppfyller  $A'(t) = f(t)$  på det indre av  $I$ .

**Bevis** Siden  $f$  er kontinuertlig, gir teorem 9.9.9 at  $f$  er begrenset på ethvert lukket intervall inneholdt i  $I$ . Dermed fins både nedre- og øvreintegralet av  $f$  på alle slike intervaller. La  $A_-(t)$  og  $A_+(t)$  være definert som  $A(t)$  i teoremet, bortsett fra at vi bruker henholdsvis nedre- og øvreintegral.

La  $c \in I$ , la  $t$  være et indre punkt i  $I$ , og la  $h \neq 0$  være slik at  $t + h \in I$ . Ved ekstremverdisetningen har  $f$  et maksimum  $M$  og et minimum  $m$  på det lukkede intervallet mellom  $t$  og  $t + h$ . Vi skal først begrunne at

$$m \cdot h \leq A_-(t+h) - A_-(t) \leq M \cdot h.$$



**Bevis** Velg  $I = [a, b]$  og  $c = a$  i fundamentalteoremets del I. Siden  $F'(x) = A'(x) = f(x)$ , fins ved teorem 1.8.10 en konstant  $C$  slik at  $F(x) = A(x) + C$  for alle  $x \in [a, b]$ . Men siden  $A(a) = 0$ , får vi da

$$F(b) - F(a) = [A(b) + C] - [A(a) + C] = A(b) = \int_a^b f(x) dx. \quad \blacksquare$$

## 1.9 Oppgaver

1. La  $f(x) = x^3$ . La  $R$  være Riemannsummen til  $f$  på intervallet  $[0, 1]$  som er slik at alle rektangelbreddene er  $\Delta x = 0.2$ , og  $x_i^*$  er høyre endepunkt i hvert av delintervallene. Illustrer  $R$  på en figur, og finn verdien til  $R$ .

2. La  $f(x) = 4x$ . La

$$R_n = \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i$$

være Riemannsummen for  $f$  på intervallet  $[0, 1]$  som fås ved å dele intervallet i  $n$  like deler og bruke høyre endepunkt av hvert delintervall som  $x_i^*$ .

a) Vis at  $R_n = \frac{4}{n^2} \sum_{i=1}^n i$ .

b) Finn integralet

$$\int_0^1 4x dx$$

ved hjelp av a). Hint: Du får bruk for resultatet fra eksempel 10.0.0.

3. Bruk Riemannsummer til å finne

$$\int_0^1 x^2 dx.$$

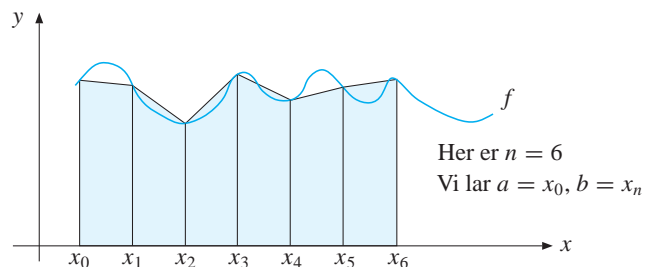
Du kan her bruke at

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}.$$

## 1.10 Numerisk integrasjon

Å regne ut bestemte integraler går greit så lenge vi klarer å antiderivere funksjonen det er snakk om. I mange tilfeller er imidlertid dette vanskelig. Vi kan da prøve å finne en *tilnærming* til integralet ved å bruke en eller annen tilnærmingsteknikk. Dette kalles **numerisk integrasjon**.

Et eksempel på numerisk integrasjon er å regne ut en Riemannsum. Men figuren under viser en annen idé:



Her tilnærmer vi ved å bruke *trapeser* istedenfor rektangler. Vi deler intervallet  $[a, b]$  opp i  $n$  biter med lengde

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}.$$

Arealet av hvert trapes blir  $\Delta x$  ganget med gjennomsnittlig høyde, så tilnærmingen blir

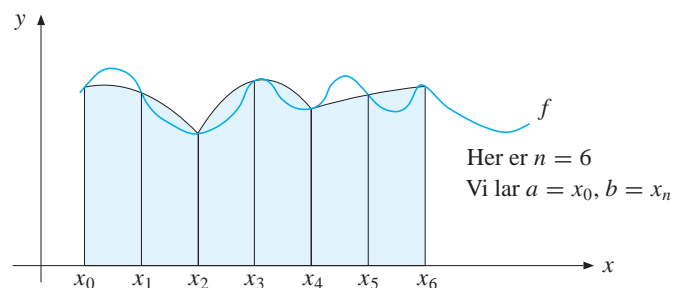
$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} \cdot \Delta x + \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \cdot \Delta x + \dots + \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2} \cdot \Delta x$$

Alle funksjonsverdiene unntatt  $f(x_0)$  og  $f(x_n)$  forekommer her to ganger, så vi får følgende formel:

**Trapesmetoden** I situasjonen ovenfor kan vi bruke følgende tilnærming:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{\Delta x}{2} \left[ f(x_0) + f(x_n) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right].$$

Trapesmetoden bruker stykkevis lineærtilnærming til funksjonen. Med **Simpsons metode** bruker vi isteden parabelbiter. Ideen er illustrert på figur 1.10.1.



Figur 1.10.1

Vi bruker først en parabelbit som stemmer med  $f(x)$  i de tre punktene  $x_0$ ,  $x_1$  og  $x_2$ . Deretter velger vi en ny parabelbit som stemmer med  $f(x)$  i punktene  $x_2$ ,  $x_3$  og  $x_4$ . Og så videre. Vi flytter oss to delepunkter bortover for hver parabelbit, så vi forutsetter at vi har delt intervallet opp med et *jevnt* antall delepunkter. Kaller vi dette antallet  $2n$ , viser det seg (se oppgave 5) at vi får følgende:

**Simpsons metode** Hvis  $\Delta x = (b - a)/2n$ , blir tilnærmingen

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{\Delta x}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 4f(x_{2n-1}) + f(x_n)]$$

der koeffisientene 4 og 2 *veksler* i leddene svarede til prikkene.

Man kan også utlede uttrykk for *feilen* i tilnærmingen når man bruker de to numeriske metodene vi har sett på. Vi dropper utledningen, men her er resultatene:

$$\text{Feil for trapesmetoden: } \frac{(b - a)^3 \cdot |f''(c)|}{12n^2} \quad \text{for en } c \in [a, b]$$

$$\text{Feil for Simpsons metode: } \frac{(b - a)^5 \cdot |f^{(4)}(c)|}{2880n^4} \quad \text{for en } c \in [a, b]$$

Vi må her forutsette henholdsvis at  $f$  har en kontinuerlig annenderivert og en kontinuerlig fjerdederivert. Siden tallet  $c$  i formelene er ukjent, må man i praksis nøye seg med å sette inn en *øvre grense* for hvor store

$$|f''(c)| \text{ og } |f^{(4)}(c)|$$

kan bli når  $c \in [a, b]$ . Dette gir et estimat for feilen.

De to feilestiamtene ovenfor viser at Simpsons metode er “bedre” enn trapesmetoden når antall delepunkter  $n$  er stort. Feilen i trapesmetoden “går som”

$$\frac{1}{n^2},$$

mens feilen i Simpsons metode “går som”

$$\frac{1}{n^4}.$$

Når  $n$  er stor nok, vil derfor feilen i Simpsons metode være minst.

**Eksempel 1** Bruk trapesmetoden til å finne

$$\int_0^1 \sqrt{1 + x^3} dx$$

med feil mindre enn 0.01.

**Løsning** Vi må velge  $n$  så stor at vi er sikre på at feilen er mindre enn 0.01. Vi trenger den annenderiverte av

$$f(x) = \sqrt{1 + x^3}.$$

Den blir

$$f''(x) = \frac{3x^4 + 12x}{4(\sqrt{1+x^3})^3}$$

Vi må finne en øvre grense for hvor stor absoluttverdien av  $f''(x)$  kan bli når  $x \in [0, 1]$ . Vel, hvis vi erstatter  $x$  med 1 i telleren og 0 i nevneren, burde vi få en slik grense:

$$|f''(x)| \leq \frac{3 + 12}{4(\sqrt{1+0})^3} = \frac{15}{4}$$

Feilen vil da ifølge formelen oppfylle

$$\frac{(b-a)^3 \cdot |f''(c)|}{12n^2} \leq \frac{(1-0) \cdot (15/4)}{12n^2} = \frac{15}{48n^2}$$

Kravet vi må ha oppfylt, blir altså at

$$\frac{15}{48n^2} < 0.01,$$

dvs.  $15 < 0.48n^2$ , som gir at  $n^2 > 31.25$ . Dette betyr at trapesmetodens tilnærming med

$$n = 6$$

er tilstrekkelig. Utregningen av selve tilnærmingen droppes her. ■

## 1.10 Oppgaver

**1.** Finn tilnærmede verdier for integralene ved å bruke trapesmetoden med  $n = 5$ . Sammenlikne med det eksakte svaret.

a)  $\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$                       b)  $\int_1^2 x^3 dx$

**2.** Finn integralet  $\int_1^2 (1/x) dx$  med feil mindre enn 0.01 ved å bruke

a) Trapesmetoden                      b) Simpsons metode

**3.** Anta at vi vil lage en tilnærming til integralet av en funksjon  $f$  på et intervall  $[a, b]$  ved å dele intervallet i  $n$  biter med lengde  $\Delta x$ . Vis at hvis vi bruker en Riemannsum for  $f$  med *midtpunktet* i hvert delintervall som  $x_i^*$ , blir tilnærmingen vi får

$$\int_a^b f(x) dx \approx \Delta x \sum_{i=0}^{n-1} f(a + i\Delta x + \Delta x/2)$$

**4.** Vis at formelen i trapesmetoden kan skrives på den mer programmeringsvennlige formen

$$\frac{\Delta x}{2} \left[ f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(a + i\Delta x) \right]$$

**5.** I denne oppgaven skal vi se hvordan man utleder tilnærmingsuttrykket i Simpsons metode.

a) Vis at parabolen  $p(x) = rx^2 + sx + t$  oppfyller

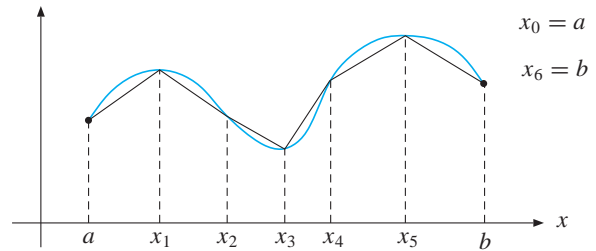
$$\int_a^b p(x) dx = \left[ p(a) + 4p(m) + p(b) \right] \frac{\Delta x}{3},$$

der  $\Delta x = \frac{1}{2}(b-a)$  og  $m = \frac{1}{2}(a+b)$ .

b) Utled Simpsons tilnærming.

## 1.11 Lengde av grafer

Vi skal nå definere hva som menes med *lengden* av grafen til en funksjon  $f$  på et intervall  $[a, b]$ . Figuren under viser hvordan vi kan anslå denne “lengden”. Vi lager en oppdeling  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ , måler lengden av linjestykket fra  $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$  til  $(x_i, f(x_i))$  for hver  $i$ , og summerer.



Merk at siden den rette linjen gir den korteste veien mellom to punkter, er lengdeanslaget vårt *mindre* enn den virkelige lengden. Derfor:

- Vi definerer lengden av grafen til  $f$  på  $[a, b]$  som *minste øvre grense* for mengden av lengdeanslag som fremkommer på denne måten.

Hvis denne sup-verdien ikke finnes, sier vi at grafen har *uendelig lengde*. Til beregning av graflengder i praksis bruker vi følgende teorem.

### Teorem 1 Graflengde

Hvis  $f'(x)$  er kontinuerlig på  $[a, b]$ , så er lengden  $s$  av grafen til  $f$  på  $[a, b]$  gitt ved

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx.$$

**Bevis** Gitt en oppdeling  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ . Lengden av linjestykket mellom punktene  $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$  og  $(x_i, f(x_i))$  er da

$$\sqrt{[x_i - x_{i-1}]^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2} = \sqrt{1 + \left[ \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \right]^2} \Delta x_i,$$

der  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ . Ved middelverdisetningen fins et tall  $x_i^* \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$  slik at

$$\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(x_i^*).$$

Setter vi inn dette og summerer over alle  $i$ , ser vi at den totale lengden av tilnærmingen vår blir

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2} \Delta x_i.$$

Dette er en Riemannsum for den kontinuerlige funksjonen  $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$  på intervallet  $[a, b]$ . Ved teorem 10.0.0 vil Riemannsummen gå mot integralet i teoremet når maskevidden i oppdelingen går mot 0. ■

Vi definerer lengden til grafer i “y-retning” på helt tilsvarende måte som vi har gjort for grafer i x-retning. Hvis  $f$  er en funksjon definert på intervallet  $[a, b] \subseteq \mathbf{R}$ , er grafen

til  $f$  regnet i y-retning

mengden av alle punkter

$(x, y)$  i planet slik at

$x = f(y)$  og  $y \in [a, b]$ .

Se figuren til høyre.

Ved ombytting av rollene

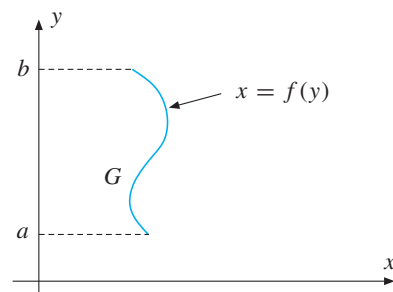
til  $x$  og  $y$  i teorem 1.11.1,

får vi følgende resultat:

Hvis  $f'$  er kontinuerlig på

intervallet  $[a, b]$  så er

lengden til grafen  $G$



$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(y)]^2} dy$$

Merk at det ikke har noe å si om vi kaller integrasjonsvariabelen  $y$  eller  $x$  her, den forsvinner jo når vi setter inn grensene uansett.

Til slutt: Hvis  $K \subseteq \mathbf{R}^2$  er en union  $K = K_1 \cup K_2$  slik at snittet  $K_1 \cap K_2$  av bitene har høyst endelig mange punkter og lengdene til  $K_1$  og  $K_2$  er definert, så definerer vi lengden av  $K$  som summen av lengdene til  $K_1$  og  $K_2$ . Dette kan brukes til å finne lengden av “kurver” som består av to eller flere grafbiter. Et eksempel er *sirkler*, se neste seksjon.

## 1.11 Oppgaver

1. Du skal lage en vannrenne med tverrsnitt som grafen til  $f(x) = \sqrt{|x|^3}$  for  $x \in [-1, 1]$  ved å bøye til en metallplate. Avstanden mellom kantene øverst på rennen skal altså være 2, og rennens dybde skal være 1. Hvor bred plate må du starte med?

2. Finn lengden av grafen til funksjonen  $f$  på intervallet  $[1, 2]$ .

Hint til d):  $f$  har en invers.

a)  $f(x) = 2x + 1$

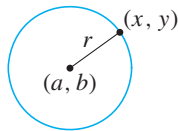
b)  $f(x) = x\sqrt{x}$

c)  $f(x) = \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{x}$

d)  $f(x) = \left(\sqrt[3]{x}\right)^2$

## 1.12 Anvendelse: Sirkler

I denne seksjonen skal vi se på hvordan integrasjonsteorien vi nå har utviklet, kan benyttes til å studere sirkler. Vi har nå et apparat som gjør at vi i tillegg til å kunne definere begrepet “sirkel” presist, også kan bevise formlene  $O = 2\pi r$  for omkrets og  $A = \pi r^2$  for areal på en presis måte. Vi starter med selve definisjonen av sirkel:



**Figur 1.12.1**  
Sirkel

### Definisjon 1 Sirkel

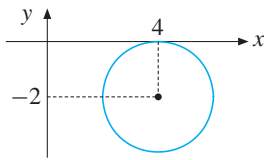
Med *sirkelen* med sentrum  $(a, b)$  og radius  $r \geq 0$  menes mengden av alle punkter  $(x, y)$  i planet som ligger i avstand  $r$  fra punktet  $(a, b)$ . Se figur 10.0.0.

Merk at denne definisjonen bygger på den presise definisjonen 10.0.0 av avstanden mellom to punkter i planet. Ved hjelp av dette får vi:

### Teorem 1 Likningen for en sirkel

Sirkelen med sentrum  $(a, b)$  og radius  $r$  består av alle punkter  $(x, y)$  i planet som oppfyller likningen

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$



**Figur 1.12.2**

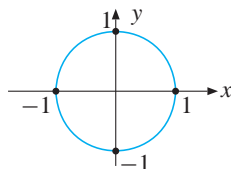
**Bevis** Ved avstandsdefinisjonen 10.0.0 er kravet for å ligge på sirkelen at vi har

$$r = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}.$$

Kvadrér så begge sider. ■

**Eksempel 1** Se figur 1.12.2. Sirkelen med sentrum  $(4, -2)$  og radius 2 har likning

$$(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 4. \quad \blacksquare$$



**Figur 1.12.3**  
Enhets sirkelen

**Eksempel 2** Sirkelen med sentrum  $(0, 0)$  og radius 1 har likning

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Denne sirkelen kalles **enhets sirkelen**. Se figur 1.12.3. ■

**Definisjon 2 Tallet  $\pi$** 

Vi definerer tallet  $\pi$  som halvparten av omkretsen til enhetssirkelen. Per definisjon er altså omkretsen av enhetssirkelen  $2\pi$ .

Denne definisjonen gir mening, for vi kan oppfatte enhetssirkelen som unionen av grafen til to eller flere funksjoner. Lengden av funksjonsgrafer er definert i forrige seksjon. Ved å tilnærme omkretsen av enhetssirkelen ved rette linjestykker kan man vise at  $\pi \approx 3.14$ .

**Teorem 2 Omkrets og areal av sirkler**

Arealet  $A$  avgrenset av en sirkel med radius  $r \geq 0$  og omkretsen  $O$  av sirkelen er gitt ved henholdsvis

$$A = \pi r^2 \quad \text{og} \quad O = 2\pi r.$$

**Bevis** Jeg har lagt beviset opp som en sekvens av oppgaver. Uten tap av generalitet kan vi (se kommentar i slutten av beviset) anta at sirkelen vår har sentrum i origo. Den har da likning  $x^2 + y^2 = r^2$ .

a) Vis at omkretsen av sirkelen vår kan skrives

$$O = 12 \int_0^{r/2} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx,$$

der  $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ . Hint: Tegn figur.

b) Vis at

$$O = 12 \int_0^{r/2} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} \, dx.$$

c) Vis at omkretsen av sirkelen er  $O = 2\pi r$ . Hint: Substituer  $x = rt$  i integralet fra b), og tolk integralet du får som lengden av en bit på enhets-sirkelen.

d) Vis at arealet  $A$  avgrenset av sirkelen er

$$A = 12 \cdot \left[ \int_0^{r/2} \sqrt{r^2 - x^2} \, dx - \frac{\sqrt{3}}{8} r^2 \right].$$

Hint: Figuren fra a) kan antakelig brukes om igjen. For å få  $1/12$  av sirkelens areal, må du trekke fra arealet av en rettvinklet trekant.

e) Vis ved å substituere  $x = rt$  at

$$\int_0^{r/2} \sqrt{r^2 - x^2} \, dx = r^2 \int_0^{r/2} \sqrt{1 - t^2} \, dt.$$



f) Vis at vi for alle  $t \in \langle -1, 1 \rangle$  er

$$\frac{d}{dt} [t\sqrt{1-t^2}] = \sqrt{1-t^2} - \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}.$$

g) Bruk e) til å vise at

$$\int_0^{1/2} \sqrt{1-t^2} dt = \frac{\sqrt{3}}{4} + \int_0^{1/2} \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

h) Vis at vi for alle  $t \in \langle -1, 1 \rangle$  har

$$\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} - \sqrt{1-t^2}.$$

i) Vis, ved å kombinere resultatene i g) og h), at

$$\int_0^{1/2} \sqrt{1-t^2} dt = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{6} - \int_0^{1/2} \sqrt{1-t^2} dt.$$

j) Bruk resultatet fra i) til å vise at

$$\int_0^{1/2} \sqrt{1-t^2} dt = \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{12},$$

og vis ved å kombinere med d) og e) at arealet avgrenset av sirkelen vår er  $A = \pi r^2$ .

k) Overbevis deg til slutt om at en sirkel med sentrum i  $(a, b)$  og radius  $r$  har samme omkrets og areal som en sirkel med sentrum i origo og radius  $r$ . Det fins flere måter å tenke på her. Du kan enten resonnerer direkte ut fra definisjonene av graflengde og areal under grafer, eller du kan ta utgangspunkt i likningen for sirkelen med sentrum  $(a, b)$  og substituere

$$u = x - a$$

i integralene du får. ■

## 1.12 Oppgaver

1. Finn likningen for sirkelen som har sentrum i  $(0, -4)$  og radius
2. Skisser sirkelen på en figur, og angi areal og omkrets.
2. Finn likningen for sirkelen som har sentrum  $(-1, 2)$  og radius

3. Illustrer sirkelen på en figur.

3. Finn likningen for sirkelen som går gjennom de tre punktene  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$  og  $(1, 2)$ .

## 1.13 Lineær algebra

Et *lineært likningsystem med  $m$  likninger og  $n$  ukjente* er et system som kan skrives på standardformen

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

der alle  $a$ -ene og  $b$ -ene er konstante tall, og  $x_1, \dots, x_n$  er de ukjente. Det finnes flere systematiske metoder for å løse slike. For våre formål vil den viktigste være **Gauss-Jordan-eliminering**, i denne boken ofte kalt kun **Gauss-eliminering**. Vi går ikke gjennom metoden her, den er dekket f.eks. i MIP.

### Matriser og determinanter

Med en  $m \times n$ -matrise menes et "tallskjema" med  $m$  linjer og  $n$  søyler. *Determinanten* til  $2 \times 2$ -matriser er gitt ved formelen

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Større determinanter enn  $2 \times 2$  regnes per definisjon ut ved å "løse opp etter første linje". For  $3 \times 3$ -matriser har vi

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} = \text{etc.}$$

Reglene for slik oppløsning er at fortegnet veksler  $+ - + - + -$  bortover (pluss først), og at de små "underdeterminantene" vi får å gange hvert tall med frem-kommer ved å *stryke den linjen og søylen* tallet er med i. Lineære likningsystemer som har *bare nuller* på høyre side når de står på standardform, kalles *homogene*. Alle homogene, lineære liknings-systemer har den trivielle null-løsningen, dvs. de er *aldri* selvmotsigende. Likningsystemer som ikke er homogene, kalles *inhomogene*.

Hvis  $A$  er en matrise, lar man  $A_{ij}$  bety tallet som står i linje  $i$  og søyle  $j$  i matrisen  $A$ . Hvis  $A$  er en  $(3 \times 3)$ -matrise, har vi altså f.eks.

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}.$$

Vi kan nå lage en formel som uttrykker hvordan vi regner ut determinanten til en  $n \times n$ -matrise ved å løse opp etter første linje:

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} A_{1i} \begin{vmatrix} A_{21} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} \text{ søyle } i \text{ vekk}$$

Denne formelen ser teknisk ut, men la meg prøve å forklare. Hvis for eksempel  $n = 3$ , har vi en  $3 \times 3$ -determinant. Formelen sier da, hvis vi skriver ut summetegnet:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} &= (-1)^2 A_{11} \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}^{\text{søyle 1 vekk}} \\ &+ (-1)^3 A_{12} \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}^{\text{søyle 2 vekk}} \\ &+ (-1)^4 A_{13} \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}^{\text{søyle 3 vekk}} \\ &= A_{11} \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} - A_{12} \begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} + A_{13} \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Merk her at vi fikk  $(-1)^2 = 1$ ,  $(-1)^3 = -1$  og  $(-1)^4 = 1$ , slik at fortegnene stemmer. Faktoren  $(-1)^{j+1}$  i formelen er med andre ord en "fortegnsmark" som er lagt inn for å produsere vekslende fortegn.

Vi skal nå se på to alternative måter å regne ut determinanter på, nemlig *oppløsning etter første søyle* og *beregning ved Gauss-eliminasjon*.

### Teorem 1 Oppløsning etter første søyle

Determinanter kan også finnes ved oppløsning etter 1. søyle. Regler:

- Fortegnet veksler  $+ - + - + -$  nedover (pluss først)
- De små "underdeterminantene" vi får å gange hvert tall med fås som før ved å stryke linjen og søylen tallet er med i.

For  $3 \times 3$ -matriser har vi f.eks.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + g \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$$

**Bevis** Vi skal vise ved induksjon på  $n$  at teoremet holder for alle  $(n \times n)$ -matriser der  $n \geq 3$ . Trinn 1 er å sjekke at teoremet holder for  $(3 \times 3)$ -matriser. Dette går greit, for hvis du regner videre på uttrykket for den oppløste  $(3 \times 3)$ -determinanten i boksen ovenfor, får du

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a(ei - fh) - d(bi - ch) + g(bf - ce).$$

Ganger du inn i parentesene, får du samme slutt svar som om du løser  $(3 \times 3)$ -determinanten opp etter første linje. Sjekk dette.

Anta nå at teoremet holder for  $(n - 1) \times (n - 1)$ -matriser, og la  $A$  være en gitt  $n \times n$ -matrise. Determinanten til  $A$  kan da skrives

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix}.$$

Løser vi denne opp etter første søyle, får vi

$$\sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} A_{j1} \begin{vmatrix} A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix}_{\text{linje } j \text{ vekk}} \quad (1)$$

Løser vi den opp etter første linje, får vi

$$\sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} A_{1i} \begin{vmatrix} A_{21} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix}_{\text{søyle } i \text{ vekk}} \quad (2)$$

Vi må vise at uttrykkene (1) og (2) gir samme svar. Det er i alle fall klart at de to uttrykkene har ett ledd felles, nemlig det som inneholder  $A_{11}$ . La  $D'$  og  $D$  være henholdsvis uttrykket (1) og uttrykket (2), *fratrasket* dette leddet. Det er da nok å vise at  $D' = D$ . Vi har

$$D = \sum_{i=2}^n (-1)^{i+1} A_{1i} \begin{vmatrix} A_{21} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix}_{\text{søyle } i \text{ vekk}}$$

Uttrykket for  $D$  består av  $(n - 1) \times (n - 1)$ -determinanter, så ved induksjonshypotesen kan vi regne hver av disse videre ut ved å løse opp etter første søyle. Resultatet blir (se seksjon MIP 1.10 om dobbelsummer)

$$D = \sum_{i=2}^n (-1)^{i+1} A_{1i} \sum_{j=2}^n (-1)^j A_{j1} \begin{vmatrix} A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix}_{\text{linje } j \text{ vekk}} \quad (3)$$

Merk at fortegnsfaktorene stemmer. Videre har vi

$$D' = \sum_{j=2}^n (-1)^{j+1} A_{j1} \begin{vmatrix} A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix}_{\text{linje } j \text{ vekk}}$$

Uttrykket for  $D'$  består også av  $(n-1) \times (n-1)$ -determinanter, og disse kan vi i henhold til definisjonen regne ut ved å løse opp etter 1. linje. Resultatet blir

$$D' = \sum_{j=2}^n (-1)^{j+1} A_{j1} \sum_{i=2}^n (-1)^i A_{1i} \begin{vmatrix} A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{søyle } i \text{ vekk} \\ \text{linje } j \text{ vekk} \end{array} \quad (4)$$

Men vi har følgende generelle regneregler for dobbelsummer (se seksjon 10.0.0):

$$\sum_i a_i \sum_j b_j = \sum_i \sum_j (a_i \cdot b_j) = \sum_j b_j \sum_i a_i.$$

Ved hjelp av denne får vi at høyresidene i både (3) og (4) kan skrives som dobbelsummen

$$\sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n (-1)^{i+j+1} A_{1i} A_{j1} \begin{vmatrix} A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{søyle } i \text{ vekk} \\ \text{linje } j \text{ vekk} \end{array}$$

Ergo har vi  $D = D'$ . ■

### Teorem 2 Gauss-eliminering på determinanter

1. Hvis to linjer i en determinant byttes, skifter determinanten fortegn.
2. Å legge *et tall ganger en linje* til *en annen linje* endrer ikke en determinant.
3. Hvis en av linjene i determinanten ganges med et tall  $k$ , så ganges determinanten med  $k$  også.

**Bevis** (1) Vi skal først vise dette for to nabolinjer, ved induksjon på størrelsen  $n$  av determinanten. Første trinn er å sjekke at det holder for  $n = 2$ . Det gjør det, for vi har

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = - \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}.$$

Anta nå at (1) holder for determinanter av størrelse  $n$ , og la en  $(n+1) \times (n+1)$ -matrise  $A$  være gitt. La  $D = \det A$ . Oppløsning etter 1. søyle gir

$$D = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} A_{i1} D_i,$$

der  $D_i$  er determinanten  $D$  med første søyle samt linje  $i$  fjernet. Anta at vi bytter om linje  $k$  og linje  $k+1$  i determinanten  $D$ . Hvis da  $i$  er forskjellig fra  $k$  og  $k+1$ ,

vil determinanten  $D_i$  få ombyttet to av radene sine. Ved induksjonshypotesen vil den dermed skifte fortegn. De to determinantene  $D_k$  og  $D_{k+1}$  vil derimot være uforandret. Men også leddene med dem vil skifte fortegn, fordi  $(-1)^k = -(-1)^{k+1}$ . Ergo skifter *samtlig*e ledd i summen over fortegn, og vi har bevist at regelen holder for nabolinjjer.

Men det er lett å overbevise seg om at et vilkårlig bytte av to linjer kan utføres som et *odde* antall ombyttinger av nabolinjjer. Sjekk dette på noen eksempler. Dermed er (1) bevist.

(2) Induksjon på  $n$  igjen. Regelen er grei å sjekke for  $n = 2$ . Anta at den holder for størrelse  $(n \times n)$ , og la en  $(n + 1) \times (n + 1)$ -determinant være gitt. Gjør først noen passende ombyttinger av rader slik at de to radene som inngår i (2) blir de to *nederste* i determinanten. Ved (1) kan dette gjøres slik at den nye determinanten har *samme verdi* som den gamle. Gjør så operasjon (2) på de to nederste linjene. Pga. induksjonshypo-tesen vil dette ha null effekt på verdien av determinanten, siden ingen av  $(n \times n)$ -determinantene vi får å gange med ved oppløsning etter første linje endres, og første linje heller ikke endres. Bytt så tilbake.

(3) Ved et visst antall ombytter kan vi plassere linjen som skal ganges med  $k$  som første linje. Denne byttingen medfører høyst et fortegnsskifte, og når vi så ganger første rad med  $k$  er det opplagt at hele determinanten ganges med  $k$  også. (Oppløsning etter 1. linje). Til slutt bytter vi den multipliserte raden tilbake på plass, og får da fortegnsskifte hvis og bare hvis vi fikk det da vi byttet den andre veien. Totalt blir det dermed ikke noe fortegnsskifte. ■

### **Teorem 3    Antall løsninger av likningssystemer**

Gitt et lineært likningssystem med like mange likninger som ukjente, la  $D$  være determinanten til koeffisientmatrisen. Da har vi at

$$\text{Systemet har en entydig løsning} \iff D \neq 0.$$

**Bevis** Hvis et likningssystem med  $n$  likninger og  $n$  ukjente har entydig løsning, betyr det at koeffisient-matrisen  $M$  kan Gausses ned til en matrise som har bare 1-ere langs diagonalen, og nuller ellers. Determinanten til en slik redusert matrise er 1, dvs. ikke 0. Men dermed kan ikke  $\det(M)$  være 0 heller, for ved teorem 1.13.2 kan ingen Gauss-operasjon endre en determinant som er 0 til en som *ikke* er 0. Omvendt, hvis systemet ikke har en entydig løsning, må det bety at koeffisientmatrisen  $M$  kan Gausses over til en matrise som har en ren nullrad. Og determinanten til en matrise med en nullrad er opplagt 0. Ved teorem 1.13.2 må da  $\det(M) = 0$ . ■

## Regning med matriser

Addisjon og subtraksjon av matriser samt multiplikasjon med et tall foregår komponentvis, dvs. ved å regne med tallene på hver plass separat. Eksempler:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 7 & 4 \\ -1 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 4 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2 \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 4 & 14 \end{bmatrix}$$

Generelt uttrykt: Hvis  $A$ ,  $B$  og  $C$  er  $(m \times n)$ -matriser slik at  $A + B = C$ , så er elementene i  $C$  gitt ved  $C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$  for alle  $i$  og  $j$ . Tilsvarende for subtraksjon. For at vi skal kunne legge sammen eller trekke fra hverandre to matriser, må de altså være av akkurat samme  $(n \times m)$ -format. Hvis  $A$  og  $B$  er  $(m \times n)$ -matriser slik at  $B = kA$ , der  $k$  er et reelt tall, så er elementene i  $B$  gitt ved  $B_{ij} = k \cdot A_{ij}$ .

La nå  $A$  være en  $(m \times k)$ -matrise, og la  $B$  være en  $(k \times n)$ -matrise. Med produktet av matrisene  $A$  og  $B$  menes  $(m \times n)$ -matrisen  $C$  gitt ved

$$C_{ij} = \sum_k A_{ik} B_{kj}, \quad (*)$$

Vi skriver  $C = A \cdot B$ , eller kortere  $C = AB$ .

### Teorem 4 Regneregler for matriser

La  $A$ ,  $B$  og  $C$  være matriser av slikt format at regneoperasjonene nedenfor er definert. Da gjelder

1.  $A(B + C) = AB + AC$
2.  $A(B - C) = AB - AC$
3.  $(A + B)C = AC + BC$
4.  $(A - B)C = AC - BC$
5.  $(AB)C = A(BC)$  (dvs. matrisemultiplikasjon er assosiativt)
6.  $A + B = B + A$        $A + (B + C) = (A + B) + C$
7.  $A(aC) = (aA)C = a(AC)$  (hvis  $a$  er et reelt tall)

**Bevis** La som vanlig  $A_{ij}$  bety tallet i linje  $i$  og søyle  $j$  i matrisen  $A$ , tilsvarende for andre matriser. Nøkkelen til dette beviset er å uttrykke de ulike

regneoperasjonene ved komponentene  $A_{ij}$ . F.eks. er  $(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$ . For matrisemultiplikasjon har vi den elegante formelen

$$(AB)_{ij} = \sum_k A_{ik} B_{kj}, \quad (*)$$

som jeg nå skal forklare. La oss ta det første eksemplet på matrisemultiplikasjon som vi så på i denne seksjonen, altså

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

La oss kalle disse matrisene for henholdsvis  $A$ ,  $B$  og  $AB$ . Merk at da er, for eksempel

$$(AB)_{21} = A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} + A_{23}B_{31} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 5.$$

Dette er i henhold til den formelen (\*). Ved å studere dette og andre eksempler, vil du kunne overbevise deg om at (\*) holder generelt. Merk at i (\*) er det underforstått at summen går fra  $k = 1$  til  $k = m$ , der  $m$  er antall søyler i  $A$ . Vi forsetter å underforstå slike ting i regningene under. Dessuten bruer vi regnereglene for summer (seksjon 10.0.0).

Bevis for lov 1:

$$\begin{aligned} [A(B + C)]_{ij} &= \sum_k A_{ik}(B + C)_{kj} = \sum_k A_{ik}(B_{kj} + C_{kj}) \\ &= \sum_k (A_{ik}B_{kj} + A_{ik}C_{kj}) = \sum_k A_{ik}B_{kj} + \sum_k A_{ik}C_{kj} \\ &= (AB)_{ij} + (BC)_{ij} = (AB + BC)_{ij} \end{aligned}$$

Lov 2, 3 og 4 går på samme måten. Bevis for lov 5:

$$\begin{aligned} [A(BC)]_{ij} &= \sum_k A_{ik}(BC)_{kj} = \sum_k A_{ik} \left( \sum_r B_{kr} C_{rj} \right) \\ &= \sum_k \left( \sum_r A_{ik} B_{kr} C_{rj} \right) = \sum_r \left( \sum_k A_{ik} B_{kr} C_{rj} \right) \\ &= \sum_r \left( \sum_k A_{ik} B_{kr} \right) C_{rj} = \sum_r (AB)_{ir} C_{rj} = [(AB)C]_{ij} \end{aligned}$$

Bevis for lov 6:

$$\begin{aligned} (A + B)_{ij} &= A_{ij} + B_{ij} = B_{ij} + A_{ij} = (B + A)_{ij} \\ [A + (B + C)]_{ij} &= A_{ij} + B_{ij} + C_{ij} = [(A + B) + C]_{ij} \end{aligned}$$



Bevis for lov 7, den ene delen:

$$\begin{aligned} [A(aC)]_{ij} &= \sum_k A_{ik}(aC)_{kj} = \sum_k A_{ik}(aC_{kj}) \\ &= a \sum_k A_{ik}C_{kj} = a([AC]_{ij}) = [a(AC)]_{ij} \end{aligned}$$

Den andre delen av (7) er tilsvarende. ■

*Men hvorfor* definerer man regning med matriser slik som vi har gjort? Addisjon og subtraksjon av matriser virker kanskje noenlunde "naturlig", siden dette foregår komponentvis. Multiplikasjon av matriser med et tall også. Men hva med matrise-multiplikasjon? Hvorfor kunne vi ikke simpelthen definere multiplikasjon av matriser komponentvis også?

Du tror det kanskje ikke, men svaret ligger faktisk gjemt i de regnereglene vi nå har utledet. Slik matrisemultiplikasjon er definert, kan alle lineære likningssystemer skrives på såkalt **matriseform**. Eksempel: Likningssystemet

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x + 6y = 4 \end{cases}$$

kan skrives som matriselikningen

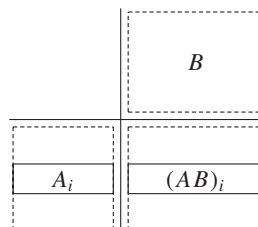
$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Sammen med regnereglene for matriser, særlig  $A(BC) = (AB)C$ , gir dette matriseteorien vår en enorm anvendelighet og teoretisk styrke. Du vil se det etterhvert. Merk at vi *ikke* ville kunnet skrive likningssystemer på matriseform hvis vi hadde definert matrisemultiplikasjon komponentvis slik som addisjon og subtraksjon.

#### **Teorem 5 Produktregelen for determinanter**

La  $A$  og  $B$  være  $n \times n$ -matriser. Da er  $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$ .

**Bevis** La  $A_i$  være den  $i$ -te linjen i matrisen  $A$ , tilsvarende for andre matriser. Observer at slik matrisemultiplikasjon er definert, er da  $(AB)_i = A_i B$ , der produktet på høyre side skal oppfattes som matrisemultiplikasjon. Med ord: Linje nummer  $i$  i produktmatrisen  $AB$  er lik linje  $i$  fra matrisen  $A$  ganget med matrisen  $B$ . Se figuren under.



Det følger av dette at dersom en eller annen Gauss-operasjon blir gjort på matrisen  $A$ , vil akkurat samme operasjon blir gjort på matrisen  $AB$ . Begrunnelse: Det er ut fra figuren opplagt at hvis to linjer i matrisen  $A$  bytter plass, vil de tilsvarende linjene i produktmatrisen også bytte. Og hvis en linje i  $A$  ganges med et tall, vil den tilsvarende linjen i produktet ganges med det samme tallet. Og til slutt: Hvis vi legger  $k \cdot A_j$  til raden  $A_i$  i matrisen  $A$ , blir  $(AB)_i$  endret til

$$(A_i + kA_j)B = A_i B + kA_j B = (AB)_i + k(AB)_j$$

dvs.  $k(AB)_j$  er lagt til raden  $(AB)_i$ . Nemlig.

Så til selve saken. La  $D$  være en "diagonal"-matrise fremkommet ved å gausse  $A$  ned til redusert trappeform. *Enten* har da  $D$  enere nedover hele diagonalen, *eller* så har den enere et stykke nedover og deretter rene nullrader under. Et eksempel på det siste er

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

I begge tilfeller er det klart at

$$\det(DB) = \det(D) \cdot \det(B). \quad (1)$$

For hvis  $D$  har enere hele veien er  $DB = B$  (sjekk det), og hvis  $D$  har en nullrad har  $DB$  også en nullrad pga.  $(DB)_i = D_i B$ , så da er

$$\det(B) = \det(DB) = 0.$$

Anta nå at vi trinnvis gausser oss tilbake fra  $D$  til  $A$ . For hver Gauss-operasjon som gjøres på  $D$  vil da akkurat samme Gauss-operasjon blir gjort på  $DB$ . Dermed vil  $\det(D)$  og  $\det(DB)$  endres på samme måte under alle disse operasjonene, dvs. når venstre side i (1) skifter fortegn, ganges med et tall eller er uforandret, vil også høyre side lide samme skjebne. Dermed beholder vi likheten (1) helt tilbake til starten, der  $D$  er blitt til  $A$ . ■

Hvis  $n \geq 1$  er et helt tall, skriver vi

$$A^n$$

for matriser, akkurat som for tall. Altså  $A^1 = A$ ,  $A^2 = A \cdot A$ ,  $A^3 = A^2 \cdot A$  og så videre. Det er kun for kvadratiske matriser dette er definert.

## Identitetsmatrisene. Inverse av matriser

De kvadratiske matrisene

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{etc.}$$

kalles for *identitetsmatrisene*, og skrives ofte  $I$ . De oppfører seg som tallet 1 når de ganges med andre matriser: Hvis  $I$  er en slik matrise, så er

$$A \cdot I = A \quad \text{og} \quad I \cdot A = A$$

for alle matriser  $A$  slik at produktene er definert.

La  $A$  være en  $n \times n$ -matrise, og la  $I$  være identitetsmatrisen av størrelse  $n \times n$ . Hvis det fins en  $n \times n$ -matrise  $A^{-1}$  slik at

$$A \cdot A^{-1} = I \quad \text{og} \quad A^{-1} \cdot A = I,$$

sies  $A$  å være *inverterbar*. Matrisen  $A^{-1}$  kalles den *inverse* av  $A$ , og uttrykket  $A^{-1}$  leses "A invers".

Hvis  $A$  er inverterbar, så er den inverse matrisen  $A^{-1}$  *unik*. For hvis  $B$  er en annen matrise slik at  $AB = I$ , så gir multiplikasjon med  $A^{-1}$  at

$$A^{-1}(AB) = A^{-1}I, \quad \text{dvs.} \quad (A^{-1}A)B = A^{-1},$$

så  $IB = A^{-1}$ , dvs.  $B = A^{-1}$ . Merk også at  $A$  er den inverse av  $A^{-1}$ .

Det er vanlig å utvide eksponentnotasjonen for matriser til også å inkludere negative eksponenter, akkurat som for tall. Hvis  $M$  er en inverterbar matrise og  $n$  er et negativt heltall, definerer vi

$$M^{-n} \stackrel{\text{def}}{=} (M^{-1})^n.$$

Altså

$$M^{-2} = (M^{-1})^2 = M^{-1} \cdot M^{-1},$$

for eksempel. Analogien med vanlige tall blir perfekt hvis vi dessuten definerer

$$M^0 = I$$

for alle  $(n \times N)$ -matriser, der  $I$  er identitetsmatrisen. Det følger fra dette at eksponentreglene (16) i teorem 1.3.2 nå også gjelder for matriser.

Der finnes flere systematiske metoder for å finne den inverse av en gitt, inverterbar matrise. Blant annet kan man bruke Gauss-eliminasjon, se MIP teorem 10.7.1.

## Transponerte matriser

Hvis  $A$  er en  $m \times n$ -matrise, så definerer vi den  $A^t$  av matrisen  $A$  til å være  $n \times m$ -matrisen man får ved å la linje nr.  $i$  fra  $A$  være søyle nr.  $i$  for den nye matrisen. Eksempel:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{gir} \quad A^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Hvis  $A$  er en  $n \times n$ -matrise, blir den transponerte matrisen  $A^t$  lik matrisen  $A$  "speilet" om diagonalen. Eksempel:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 4 & 8 & 6 \\ 3 & 0 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{gir} \quad A^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 8 & 0 \\ 7 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Merk at vi alltid har  $(A^t)^t = A$ . Følgende er ofte teoretisk nyttig:

### **Teorem 6 Egenskaper ved den transponerte**

1. Hvis matrisene  $A$  og  $B$  er slik at  $AB$  er definert, så er

$$(AB)^t = B^t A^t.$$

2. Hvis  $A$  er en inverterbar matrise, så er også  $A^t$  inverterbar, og

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t.$$

### **Bevis**

- (1) La  $A_{ij}$  være tallet  $i$ -te linje og  $j$ -te søyle i matrisen  $A$ , tilsvarende for andre matriser. Da er

$$(A^t)_{ij} = A_{ji}$$

for alle  $i, j$ . Videre er

$$[(AB)^t]_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_r A_{jr} B_{ri} = \sum_r (A^t)_{rj} (B^t)_{ir} = [B^t A^t]_{ij}$$

- (2) Hvis  $A^{-1}$  fins, så er ved (1)

$$(A^{-1})^t \cdot A^t = (AA^{-1})^t = I^t = I,$$

og dessuten

$$A^t \cdot (A^{-1})^t = (A^{-1}A)^t = I^t = I.$$

Så  $A^t$  er inverterbar med invers matrise  $(A^{-1})^t$ . ■

## Eigenverdier og egenvektorer

Med en **vektor** menes en matrise med én søyle, dvs. en  $(n \times 1)$ -matrise. Tallet  $n$  kalles antallet *komponenter* i vektoren. Ganger du en vektor med  $n$  komponenter med en  $(n \times n)$ -matrise fra venstre, fås en ny vektor med  $n$  komponenter. Eksempel for  $n = 2$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 - 5 \cdot 1 \\ 8 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 17 \end{bmatrix}$$

La  $M$  være en  $(n \times n)$ -matrise, og la  $\mathbf{x}$  være en vektor med  $n$  komponenter, der ikke alle komponentene er 0. Hvis det finnes et tall  $\lambda$  slik at

$$M\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x},$$

så sies  $\mathbf{x}$  å være en **egenvektor** for  $M$  med **egenverdi**  $\lambda$ .

For å finne egenverdier og egenvektorer til en gitt matrise, kan man sette opp likningen  $M\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$  med  $\lambda$  og  $\mathbf{x}$  som ukjente, og prøve å løse denne. Likningen kan gjøres om til et lineært likningssystem, og dette kan så løses ved Gauss-eliminering. Vi går ikke inn på dette her. Se for eksempel MIP. Egenvektorer og egenverdier har mange anvendelser, blant annet på såkalt **populasjonsdynamikk**. Se MIP.

### Teorem 7 Egenvektorer for potenser av matriser

Hvis  $\mathbf{x}$  er en egenvektor for matrisen  $M$  med egenverdi  $\lambda$ , så har vi

$$M^n \mathbf{x} = \lambda^n \mathbf{x}.$$

Så  $\mathbf{x}$  blir en egenvektor for matrisen  $M^n$  også, med egenverdi  $\lambda^n$ .

**Bevis** Å multiplisere vektoren  $\mathbf{x}$  med matrisen  $M^n = M \cdot \dots \cdot M$  er det samme som å multiplisere vektoren med matrisen  $M$  om igjen og om igjen  $n$  ganger. For hver gang blir vektoren ganget med  $\lambda$ , siden den er en egenvektor for  $M$ . Totalt blir den derfor ganget med  $\lambda^n$ . For  $n = 2$  ser det slik ut:

$$\begin{aligned} M^2 \mathbf{x} &= (MM)\mathbf{x} = M(M\mathbf{x}) = M(\lambda\mathbf{x}) \\ &= \lambda(M\mathbf{x}) = \lambda(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^2 \mathbf{x}. \end{aligned}$$

I tredje siste overgang brukte jeg regneregel 7 fra teorem 1.13.4. Tilsvarende for høyere  $n$ -verdier. ■

## Geometrisk tolkning av vektorer

En *vektor* har for oss hittil bare betydning en matrise med én søyle, dvs. en  $(n \times 1)$ -matrise. Vi skal imidlertid nå koble inn *geometriske tolkninger* av vektorbegrepet. I den forbindelse er det vanlig å skrive vektorene horisonalt, med komma mellom komponentene. Vi definerer

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = (a_1, \dots, a_n) = [a_1, \dots, a_n],$$

dvs. vi ser på dette som tre ulike notasjoner for samme objekt. Derimot er  $[a_1, \dots, a_n]$  *ikke* det samme som  $[a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]$ . Sistnevnte objekt (uten kommaer mellom elementene) oppfattes som en  $(1 \times n)$ -matrise, og dette er noe annet enn en  $(n \times 1)$ -matrise. Vi definerer  $\mathbf{R}^n$  som mengden av alle vektorer med  $n$  komponenter, dvs.

$$\mathbf{R}^n = \{ (a_1, \dots, a_n) \mid a_1, \dots, a_n \in \mathbf{R} \}.$$

Dette samsvarer vår tidligere definisjon av  $\mathbf{R}^2$ . Elementene i  $\mathbf{R}^n$  kalles ofte *punkter*. Tallene  $a_1, \dots, a_n$  kalles *koordinatene* til punktet  $(a_1, \dots, a_n)$ . Punktet

$$(0, \dots, 0)$$

kalles *origo*, og skrives  $\mathbf{0}$ . Mengden  $\mathbf{R}^n$  kalles ofte det  *$n$ -dimensjonale rommet*. For dimensjon  $n \geq 4$  er det vanskelig å forestille seg  $\mathbf{R}^n$  geometrisk, men vi kan illustrere det ved figurer i tilfellene  $n = 1$  (tallinjen),  $n = 2$  (planet) og  $n = 3$  ("rommet"). I "rommet"  $\mathbf{R}^3$  må vi bruke tre akser, og de kalles vanligvis  $x$ -aksen,  $y$ -aksen og  $z$ -aksen.

### Definisjon 1 Regneoperasjoner i $\mathbf{R}^n$

La  $\mathbf{a} = [a_1, \dots, a_n]$  og  $\mathbf{b} = [b_1, \dots, b_n]$  ligge i  $\mathbf{R}^n$ . Vi definerer

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = [a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n]$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = [a_1 - b_1, \dots, a_n - b_n]$$

$$-\mathbf{a} = [-a_1, \dots, -a_n]$$

$$k\mathbf{a} = [ka_1, \dots, ka_n] \quad (k \text{ reelt tall})$$

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} \quad (|\mathbf{a}| \text{ kalles } \textit{lengden} \text{ eller } \textit{normen} \text{ til } \mathbf{a})$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n \quad (\text{kalles } \textit{prikkproduktet} \text{ av } \mathbf{a} \text{ og } \mathbf{b})$$

Disse regneoperasjonene har en velkjent geometrisk tolkning som regning med *piler* i tilfellet  $\mathbf{R}^2$  og  $\mathbf{R}^3$ . Det er vanlig å skrive elementene i  $\mathbf{R}^n$  med fete typer ( $\mathbf{a}$  og  $\mathbf{b}$  etc.) når man tenker på dem som piler. I håndskrift bruker man

gjerning en bokstav med pil over, f.eks.  $\vec{a} = (3, 4)$ . Det er også vanlig å skrive elementene med hakeparentes  $[a_1, \dots, a_n]$  når man tenker på dem som piler (altså “vektorer”), og  $(a_1, \dots, a_n)$  når man tenker på dem som punkter.

## Teori for vektorer som heretter tas for gitt

I fortsettelsen vil vi ta stoffet om vektorer i MIP kapittel 10 for gitt. Her behandles blant annet vinkelen mellom vektorer, standardbasisvektorer, vektorproduktet, begrepene avstand og plan i  $\mathbf{R}^n$ , trevektorproduktet (også kalt volumproduktet), lineærkombinasjoner, lineær avhengighet, basis, underrom, bildet til en matrise og rangen til en matrise. Dette stoffet kan selvsagt også finnes i andre kilder om lineær algebra i  $\mathbf{R}^n$ .

## \*1.14 Bevis for resten av grenselovene

Her er bevisene for resten av grenselovene i teorem 1.7.2.

### Lov nr. 3 i tilfellet $a \in \mathbf{R}$

Gitt  $\epsilon > 0$ . Ved trekantulikheten har vi

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - rs| &= |[f(x) - r][g(x) - s] + r[g(x) - s] + s[f(x) - r]| \\ &\leq |f(x) - r| \cdot |g(x) - s| + r|g(x) - s| + s|f(x) - r|. \end{aligned}$$

Igjen vil vi ha dette mindre enn  $\epsilon$ , dvs. vi må få hvert av de tre uttrykkene i siste sum mindre enn en passende  $\epsilon$ -brøk. La  $t$  være det største av tallene  $r$ ,  $s$  og 1. Ved antakelsene kan vi (samme taktikk som over) finne  $\delta > 0$  slik at når  $|x - a| < \delta$ , er  $|f(x) - r|$  og  $|g(x) - s|$  begge mindre enn  $\epsilon/(3t)$ , og dessuten mindre enn 1. Innsetting gir nå at uttrykket ovenfor er mindre enn  $\frac{\epsilon}{3t} \cdot 1 + r \cdot \frac{\epsilon}{3t} + s \cdot \frac{\epsilon}{3t}$ , som igjen er mindre enn  $\epsilon$ .

### Lov nr. 4 i tilfellet $a \in \mathbf{R}$

Vi antar først  $f(x) = 1$  for alle  $x$ . Da er  $r = 1$ . Gitt  $\epsilon > 0$ . Vi får

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{s} \right| = \left| \frac{s - g(x)}{s \cdot g(x)} \right| = \frac{|s - g(x)|}{|s| \cdot |g(x)|}$$

Vi må ha dette mindre enn  $\epsilon$ . Siden  $g(x) \rightarrow s$ , kan vi finne  $\delta > 0$  slik at når  $|x - a| < \delta$ , så er  $|g(x)| > \frac{1}{2}s$  og  $|g(x) - s| < \frac{1}{2}\epsilon s^2$ . Innsetting gir at uttrykket ovenfor er mindre enn  $(\frac{1}{2}\epsilon s^2)/(\frac{1}{2}s \cdot \frac{1}{2}s) = \epsilon$ .

Hvis  $f(x) \neq 1$ , kan vi nå skrive  $f(x)/g(x) = f(x) \cdot (1/g(x))$  og bruke lov 6 til å få at  $f(x)/g(x) \rightarrow r \cdot (1/t) = r/t$ .

**Lov nr. 5 i tilfellet  $a \in \mathbf{R}$** 

Gitt  $\epsilon > 0$ . Siden  $f$  er kontinuerlig i  $x = r$ , må  $f(x) \rightarrow f(r)$  når  $x \rightarrow r$ . Ergo fins  $t > 0$  slik at når  $|x - r| < t$ , er  $|f(x) - f(r)| < \epsilon$ . Og siden  $g(x) \rightarrow r$ , fins  $\delta > 0$  slik at når  $|x - a| < \delta$ , er  $|g(x) - r| < t$ . Men i så fall er jo  $|f(g(x)) - f(r)| < \epsilon$ .

**Lov nr. 1–5 i tilfellet  $a = \pm\infty$** 

Dette er helt tilsvarende bevisene i tilfellet  $a \in \mathbf{R}$ . Endringene som må gjøres er de samme hele veien: De fleste  $\delta$ -er må erstattes med  $A$ -er, de fleste utsagn av typen  $|x - a| < \delta$  må erstattes med  $x > A$  (i tilfellet  $x \rightarrow +\infty$ ) og  $x < A$  (i tilfellet  $x \rightarrow -\infty$ ), og alle antakelser om  $x \neq a$  kan droppes. Som eksempel tar jeg lov 8 i tilfellet  $x \rightarrow -\infty$ .

Gitt  $\epsilon > 0$ . Siden  $f$  er kontinuerlig i  $x = r$ , må  $f(x) \rightarrow f(r)$  når  $x \rightarrow r$ . Ergo fins  $t > 0$  slik at når  $|x - r| < t$ , er  $|f(x) - f(r)| < \epsilon$ . Og siden  $g(x) \rightarrow r$ , fins et tall  $A$  slik at når  $x < A$ , er  $|g(x) - r| < t$ . Men i så fall er jo  $|f(g(x)) - f(r)| < \epsilon$ .



# Kapittel 2

## Diverse temaer

---

*Dette kapitlet bygger på kapitel 1 samt kapitlene 1–7 fra MIP.*

---

## 2.1 Kombinatorikk

*Kombinatorikk* dreier seg om å telle kombinasjonsmuligheter. Vi skal nå se på en rekke typiske kombinatoriske problemer.

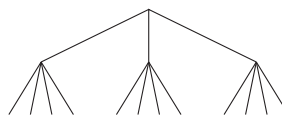
**Problem 1: ANTALL ANTREKK** Anta at du har

- Tre forskjellige bukser: En svart, en blå og en orange
- Fire forskjellige skjorter: En hvit, en gul, en lilla og en rød

Hvor mange ulike antrekk kan du da sette sammen?

### Løsning

Vi tenker oss at du velger buksen først, og deretter skjorten. Vi kan illustrere mulighetene du har ved et såkalt *valgtre*:



Den første forgreningen svarer til det første valget du har, nemlig valg av bukse. Her har du 3 muligheter. Etter at du har valgt bukse, kan du så velge skjorte på 4 ulike måter. Som du ser, blir det totalt

$$3 \cdot 4 = 12$$

grener i valgtreets nedre kant, dvs. du kan lage 12 ulike antrekk. ■

Hvis vi i eksemplet ovenfor i tillegg kunne velge mellom svarte og hvite sokker, ville antallet kombinasjoner bli  $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$ . Hver gren av i valgtreet ville da dele seg i to igjen nederst. Konklusjon: Når du skal gjøre et valg bestående av flere "trinn", finner du antall mulige valg ved å *gange sammen* antall valg du har i hvert trinn.

**Problem 2: ANTALL KØER** På hvor mange måter kan 3 mennesker stille seg i kø etter hverandre?

### Løsning

La oss leke at de tre heter Anne, Berit og Charlotte. Det vi spør etter, er da det samme som å spørre etter hvor mange rekkefølger vi kan skrive opp de tre bokstavene A, B og C etter hverandre i. Mulighetene blir

ABC ACB BAC BCA CAB CBA

Altså er det 6 muligheter. For å se systemet, er det her lurt å skrive dette

$$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6,$$

og tenke slik: Den som skal stå forrest i køen kan velges på 3 måter. Etter at det er gjort, kan nestemann velges på 2 måter (vi har jo brukt opp en allerede). Når de to første er valgt, kan den siste velges på kun én måte. Denne tankegangen kan brukes også for lengre køer. ■

Når man skal telle opp antall rekkefølger et visst antall objekter kan plasseres i, er det altså uttrykk som  $3 \cdot 2 \cdot 1$  og  $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$  man kommer frem til. For enkelhets skyld har man innført en egen notasjon for slike uttrykk, man definerer

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 \qquad 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

og så videre. Utropstegnene leses "fakultet". Generelt er altså  $n!$  ( $n$  fakultet) definert som heltallene fra  $n$  ned til 1 ganget sammen. Mange kalkulatorer har en egen fakultets-knapp. Konklusjon:

Antall rekkefølger  $n$  objekter kan plasseres etter hverandre i, er

$$n! = n(n - 1)(n - 2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Merk at  $1! = 1$ . Fordi det klaffer med visse formler, definerer man dessuten  $0! = 1$ .

Så over til neste problem.

**Problem 3: ANTALL MEDALJEFORDELINGER** En klasse på 20 arrangerer skirenn. Det skal deles ut tre medaljer; gull, sølv og bronse. Hvor mange ulike medaljefordelinger kan de få?

### Løsning

Tankegangen her er ganske lik den i kø-problemet. Anta at vi skal velge ut en medaljefordeling. Da kan vi tenke slik:

- Først velger vi gullvinneren, dette kan gjøres på 20 måter.
- Deretter velger vi sølvvinneren, dette kan gjøres på 19 måter.
- Til slutt velger vi bronsevinneren, dette kan gjøres på 18 måter.

Totalt antall kombinasjoner blir dermed

$$20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840. \quad \blacksquare$$

**Problem 4: ANTALL UORDNEDE UTVALG** Vår klasse på 20 elever skal nå velge et utvalg med 3 elever. Utvalget skal ikke ha noen leder eller noe slikt, det er bare snakk om å velge ut 3 elever. Rekkefølgen elevene blir valgt ut i spiller altså ingen rolle, vi sier utvalget er *uordnet*. Hvort mange slike utvalg fins det?

**Løsning** Vi begynner med å tenke som i medalje-problemet. Første elev i utvalget kan velges på 20 måter, den neste på 19 måter, og den siste på 18 måter. Dette gir  $20 \cdot 19 \cdot 18$  kombinasjoner. Men slik vi skal regne nå, er dette antallet for høyt. Hvis tre av elevene heter Per, Petter og Line, så regnes utvalgene

Per, Petter, Line og Line, Per, Petter

som to *ulike* utvalg i antallet  $20 \cdot 19 \cdot 18$ . I vår problemstilling skal derimot disse to regnes som samme utvalg, fordi rekkefølgen ikke spiller noen rolle. Hvor mange ganger regnes så utvalget Per, Petter og Line om igjen i antallet  $20 \cdot 19 \cdot 18$ ? Jo, det vil jo svare til hvor mange rekkefølger vi kan plassere de tre i, altså  $3 \cdot 2 \cdot 1$ . Jfr. kjøproblemet. Hvert av de ordnede utvalgene på 3 elever regnes altså med  $3 \cdot 2 \cdot 1$  ganger i antallet  $20 \cdot 19 \cdot 18$ . Så antall *uordnede* utvalg blir

$$\frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1140. \blacksquare$$

Regneuttrykket vi fikk i forrige eksempel følger et mønster som er typisk for "uordnede" utvalg. Man har derfor innført en spesiell notasjon for disse tingene. Vi definerer (sjekk at de to siste overgangene stemmer)

$$\binom{20}{3} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{20!}{3! \cdot 17!} = \frac{20!}{3!(20-3)!}.$$

Uttrykket  $\binom{20}{3}$  kalles en **binomialkoeffisient**, og leses gjerne "20 over 3". Generelt definerer man

$$\binom{n}{k} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

for alle naturlige tall  $n$  og  $k$  slik at  $n \geq k$ . Merk at vi har

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{1 \cdot n!} = 1.$$

for alle naturlige tall  $n$ . For  $n \geq k \geq 1$  kan vi konkludere med at

$$\binom{n}{k} = \text{antall måter å velge ut } k \text{ av } n \text{ objekter på, uordnet.}$$

**Eksempel 1** Ved Lotto-trekning plukker man ut 7 av 34 tall. Rekkefølgen tallene trekkes ut i, spiller ingen rolle. Hvor mange ulike Lotto-rekker finnes det?

**Løsning** Dette er et typisk eksempel på uordnet utvalg. Vi skal velge ut 7 av 34 objekter, så antall utvalg blir

$$\binom{34}{7} = \frac{34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 5379616.$$

Direkte forklaring: Anta at du sitter med en penn og skal krysse ut tallene i rekken. Første tall kan velges på 34 måter. Etter at det er gjort, har du 33 valg for tall det neste tallet. Og så videre. På det syvende tallet har du 28 muligheter. Vi må dele på 7! fordi tallene i hver Lotto-rekke kan ordnes i 7! ulike rekkefølger, slik at hver rekke i utgangspunktet blir telt med 7! ganger. ■

## 2.1 Oppgaver

1. Du skal sette sammen et antrekk bestående av en genser, et skjerf, en lue og en bukse. Du kan velge blant 2 genser, 3 skjerf, 2 luer og 7 bukser. Hvor mange kombinasjonsmuligheter har du?
2. På hvor mange måter kan 4 mennesker stille seg i kø etter hverandre?
3. Hvor mange "ord" kan du lage av bokstavene ABCDEF? (Ordene behøver ikke bety noe.)
4. En syklubb med 9 medlemmer skal velge et styre bestående av leder, nestleder og sekretær. Hvor mange ulike styrer kan det bli?
5. I Viking-Lotto plukker man ut 6 av 48 tall. Rekkefølgen tallene trekkes ut i, spiller ingen rolle. Hvor mange ulike Vikinglotto-rekker finnes det?
6. En familie består av bestemor, far, mor og de fire ungene Lars, Hanne, Ellen og Merete. De spiser hver dag middag sammen ved stuebordet, som har 7 plasser. Imidlertid liker de å finne en ny rekkefølge å sitte i hver dag. Vis at familien kan spise middag i mer enn 13 år uten noen gang å sitte i en plasskombinasjon de har brukt før!
7. Årets norske Amandapriser skal deles ut, og kategoriene er i år (1) Beste kvinnelige hovedrolle, (2) beste mannlige hovedrolle, (3) beste regissør, (4) beste fotograf, og (5) beste film. Dessverre har dette vært et gjennomsnittlig år i norsk filmproduksjon, og det finnes kun 4 filmer som er aktuelle for prisene. Juryen har derfor nominert de 4 filmene i alle kategorier. Hvor mange ulike resultater av utdelingen kan det bli?
8. La oss si at en standard bok har 70 tegn plasser pr. linje, 35 linjer pr. side, og 200 sider. Hvor mange tegn plasser inneholder en standardbok? Hvis man bruker et tegnsett med 100 tegn (inkludert store og små bokstaver, tall etc.), hvor mange ulike standardbøker finnes det?
9. En kortstokk består av 52 kort, og en poker-hånd består av 5 kort. Hvor mange ulike pokerhender fins det?
10. Hvis du krysser av 10 tall på en Lottokupong, må du betale 120 ganger prisen for en enkeltrekke.
  - a) Forklar hvorfor.
  - b) Hvor mye ville du ha måttet betale hvis du hadde kunnet krysse av 20 tall?

## 2.2 Sannsynligheter

Et eksperiment der utfallet er usikkert (som f.eks. kast av et krone-stykke) kalles et **stokastisk eksperiment**. Mengden

$$U = \{u_1, \dots, u_n\}$$

av mulige utfall (vi antar det er endelig mange) kalles eksperimentets **utfallsrom**. Å lage en *sannsynlighetsmodell* for eksperimentet betyr å angi sannsynligheter  $p(u_1), p(u_2), \dots, p(u_n)$  for hvert utfall i  $U$ . Hver av sannsynlighetene skal være et tall mellom 0 og 1, og summen av alle sannsynlighetene skal være 1:

$$p(u_1) + p(u_2) + \dots + p(u_n) = 1.$$

En delmengde  $A \subseteq U$  kalles en **begivenhet**. Vi definerer *sannsynligheten* til  $A$  som summen av sannsynlighetene til alle utfallene i  $A$ . Sannsynligheten til  $A$  skrives  $P(A)$ .

**Eksempel 1** La eksperimentet være kast av en terning. Utfallsrommet  $U$  kan da skrives  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Hvis terningen er rettferdig, kan vi bruke sannsynlighetsmodellen gitt ved

$$p(1) = p(2) = \dots = p(6) = 1/6.$$

La  $A$  være begivenheten "at vi får en femmer eller en sekser", dvs.  $A = \{5, 6\}$ . Denne begivenheten består av de to utfallene 5 og 6, og sannsynligheten for  $A$  er dermed  $P(A) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ . ■

Hvis alle utfallene i modellen har samme sannsynlighet, kan vi finne sannsynligheten for en begivenhet  $A$  ved formelen

$$P(A) = \frac{\text{antall utfall i } A}{\text{totalt antall utfall}}$$

**Eksempel 2** La igjen eksperimentet være kast med en vanlig terning. Sannsynligheten for begivenheten at vi får et oddetall på terningen blir da

$$P(\text{oddtall}) = \frac{\text{antall utfall med oddetall}}{\text{totalt antall utfall}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}. \quad \blacksquare$$

Grunnen til at man bruker stor  $P$  i sannsynligheten  $P(A)$  for en begivenhet  $A$  og liten  $p$  i sannsynligheten  $p(u)$  for et enslig utfall  $u$ , er bare at man vil markere at  $A$  er en *delmengde* av  $U$ . Hvis  $A$  består av et enslig utfall  $u$  alene, har vi selvsagt  $P(A) = p(u)$ .

**Eksempel 3** I eksempel 2.1.1 regnet vi ut at det fins 5379616 ulike Lotto-rekker. Sannsynligheten for at vi vinner på en enkeltrekke er dermed

$$P(\text{vinner}) = \frac{\text{antall rekker vi har tippet}}{\text{totalt antall rekker}} = \frac{1}{5379616} \quad \blacksquare$$

## Trinnvis utregning av sannsynligheter

I eksemplet over fant vi sannsynligheten for å vinne i Lotto ved å basere oss på kombinatorikk. Boksen under viser en alternativ tenkemåte:

Sannsynligheten for å få 7 rette på en enkeltrekke i Lotto er

$$P(7 \text{ rette}) = \frac{7}{34} \cdot \frac{6}{33} \cdot \frac{5}{32} \cdot \frac{4}{31} \cdot \frac{3}{30} \cdot \frac{2}{29} \cdot \frac{1}{28}$$

### Forklaring av tenkemåten

Tenk deg at du sitter foran TVen med rekken din i hånden og ser på trekningen. Sannsynligheten for at det første tallet som trekkes ut er blant dine 7 tall, er  $\frac{7}{34}$ . Anta at dette går bra. Det neste tallet trekkes blant 33 tall, og av dem er 6 på rekken din. Sannsynligheten er da altså  $\frac{6}{33}$  for at tall nummer 2 er blant dine resterende 6 tall. Dette er det samme som å si at

$$\frac{P(\text{de to første tallene er blant dine 7})}{P(\text{første tall er blant dine 7})} = \frac{6}{33}$$

Siden sannsynligheten i nevneren til venstre er  $\frac{7}{34}$ , gir oppganging at

$$P(\text{de to første tallene er blant dine 7}) = \frac{7}{34} \cdot \frac{6}{33}$$

Slik fortsetter det. Denne måten å tenke på svarer til at vi regner ut sannsynligheten *trinnvis*, svarende til de trinnene vi må "overleve" underveis til Lotto-gevinsten. Effekten blir at vi finner den totale sannsynligheten ved å *gange sammen* sannsynlighetene vi har for å overleve hvert "trinn".  $\blacksquare$

**2.2 Oppgaver**

**1.** La eksperimentet være kast med en vanlig, rettferdig terning. Finn sannsynligheten for de følgende begivenheter:

- Vi får tre eller høyere
- Vi får verken 5 eller 6

**2.** La nå eksperimentet være at vi kaster to rettferdige terninger på en gang, en hvit og en rød. Utfallet at den hvite terningen viser 4 mens den røde viser 2 kan da skrives

(4, 2)

Vi kan altså skrive utfallene ved å angi resultatet av den hvite terningen først, og deretter den røde.

- Hvor mange utfall har dette eksperimentet? Er alle utfallene like sannsynlige?
- La  $A$  være begivenheten at ingen av de to terningene viser 6. Hvor mange utfall består  $A$  av? Hva er sannsynligheten til  $A$ ?
- La  $B$  være begivenheten at minst en av de to terningene viser 6. Hvor mange utfall består  $B$  av? Hva er sannsynligheten til  $B$ ?

**3.** La eksperimentet være kast av tre rettferdige terninger på en gang, en hvit, en rød og en blå.

- Hvor mange utfall har dette eksperimentet?
- Hva er sannsynligheten for at minst en av terningene viser 6?

**4.** En syklubb består av 6 stykker fra Oslo og 4 fra Bærum. Klubben skal ved loddtrekning velge to representanter som skal reise til en syklubb-kongress på Geilo.

- Hvor mange ulike utvalg kan klubben velge?
- Hvor mange av disse utvalgene består kun av folk fra Oslo?
- Hva er sannsynligheten for at ingen av de to representantene som velges er fra Bærum?

**5.** Det er interessant å sammenlikne svaret fra eksempel 2.2.3 med sannsynligheten for å kræsje når en reiser med fly. Flyselskapene oppgir fra tid til annen tall som angir hvor ofte man "gjennomsnittlig vil falle ned" hvis man flyr kontinuerlig. Det siste jeg mener jeg hørte, var at man faller ned ca. hvert 150. år. Hvor mange halvtimes flyturer svarer 150 år til? Hva blir ut fra dette sannsynligheten for å falle ned på en halvtimes flytur? Hvor stor er denne sannsynligheten sammenliknet med sannsynligheten for å få 7 rette på en rekke i Lotto?

**6.** I Viking-Lotto skal man plukke ut 6 av 48 tall. Hva er sannsynligheten for å vinne på en enkeltrekke i Viking-Lotto?

**7.** I denne oppgaven skal vi finne sannsynligheten for å få nøyaktig 6 rette på en enkeltrekke i vanlig Lotto. Tenk deg at du sitter og ser på trekningen.

- Regn ut sannsynligheten for at de første 6 tallene som trekkes ut er blant de 7 du har i din enkeltrekke.
- Regn ut sannsynligheten for at de første 6 tallene som trekkes ut er blant dine 7, men at det 7. tallet ikke er det.
- Finn sannsynligheten for å få nøyaktig 6 rette på en enkeltrekke.

**8.** La oss leke at du ønsker å loppe et casino for 1000 kroner. I denne forbindelse har du lånt 63000 kroner av en rik venninne. Strategien din er å spille rullett, og *kun* spille på rødt og svart. Rulletten består av svarte og røde felter om hver-andre, og hvis kulen havner på den fargen du har satset penger på, vinner du. I motsatt fall taper du. Hvis du vinner, får du det dobbelte av innsatsen tilbake. Hvis du taper, mister du innsatsen. Sannsynligheten for å vinne i hvert spill er omtrent lik  $1/2$ , og vi regner den som  $1/2$  her.

Du bestemmer deg på forhånd for å satse konsekvent på svart. Du spiller i et seriesystem, som følger:

- Ved første spill satser du 1000 kroner. Vinner du, forlater du casinoet. (Målet er da nådd, for du har 1000 kroner overskudd.)
- Taper du første spill, satser du 2000 kroner i spill nr. 2. Vinner du nå, forlater du casinoet. (Overskuddet er da igjen 1000 kroner.) Hvis ikke, satser du 4000 kroner i neste spill.

Slik fortsetter du, dvs. du dobler innsatsen for hvert spill inntil du enten vinner eller har brukt opp alle de 63000 kronene.

- Finn sannsynligheten for at denne strategien lykkes, dvs. at du forlater casinoet med 1000 kroner i overskudd.
- La  $p$  være sannsynligheten som var svaret på punkt a). La  $q$  være sannsynligheten for at strategien din *ikke* lykkes, dvs. at du taper alle de 63000 kronene. Hva er  $q$ ? Regn ut tallet

$$E = p \cdot 1000 + q \cdot (-63000)$$

Tallet  $E$  kalles *forventningen* knyttet til casino-strategien vår. Kan du tenke deg hvorfor? Har du noen moralske kommentarer?

- For å sikre seg mot seriespillere av vår type, har de fleste casinoer dessverre grenser for minste innsats og største innsats. La oss anta at minste tillatte innsats er 1 krone. Hvor stor må da største tillatte innsats være for at sannsynligheten for å vinne med vår doblingsmetode skal kunne bringes opp til 0.99, altså 99%?



**9.** Hva er sannsynligheten for å få minst en sekser hvis du kaster 6 vanlige terninger?

**10.** Hvor mange Lotto-rekker finnes det som kun består av odetall? Hva er sannsynligheten for å få 7 rette hvis du tipper alle disse rekkene?

**11.** Dere er tre fanger som sitter i hver deres isolerte celle i et et fengsel; Per, Petter og du. Dere har fått vite at to av dere skal henrettes. Hvem dette er, er allerede avgjort ved rettfærdig trekning blant dere tre. For å skape spenning, nekter imidlertid fangevokterne å fortelle dere *hvem* de to som skal henrettes er. Du kan sannsynlighets-regning, og har allerede konkludert med at din sannsynlighet for å overleve er  $1/3$ .

Imidlertid får du plutselig en genial ide. Du spør fangevokteren: "Det er greit nok at du ikke vil fortelle om *jeg* skal henrettes, men det er i alle fall klart at minst én av mine to medfanger skal henrettes. Kan jeg ikke få vite navnet på en av dem som skal henrettes?". Fangevokteren synes dette høres rimelig ut, og forteller at Per skal henrettes. Etter å ha fått vite dette, konkluderer du med at din sannsynlighet for å overleve nå har økt til  $1/2$ ! Nå er det jo bare Petter og deg det står om, en av dere to skal henrettes. Holder dette resonnetet?

**12.** Der fins mange fine eksempler på ting som har langt høyere sannsynlighet enn mange mennesker intuitivt tror. Dette gir gode muligheter for å lure penger fra folk ved veddemål. Her er et eksempel på en velegnet problemstilling:

- Hvis 20 tilfeldige biler passerer deg på veien, hva er da sannsynligheten for at det blant dem finnes to biler hvis bilnummer slutter på samme tosifrede tall?

Spørsmålet er altså om det blant de 20 bilene vil forekomme to bilnumre som begge ender på 17, eller 07 eller en annen av de 100

tallene som finnes, fra og med 00 til og med 99. Mange tipper at sannsynligheten for dette er 20% (altså 0.2), og er dermed villig til å vedde penger på at det ikke vil skje. I virkeligheten er imidlertid sannsynligheten nesten 0.87, altså 87%.

- a) Hva er sannsynligheten for at bli nr. 2 ikke har samme tall som bil nr. 1?
- b) Gitt at bil nr. 2 ikke har samme tall som nr. 1, hva er sannsynligheten for at bil nr. 3 ikke har samme tall som noen av de to første?
- c) Hva er sannsynligheten for at det blant de tre første bilene ikke fins to med samme tall?
- d) Hva er sannsynligheten for at det blant de 20 første bilene ikke fins to med samme tall?

**13.** Du er deltaker i et gameshow på TV, og skal velge mellom 3 dører. Bak to av dem er det en appelsin, bak den tredje et hus. Opplegget fungerer slik: Først velger du en dør. For å skape ekstra spenning, åpner så programlederen en av de to andre dørene. Bak den han åpner er det alltid en appelsin. Du får så velge om du vil bytte din opprinnelig valgte dør mot den tredje døren. Spørsmålet er så om du bør gjøre dette. Eller er det like gunstig å beholde den du først valgte?

- a) Anta at du er deltaker i dette gameshowet mange kvelder på rad, og at du konsekvent *ikke bytter dør*. I hvor stor andel av tilfellene vil du da vinne huset, gitt at du velger døren din tilfeldig? (Vi antar at du ikke er synsk.)
- b) Anta at du er deltaker i gameshowet mange kvelder på rad, men at du isteden *konsekvent bytter dør*. I hvor stor andel av tilfellene vil du da vinne huset?
- c) Bør man bytte dør?

## 2.3 Pascals trekant og binomialformelen

I denne seksjonen skal vi studere hva som skjer når vi ganger ut uttrykket  $(a + b)^n$ , der  $a$  og  $b$  er reelle tall og  $n \geq 0$  er et helt tall. For de første verdiene av  $n$  får vi følgende svar:

$$(a + b)^0 = 1$$

$$(a + b)^1 = a + b$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Altså: Når vi ganger ut  $(a + b)^n$ , får vi ett ledd for hvert produkt  $a^i b^j$  slik at summen  $i + j$  av eksponentene er  $n$ . Koeffisientene foran de forskjellige leddene danner den såkalte **Pascals trekant**:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 1 \\
 & & & & & & 1 & 1 \\
 & & & & & 1 & 2 & 1 \\
 & & & & 1 & 3 & 3 & 1 \\
 & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
 & & & & & & \vdots & \text{osv.}
 \end{array}$$

Denne trekanten har et enkelt system: *Hvert tall inne i trekanten er summen av de to tallene på skrå ovenfor.* I tillegg har trekanten 1-ere langs kantene. Dermed er trekanten lett å skrive ned fra hukommelsen, begynn på toppen. At systemet inne i trekanten blir som det blir, skyldes følgende enkle faktum: Vi har  $(a + b)^n = (a + b)(a + b)^{n-1}$ . Når du ganger inn faktoren  $(a + b)$ , er  $a^{i-1}b^j$  og  $a^i b^{j-1}$  de eneste leddene i  $(a + b)^{n-1}$  som gir ledd av typen  $a^i b^j$ . Koeffisienten til  $a^i b^j$  i  $(a + b)^n$  blir dermed summen av koeffisientene til  $a^{i-1}b^j$  og  $a^i b^{j-1}$  i uttrykket for  $(a + b)^{n-1}$ .

### Teorem 1 Sammenheng mellom binomialkoeffisienter

For alle hele tall  $n \geq i \geq 1$  gjelder  $\binom{n+1}{i} = \binom{n}{i-1} + \binom{n}{i}$ .

**Bevis** Vi vet at  $\binom{n+1}{i}$  er antall måter å velge ut  $i$  objekter fra  $n + 1$  stykker, uordnet og uten tilbakelegging. La oss kalle et av objektene "Anne". Vi deler så utvalgene i to typer: (a) De der Anne er med, og (b) resten. Av type (a) er der  $\binom{n}{i-1}$  utvalg, for det som gjenstår når vi har bestemt at Anne skal være med, er å velge ut  $i - 1$  av de resterende  $n$  objektene. Av type (b) fins  $\binom{n}{i}$  utvalg, siden vi der velger  $i$  objekter fra  $n$  stykker. ■



## 2.4 Endelige geometriske rekker

I denne seksjonen skal vi studere en spesiell type summer.

### Teorem 1 Sum av endelige geometriske rekker

Hvis  $a$  og  $k$  er reelle tall slik at  $k \neq 1$  og  $n$  er et naturlig tall, så gjelder

$$a + ak + ak^2 + \dots + ak^{n-1} = a \left( \frac{1 - k^n}{1 - k} \right).$$

**Bevis** La  $S_n = a + ak + ak^2 + ak^3 + \dots + ak^{n-1}$ , da har vi

$$kS_n = ak + ak^2 + ak^3 + \dots + ak^n.$$

Sammenlikning med  $S_n$  gir at  $S_n = kS_n + a - ak^n$ , dvs.

$$S_n(1 - k) = a(1 - k^n), \quad \text{eller altså} \quad S_n = a \frac{1 - k^n}{1 - k}. \quad \blacksquare$$

Som du muligens har gjettet, kalles uttrykket på venstre side av likningen i boksen over for en **endelig geometrisk rekke**. En slik rekke er en sum der man kommer fra et ledd til det neste ved å gange med et fast tall  $k$ .

**Eksempel 1**  $3 + 3 \cdot (1.02) + 3 \cdot (1.02)^2 + 3 \cdot (1.02)^3 + \dots + 3 \cdot (1.02)^{100}$

Endelig geometrisk rekke $a = 3, k = 1.02, n = 101$	↑ =	$3 \cdot \frac{1 - (1.02)^{101}}{1 - 1.02} \approx \underline{\underline{958}} \quad \blacksquare$
--	--------	--

**Eksempel 2**  $Q = r^8 + r^{11} + r^{14} + r^{17} + \dots + r^{8+3m}$

Dette er også en geometrisk rekke, for vi kommer fra et ledd til det neste ved å gange med  $k = r^3$ . Videre er  $a = r^8$ , siden dette er første ledd i summen. Skriver om siste ledd:  $r^{8+3m} = r^8 r^{3m} = r^8 (r^3)^m$ . Dette gir

$$Q = r^8 + r^8 \cdot (r^3) + r^8 \cdot (r^3)^2 + r^8 \cdot (r^3)^3 + \dots + r^8 \cdot (r^3)^m$$

Endelig geometrisk rekke $a = r^8, k = r^3, n = m + 1$	↑ =	$r^8 \cdot \frac{1 - (r^3)^{m+1}}{1 - r^3} \quad \blacksquare$
---	--------	--

**Eksempel 3** Birgitte er i RF-kjelleren på Blindern. Hver halve time kommer det en gammel pamp og spanderer en halvliter på henne. Hun drikker ølen raskt, og vi antar at alkoholen tas opp i blodet umiddelbart. Hver halvliter gir et bidrag på 0.4 promille i blodet hennes. Alkoholen i blodet reduseres med 20% pr. halvtime pga. nedbrytning. Heldigvis må Birgitte ha en promille på minst 2.3 før hun finner noen av pampene interessante.

- Hvilken promille har Birgitte like etter den  $n$ -te halvliteren?
- Hva vil promillen hennes stabilisere seg på? Treffer hun noen interessante pampene denne kvelden?

### Løsning

- La  $p_n$  være promillen like etter halvliter nummer  $n$ . Vi har

$$p_1 = 0.4$$

$$p_2 = 0.4 + p_1 \cdot (0.8) = 0.4 + 0.4 \cdot (0.8)$$

$$p_3 = 0.4 + p_2 \cdot (0.8) = 0.4 + 0.4 \cdot (0.8) + 0.4 \cdot (0.8)^2$$

Her ser vi at det danner seg et mønster. Siste ledd i  $p_n$  har eksponent *ett hakk lavere* enn  $n$ , dvs. vi har generelt

$$p_n = 0.4 + 0.4 \cdot (0.8) + 0.4 \cdot (0.8)^2 + \dots + 0.4 \cdot (0.8)^{n-1}$$

Dette er en endelig geometisk rekke med  $a = 0.4$  og  $k = 0.8$ . Formelen gir

$$p_n = 0.4 \cdot \frac{1 - (0.8)^n}{1 - 0.8} = \frac{0.4}{0.2} \cdot [1 - (0.8)^n] = \underline{\underline{2[1 - (0.8)^n]}}$$

- Promillen stabiliserer seg på  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2[1 - (0.8)^n] = \underline{\underline{2}}$

Vi ser fra svaret i a) at  $p_n < 2$  for alle  $n$ . Dermed ingen interessante pampene. ■

## 2.4 Oppgaver

- Finn følgende summer:

- $5 + 5 \cdot (1.2) + 5 \cdot (1.2)^2 + \dots + 5 \cdot (1.2)^{50}$

- $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{30}$

- $1 - (1/2) + (1/4) - (1/8) + \dots - (1/512)$

- Finn lukkede (dvs. "prikkfrie") uttrykk for følgende summer:

- $t^5 + t^7 + t^9 + \dots + t^{5+2k}$

- $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n$

- I den marerittaktige, hittil uoppgavede novellen "Istårnet" av Franz Kafka fortelles det om K. og hans evige kamp for å bygge et høyt tårn bestående av minst 10 tonn is. Stakkars K. kommer med et islass på 100 kg hver hele time (døgnet rundt), men pga. smelting reduseres ismengden i tårnet med 2% pr. time. Vis at uansett hvor lenge K. arbeider, kan ismengden i tårnet aldri bli større enn 5 tonn.

## 2.5 Hyperbolske funksjoner

De to funksjonene  $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$  og  $g(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$  forekommer så ofte at de har fått egne navn. De kalles henholdsvis "sinus hyperbolicus" og "cosinus hyperbolicus", og skrives  $\sinh x$  og  $\cosh x$ . Altså

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \qquad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

Navnene skyldes at disse funksjonene faktisk har en masse egenskaper som minner sterkt om egenskapene til sinus og cosinus. Eksempler:

$$\begin{aligned} \cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1 \\ \sinh(x + y) &= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \\ \cosh(x + y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \\ \sinh 2x &= 2 \sinh x \cosh x \\ \cosh 2x &= \cosh^2 x + \sinh^2 x = 2 \cosh^2 x - 1 = 1 + 2 \sinh^2 x. \end{aligned}$$

Disse resultatene er lette å sjekke fra definisjonen; bare sett inn  $e^x$ -uttrykkene og se at du får det samme på begge sider. Eksempel:

$$\begin{aligned} \cosh^2 x - \sinh^2 x &= \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 - \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2 \\ &= \frac{1}{4}[(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})] = 1. \end{aligned}$$

Man definerer  $\tanh x$  (tangens hyperbolicus) og  $\coth x$  (cotangens hyperbolicus) ved de samme kombinasjonene som brukes i trigonometri:

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

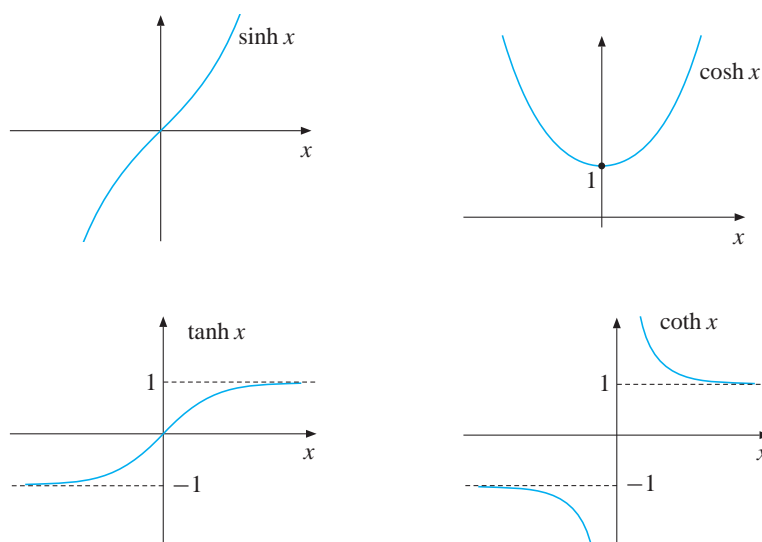
Så var det de deriverte:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sinh x &= \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \right] = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh x \\ \frac{d}{dx} \cosh x &= \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \right] = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh x \end{aligned}$$

Ikke noe minustegn her, altså. Gitt dette, kan man finne den deriverte av  $\tanh x$  og  $\coth x$  ved å bruke brøkregelen, akkurat som i trigonometri. Resultatet blir (bruker at  $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ )

$$\frac{d}{dx} \tanh x = \frac{1}{\cosh^2 x} \qquad \frac{d}{dx} \coth x = -\frac{1}{\sinh^2 x}.$$

Grafene til de fire hyperbolske funksjonene våre:



At grafene blir seende slik ut, kan man overbevise seg om ved vanlig funksjonsdrøfting basert på  $e^x$ -uttrykkene funksjonene er definert ved. For eksempel har vi, se grafen,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \tanh x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})}{\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1.$$

## 2.5 Oppgaver

1. Finn den deriverte av følgende funksjoner:

- a)  $f(x) = \cosh^2 x$       b)  $f(x) = x \tanh x$   
 c)  $g(x) = \sqrt{\cosh x}$       d)  $h(x) = \sinh 5x$

2. Bevis summeformelene

$$\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

3. Finn følgende integraler:

- a)  $\int \cosh x \, dx$       b)  $\int \tanh x \, dx$

c)  $\int \frac{\cosh(\ln x)}{x} \, dx$       d)  $\int x \sinh x \, dx$

4. Vis at  $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$ .

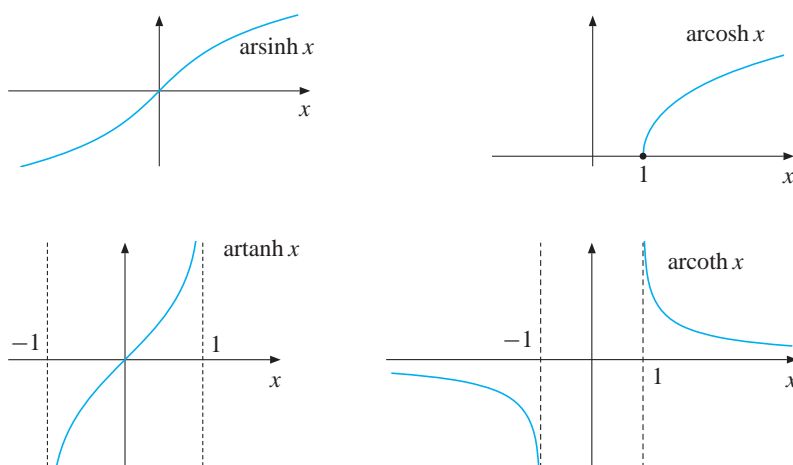
5. Vis at  $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$ .

6. I denne oppgaven skal vi vise ved funksjonsdrøfting basert på  $e^x$ -uttrykkene at grafene til de fire hyperbolske funksjonene blir som vist på figurene ovenfor. For hver av punktene under skal du gjøre følgende: (i) Finn eventuelle nullpunkter til  $f$ , (ii) avgjør hvor  $f$  vokser og avtar, (iii) avgjør hvor  $f$  er konveks og konkav, og (iv) finn eventuelle asymptoter til  $f$ .

- a)  $f(x) = \sinh x$       b)  $f(x) = \cosh x$   
 c)  $f(x) = \tanh x$       d)  $f(x) = \coth x$

## 2.6 Inverse hyperbolske funksjoner

Vi ser på grafene forrige side, og plukker ut områder der funksjonene er injektive. Vel,  $\sinh x$ ,  $\tanh x$  og  $\coth x$  er jo injektive på hele sine definisjonsområder, så der er det null problem. For  $\cosh x$  velger vi intervallet  $[0, \infty)$ . Vi bruker navnene  $\operatorname{arsinh} x$  (area sinus hyperbolicus),  $\operatorname{arcosh} x$ ,  $\operatorname{artanh} x$  og  $\operatorname{arcoth} x$  på de inverse funksjonene, og grafene deres finnes som vanlig ved å speile om diagonalen.



Vi kan videre finne eksplisitte regneuttrykk for de inverse funksjonene ved å vrenge definisjonslikningene. Som eksempel tar vi  $\operatorname{arsinh} x$ :

$$y = \operatorname{arsinh} x \quad \text{gir} \quad x = \sinh y, \quad \text{dvs.} \quad x = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}).$$

Multiplikasjon med  $2e^y$  på begge sider gir

$$2xe^y = e^{2y} - e^0, \quad \text{som kan skrives} \quad (e^y)^2 - 2x(e^y) - 1 = 0.$$

Dette er en annengradslikning med  $(e^y)$  som ukjent, så

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 + 1} \quad (\text{må velge } +, \text{ siden } e^y > 0).$$

Tar vi så  $\ln$  på begge sider, får vi  $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ , altså

$$\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad (\text{definert for alle } x).$$



På helt tilsvarende måte finner du at

$$\operatorname{arcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad (\text{definert for } x \geq 1)$$

$$\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad (\text{definert for } |x| < 1)$$

$$\operatorname{arcoth} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \quad (\text{definert for } |x| > 1)$$

De deriverte av de inverse funksjonene finnes ved å derivere de regne-uttrykkene vi har funnet. Resultatene blir

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arsinh} x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad \frac{d}{dx} \operatorname{arcosh} x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{artanh} x = \frac{1}{1 - x^2} \quad \frac{d}{dx} \operatorname{arcoth} x = \frac{1}{1 - x^2}$$

Det ser mystisk ut at  $\operatorname{artanh}$  og  $\operatorname{arcoth}$  har samme derivert, men husk at de to funksjonene er definert på hvert sitt  $x$ -område.

## 2.6 Oppgaver

1. Deriver følgende funksjoner:

a)  $f(x) = \operatorname{arsinh} \sqrt{x}$       b)  $\psi(t) = (\operatorname{artanh} t)^3$

2. Finn følgende integraler.

a)  $\int \frac{t}{\sqrt{1+t^4}} dt$       b)  $\int_{-1}^1 \frac{1}{9-x^2} dx$

c)  $\int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x} dx$       d)  $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{4x}}} dx$

e)  $\int \frac{1}{\cos x} dx$       (Hint: Bruk c.)

f)  $\int \frac{1}{x\sqrt{(\ln x)^2 - 1}} dx, \quad x > e$

3. Utled formelen

$$\operatorname{arcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

4. Utled formelen

$$\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

5. Utled formelen

$$\operatorname{arcoth} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

6. Utled formelen for den deriverte av  $\operatorname{arsinh} x$  ved å ta utgangspunkt i formelen

$$\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

7. Utled formlene for den deriverte av  $\operatorname{arcosh} x$ ,  $\operatorname{artanh} x$  og  $\operatorname{arcoth} x$  ved å ta utgangspunkt i formlene fra oppgave 3, 4 og 5.

8. Løs følgende likninger:

a)  $\sinh^2 x - \sinh x - 6 = 0$

b)  $\coth^2 x - 25 = 0$

9. Finn integralet

$$\int_1^2 \operatorname{arcosh} x \, dx$$

## 2.7 l'Hôpitals regel

l'Hôpitals regel kan brukes til å finne mange typer grenser som ikke lar seg beregne ved direkte innsetting. Den første varianten av regelen dreier seg om brøkuttrykk der *både teller og nevner går mot 0*. Det er vanlig å notere  $[\frac{0}{0}]$  over likhetene der man bruker denne utgaven av regelen, se eksempler nede på siden. Regelen kan brukes flere ganger, som du ser.

### Teorem 1 l'Hôpitals regel

Anta at  $f$  og  $g$  er deriverbare for alle  $x \neq a$  i en omegn om  $a$ , og at  $g'(x) \neq 0$  der. Hvis  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ , så er

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

gitt at grensen til høyre fins eller er  $\pm\infty$ .

**Bevis** Vi kan vedta at  $f(a) = g(a) = 0$  uten å påvirke grensene. La  $U$  være en omegn som nevnt i teoremet, og la  $x \neq a$  ligge i  $U$ . Siden  $f$  og  $g$  nå er kontinuerlige på det lukkede intervallet mellom  $a$  og  $x$ , gir teorem 1.8.8

$$[f(x) - f(a)]g'(c) = [g(x) - g(a)]f'(c) \quad \text{for } c \text{ mellom } a \text{ og } x,$$

dvs.  $f(x)g'(c) = g(x)f'(c)$ , og dermed

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Vi deler *ikke* på null her: Siden  $c \in U$  er  $g'(c) \neq 0$ , og siden  $g(0) = 0$  og  $g'(t) \neq 0$  for  $t$  mellom  $a$  og  $x$ , er også  $g(x) = 0$  umulig ved Rolles teorem. Vi lar nå  $x \rightarrow a$ , og får

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

siste likhet fordi  $c$  må nærme seg  $a$  når  $x$  gjør det, samt at grensen lengst til høyre er forutsatt å eksistere eller være  $\pm\infty$ . ■

**Eksempel 1** Her er to eksempler:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \stackrel{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - x^2}{e^{2x} - 2e^x + 1} \stackrel{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 2x}{2e^{2x} - 2e^x} \stackrel{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x - 2}{4e^{2x} - 2e^x} = -1. \quad \blacksquare$$

**Teorem 2** Varianter av l'Hôpitals regel

Regelen gjelder også med følgende utvidelser:

1. Brøken  $\frac{f(x)}{g(x)}$  kan gå mot  $[\frac{\infty}{\infty}]$ ,  $[\frac{-\infty}{\infty}]$  eller  $[\frac{\infty}{-\infty}]$  istedenfor  $[\frac{0}{0}]$ .
2. Grensen kan gjelde  $x \rightarrow \infty$  eller  $x \rightarrow -\infty$  istedenfor  $x \rightarrow a$ .  
Hvis  $x \rightarrow \infty$ , forsetter vi at  $f$  og  $g$  er deriverbare på et intervall  $[d, \infty)$ , og at  $g'(x) \neq 0$  der. Tilsvarende hvis  $x \rightarrow -\infty$ .
3. Grensen kan også være ensidig, dvs.  $x \rightarrow a^+$  eller  $x \rightarrow a^-$ .  
Hvis  $x \rightarrow a^+$ , forsetter vi at  $f$  og  $g$  er deriverbare på et intervall  $\langle a, d \rangle$ , og at  $g'(x) \neq 0$  der. Tilsvarende for  $x \rightarrow a^-$ .

Regelen sier, som før: Hvis grensen for  $f'(x)/g'(x)$  fins eller er  $\pm\infty$ , kan vi finne grensen for  $f(x)/g(x)$  ved å *derivere teller og nevner*.

**Bevis** Tilfeller der  $x \rightarrow \infty$  eller  $x \rightarrow -\infty$ 

Disse tilbakeføres til tilfeller der  $x \rightarrow 0^+$  eller  $x \rightarrow 0^-$  ved å å sette  $x = 1/t$ , altså  $t = 1/x$ . Hvis f.eks.  $x \rightarrow \infty$  fås  $t \rightarrow 0^+$ . Kjernerregelen gir

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(1/t)}{g(1/t)} \stackrel{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f'(1/t)(-1/t^2)}{g'(1/t)(-1/t^2)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f'(1/t)}{g'(1/t)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \end{aligned}$$

Tilfellet  $x \rightarrow a^+$  og formen  $[\frac{\infty}{\infty}]$ 

La  $\langle a, d \rangle$  være et intervall som nevnt i teoremet, og anta at  $x, \hat{x} \in \langle a, d \rangle$  er slik at  $g(x) \neq g(\hat{x})$ . Ved teorem 2.9 fins  $c$  mellom  $x$  og  $\hat{x}$  slik at

$$[f(x) - f(\hat{x})]g'(c) = [g(x) - g(\hat{x})]f'(c).$$

En liten omskriving gir (forutsetningene sikrer at vi ikke deler på 0)

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \left[ \frac{1 - f(\hat{x})/f(x)}{1 - g(\hat{x})/g(x)} \right] = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \quad (1)$$

Ideen er nå å la  $x$  og  $\hat{x}$  (og dermed  $c$ ) gå mot  $a$  på en slik måte at  $\hat{x}$  "følger etter"  $x$  i såpass lavt tempo at uttrykket i hakeparentesen går mot 1. Da får vi resultatet vi skal bevise fra (1) når vi lar  $x \rightarrow a^+$  på begge sider. Vi kan fikse det slik: Siden  $f(x) \rightarrow \infty$  og  $g(x) \rightarrow \infty$  når  $x \rightarrow a^+$ , kan vi (hvis  $d$  velges tilstrekkelig nær  $a$ ) definere  $\hat{x}$  ved

$$\hat{x} = \inf \left\{ t \in \langle a, \infty \rangle \mid f(t) \leq \sqrt{f(x)} \text{ og } g(t) \leq \sqrt{g(x)} \right\}$$

for hver  $x \in \langle a, d \rangle$ . Siden  $f(x) \rightarrow \infty$  og  $g(x) \rightarrow \infty$  når  $x \rightarrow a^+$ , har vi  $\hat{x} \rightarrow a^+$  når  $x \rightarrow a^+$ . Hakeparentesen i (1) går mot 1, fordi  $f(\hat{x})/f(x) \leq 1/\sqrt{f(x)}$  og  $g(\hat{x})/g(x) \leq 1/\sqrt{g(x)}$ . Altså ok.

Alle andre tilfeller der  $x \rightarrow a$ ,  $x \rightarrow a^+$  eller  $x \rightarrow a^-$

Tilfellet  $[\frac{0}{0}]$  med ensidige grenser vises som teorem 5.4. Tilfellet  $x \rightarrow a^+$ ,  $[\frac{\infty}{\infty}]$  vises som forrige punkt. Tilfellet  $x \rightarrow a$ ,  $[\frac{\infty}{\infty}]$  følger ved å kombinere de to tilsvarende ensidige resultatene. Tilfeller med  $[\frac{-\infty}{\infty}]$  eller  $[\frac{\infty}{-\infty}]$  kan tilbakeføres til tilfeller med  $[\frac{\infty}{\infty}]$  ved å sette minus utenfor grensene. ■

Vanligvis skriver man bare  $[\frac{\infty}{\infty}]$  istedenfor  $[\frac{-\infty}{\infty}]$  etc. over likhetstegnene.

**Eksempel 2**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 + 3x}{2x^2 + 1} \stackrel{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x + 3}{4x} \stackrel{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12}{4} = 3. \blacksquare$

**Eksempel 3**  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + (1/x)}{\ln x} \stackrel{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1/x^2}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{x} = -\infty. \blacksquare$

## Trikseformer

Vi skal nå se på en rekke andre “uavgjørbar” uttrykk vi kan støte på når vi regner ut grenser. Felles for dem alle er at vi kan tilbakeføre dem til en av l'Hôpital-formene  $[\frac{\infty}{\infty}]$  eller  $[\frac{0}{0}]$  ved hjelp av passende regnetriks.

Formen  $[0 \cdot \infty]$

Triks: Skriv  $f(x)g(x)$  som  $\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$  eller  $\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$  og bruk vanlig l'Hôpital.

**Eksempel 4**  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x \stackrel{[0 \cdot \infty]}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} [-x] = 0.$

Formen  $[\infty - \infty]$

Ideen er også her å få gjort grensen om til  $[\frac{0}{0}]$  eller  $[\frac{\infty}{\infty}]$  ved omskriving av uttrykket. Men omgjøringen er av og til vanskelig i dette tilfellet. Et mulig triks er å sette på felles brøkstrek; se eksemplet under.

**Eksempel 5**  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) \stackrel{[\infty - \infty]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)}$   
 $\stackrel{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + xe^x} \stackrel{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{e^x + e^x + xe^x} = \frac{1}{2}. \blacksquare$

Formene  $[1^\infty]$ ,  $[0^0]$  og  $[\infty^0]$

Metode: Skriv om ved  $a^b = e^{(\ln a) \cdot b}$  og bruk l'Hôpital på eksponenten.

$$\text{Eksempel 6} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x \stackrel{[0^0]}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln x \cdot x}$$

$$\text{Eksponent:} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \cdot x \stackrel{[\infty \cdot 0]}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

$$\text{Så} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (3x)^{\sin x} = e^0 = 1. \quad \blacksquare$$

$$\text{Eksempel 7} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x} \stackrel{[\infty^0]}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} e^{(\ln x) \cdot (1/x)}$$

$$\text{Eksponent:} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

$$\text{Så} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x} = e^0 = 1. \quad \blacksquare$$

$$\text{Eksempel 8} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 3x^2)^{1/x^2} \stackrel{[1^\infty]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln(1-3x^2) \cdot (1/x^2)}$$

$$\text{Eksponent:} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-3x^2)}{x^2} \stackrel{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-6x}{1-3x^2}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3}{1-3x^2} = -3$$

$$\text{Så} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 3x^2)^{1/x^2} = e^{-3}. \quad \blacksquare$$

## 2.7 Oppgaver

1. Finn følgende grenseverdier:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x + \sin x}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2}$

d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$

e)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\ln x}$

f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$

g)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$

h)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x$

i)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \tan(1/x)$

j)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x)^{1/x}$

k)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x$

l)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{3x}$

2. Finn følgende grenseverdier:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/x}$

c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$

d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x}{x^5}$

3. *Patologiske tilfeller.* Felles for de to grensene under er at noe går "galt" hvis du prøver å bruke l'Hôpital direkte på dem. Forklar hva som skjer, og se om du kan finne grensene likevel.

a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-(1/x)}}{x}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin(1/x)}{\sin x}$

## 2.8 Direkte bruk av definisjonen på den deriverte

I denne seksjonen skal vi se på noen teknikker der man bruker definisjonen av den deriverte direkte i forbindelse med drøfting av funksjoner. Den deriverte er definert ved

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Det er aktuelt å bruke definisjonen direkte for å finne  $f'(x)$  f.eks. i tilfeller der vi har en delt funksjonsforskrift.

**Eksempel 1** La funksjonen  $g$  være definert ved

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{for } x \neq 0 \\ 0 & \text{for } x = 0. \end{cases}$$

Vis at  $g'(0) = 0$ . Finn så  $g'(x)$  for  $x \neq 0$ , og vis at  $\lim_{x \rightarrow 0} g'(x)$  ikke fins.

**Løsning** Vi regner ut  $g'(0)$  ved hjelp av definisjonen:

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{h} && \text{[brukte } g(0) = 0\text{]} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} h \sin\left(\frac{1}{h}\right) && \text{[satte } g(h) = h^2 \sin\left(\frac{1}{h}\right)\text{, siden } h \neq 0\text{]} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Siste overgang gjelder fordi faktoren  $h$  går mot 0, mens sin-faktoren aldri blir større enn 1 i absoluttverdi.

Så regner vi ut den deriverte for  $x \neq 0$ . Der er funksjonen gitt ved en fast formel, så vi bruker vanlige derivasjonsregler:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{-1}{x^2} \\ &= 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

La oss nå se hva som skjer med  $g'(x)$  når  $x \rightarrow 0$ . Vel, det første leddet går mot 0, siden  $2x \rightarrow 0$  og sinus-faktoren er begrenset av  $\pm 1$ . Men det rene cos-leddet bak går det derimot helt galt med; når  $x \rightarrow 0$  går innmaten  $\frac{1}{x}$  mot uendelig, og dermed vil jo  $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$  svinge hemningsløst opp og ned mellom +1 og -1. Altså fins ikke grensen  $\lim_{x \rightarrow 0} g'(x)$ . ■

Legg merke til at vi i dette eksemplet *ikke* kunne ha funnet  $g'(0)$  ved å regne ut  $g'(x)$  for  $x \neq 0$  og så tatt grensen  $x \rightarrow 0$  etterpå. Dette siste er en metode som har vært mye brukt i videregående skole. Den virker altså ikke i dette tilfellet. Men den *ville* faktisk virket hvis grensen for  $g'(x)$  når  $x \rightarrow 0$  hadde eksistert, se neste teorem.

### Teorem 1 Gymnasteoremet

Anta at  $f$  er deriverbar for alle  $x \neq a$  og kontinuert i  $x = a$ . Hvis grensen  $\lim_{x \rightarrow a} f'(x)$  fins, så er  $f$  deriverbar i  $x = a$  også, og

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} f'(x).$$

**Bevis** l'Hôpitals regel gir

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(a+h) \cdot h - 0}{1} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} f'(a+h) = \lim_{x \rightarrow a} f'(x), \end{aligned}$$

gitt at denne siste grensen fins. I siste overgang satte jeg  $x = a + h$ , og  $h \rightarrow 0$  svarer til at  $x \rightarrow a$ . ■

## 2.8 Oppgaver

1. La funksjonen  $f$  være definert ved

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{for } x \neq 0 \\ 1 & \text{for } x = 0. \end{cases}$$

- Bruk definisjonen av den deriverte direkte til å vise at  $f$  er deriverbar i punktet  $x = 0$ .
- Skisser grafen til  $f$ .

2. La  $K$  være et reelt tall, og la funksjonen  $f$  være gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\arctan x}{\sin 2x} & \text{for } x \geq 0 \\ K & \text{for } x = 0. \end{cases}$$

- Bestem  $K$  slik at  $f$  blir kontinuert på  $\mathbf{R}$ .
- Vis at når  $K$  har verdien funnet under a), er  $f$  deriverbar på

hele  $\mathbf{R}$ . Hva er  $f'(0)$ ?

3. Vis at  $f(x) = |x|$  ikke er deriverbar i  $x = 0$ .

4. Den *annenderiverte* av en funksjon  $f$  er definert som den deriverte av  $f'$ , dvs.

$$f''(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

Bruk dette til å vise at funksjonen fra oppgave 1 er to ganger deriverbar i  $x = 0$ .

5. La  $f$  være funksjonen definert ved

$$f(x) = \begin{cases} e^{-(1/x^2)} & \text{for } x > 0 \\ 0 & \text{for } x \leq 0. \end{cases}$$

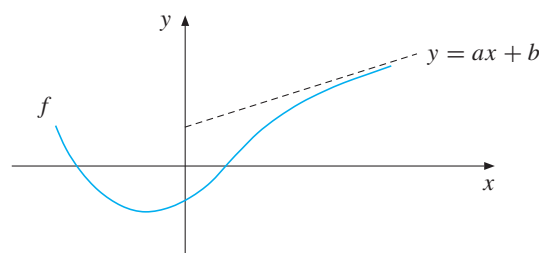
- Vis at  $f$  er deriverbar i 0, og at  $f'(0) = 0$ .
- Vis at  $f^{(n)}(0) = 0$  for alle naturlige tall  $n \geq 1$ , der  $f^{(n)}(0)$  er den  $n$ -te deriverte av  $f$  i punktet 0. Skisser grafen til  $f$ .

## 2.9 Skråasymptoter

Funksjoner kan ha andre typer asymptoter enn horisontale og vertikale. Her skal vi se på begrepet *skråasymptote*. Definisjonen er slik: Linjen  $y = ax + b$  (der  $a \neq 0$ ) kalles en *skrå asymptote* for  $f$  hvis

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \quad \text{eller} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

eller begge deler. Den geometriske tolkningen er vist på figuren under. Skråasymptoten er en skrå, rett linje som grafen legger seg inntil når  $x \rightarrow \infty$  eller  $x \rightarrow -\infty$ .



**Hvordan finne skråasymptoter** Ser her på tilfellet  $x \rightarrow \infty$ , tilfellet  $x \rightarrow -\infty$  behandles tilsvarende.

Regn ut

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{og deretter}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \rightarrow \infty} ax \left[ \frac{f(x)}{ax} - 1 \right].$$

Grensen for  $b$  vil være på formen  $[\infty - \infty]$ , og kan tas ved l'Hôpital. Det er ofte lurt å skrive om til formen  $[\infty \cdot 0]$  ved å sette utenfor  $ax$ , som vist. Hvis grensen for  $a$  eller  $b$  ikke fins, har  $f$  ikke noen skrå asymptote. Hvis begge fins, er asymptoten  $y = ax + b$ .

**Bevis** (For metoden.) Fra likningen for  $b$  følger at linjen  $y = ax + b$  vi finner ved metoden alltid er en asymptote. Omvendt, hvis  $f$  har skråasymptoten  $y = ax + b$ , finner metoden den alltid for oss, fordi da fås

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{f(x) - (ax + b)}{x} + a + \frac{b}{x} \right] = 0 + a + 0 = a.$$

Deretter får vi

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \{f(x) - (ax + b)\} + b \right] = 0 + b = b. \quad \blacksquare$$



**Eksempel 1** Skal finne eventuell skråasymptote for  $f(x) = xe^{1/x}$  når  $x \rightarrow \infty$ . Vi får

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{1/x} = e^0 = 1.$$

Dette gir så

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow \infty} [xe^{1/x} - x] \stackrel{[\infty-\infty]}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} x [e^{1/x} - 1] \\ &\stackrel{[\infty \cdot 0]}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{1/x} - 1}{1/x} \stackrel{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{1/x}(-1/x^2)}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{1/x} = 1. \end{aligned}$$

Altså er  $y = x + 1$  en skråasymptote. ■

Hvis  $f(x)$  er en *rasjonal* funksjon (polynom i teller og nevner), kan man alternativt finne skråasymptoter ved å bruke *polynomdivisjon*. Det følger fra metoden forrige side at en rasjonal funksjon har en skrå asymptote hvis og bare hvis telleren har ett hakk høyere grad enn nevneren.

**Eksempel 2** Finn skråasymptoter for  $f(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 + 5x + 7}{x^2 - 1}$

**Løsning** Polynomdivisjon gir at  $f(x) = 2x + 3 + \frac{7x + 10}{x^2 - 1}$

Uttrykket  $2x + 3$  foran restleddet gir oss skråasymptoten, for vi får nå

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (2x + 3)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{7x + 10}{x^2 - 1} = 0.$$

Ergo er  $y = 2x + 3$  skråasymptote for  $f$  når  $x \rightarrow \pm\infty$ . ■

## 2.9 Oppgaver

I oppgavene 1–3 nedenfor skal du gjøre følgende:

- Avgjør hvor  $f$  vokser og avtar, og angi alle nullpunkter og ekstrempunkter for  $f$ .
- Finn eventuelle asymptoter til  $f$ , inkludert skråasymptoter. Skisser grafen til  $f$ .

1.  $f(x) = xe^{3/x}$ , definert for  $x \neq 0$

2.  $g(x) = \frac{x^2}{x-3}$ , definert for  $x \neq 3$

3.  $h(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ , definert for  $x \neq \pm 1$

4. Finn eventuelle skråasymptoter for følgende funksjoner:

a)  $f(x) = x + \ln x$       b)  $f(x) = (x + 2) \ln x$

c)  $f(x) = \frac{x^4 - 3x^2}{x^3 + x + 1}$       d)  $f(x) = \frac{x^2 + \ln x}{x}$

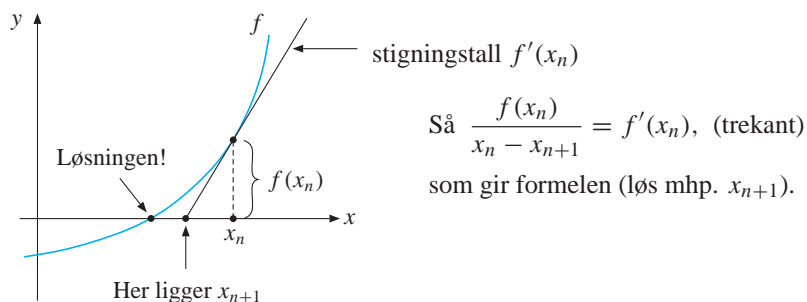
e)  $f(x) = 3x + 2 - \sqrt{x^2 + x}$

## 2.10 Newtons metode

Newtons metode kan brukes til å finne *tilnærminger* for nullpunktene til en gitt funksjon  $f(x)$ . Metoden går ut på å lage en følge  $x_0, x_1, x_2, \dots$  av (forhåpentlig) stadig bedre tilnærminger til en løsning av likningen  $f(x) = 0$ . Vi starter med en gjetting  $x_0$ , og går så videre ved likningen

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Figuren under viser ideen: Vi velger  $x_{n+1}$  som nullpunktet til tangenten over punktet  $x_n$ . Med litt flaks kommer vi nærmere løsningen da.



**Eksempel 1** Vi skal finne  $x$  slik at  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ . Vi har  $f'(x) = 3x^2 - 6x$ , så

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 3x_n^2 + 1}{3x_n^2 - 6x_n}.$$

Vi starter med  $x_0 = 1$ . Så får vi, ved bruk av kalkulator,

$$x_1 = 1 - \frac{x_0^3 - 3 \cdot x_0^2 + 1}{3 \cdot x_0^2 - 6 \cdot x_0} = 0.66666666$$

$$x_2 = 1 - \frac{x_1^3 - 3 \cdot x_1^2 + 1}{3 \cdot x_1^2 - 6 \cdot x_1} = 0.6527777$$

Setter vi så inn  $x_2$ , får vi  $x_3 = 0.6527036$ . Deretter  $x_4 = 0.6527036$ . Vi stopper her, siden vi ikke lenger får noen endring på kalkulatoren. Så vår tilnærmede løsning er  $x = 0.6527036$ . ■

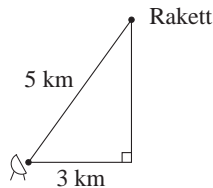
### 2.10 Oppgaver

1. Bruk Newtons metode til å finne en tilnærmet løsning av femtegradslikningen  $x^5 - 5x - 10 = 0$  i intervallet  $x \in [1, 2]$ .

2. Vis at  $f(x) = e^x + x$  har et nullpunkt. Finn en tilnærmet verdi for nullpunktet ved Newtons metode.

## 2.11 Koblede hastigheter

Anta at vi har to størrelser  $x(t)$  og  $y(t)$  som begge er funksjoner av tiden  $t$ , og at vi har en likning som gir en sammenheng mellom  $x$  og  $y$ . Vi kan da finne en sammenheng ("kobling") mellom  $dx/dt$  og  $dy/dt$  ved å derivere begge sider av likningen med hensyn på  $t$ .



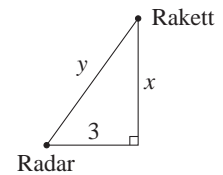
Figur 2.11.1

**Eksempel 1** En rakett skytes vertikalt opp 3 km fra en radarstasjon, se figur 2.11.1. På et gitt tidspunkt er avstanden fra raketten til stasjonen 5 km, og avstanden øker samtidig med 0.8 km/sek. Hva er raketts fart på dette tidspunktet?

**Løsning** Vi kaller de to avstandene som endrer seg med tiden for  $x$  og  $y$ , se figuren til høyre.

Ved Pythagoras har vi

$$x^2 + 3^2 = y^2$$



Derivasjon med hensyn på  $t$  på begge sider av denne likningen gir

$$2x \cdot \frac{dx}{dt} + 0 = 2y \cdot \frac{dy}{dt}$$

Forklaring: Jeg oppfattet her  $x = x(t)$  og  $y = y(t)$  som funksjoner av  $t$ , og brukte kjerneregelen med  $x$  og  $y$  som kjerner.

Ved tidspunktet vårt er

$$y = 5, \quad dy/dt = 0.8 \quad \text{og} \quad x = \sqrt{y^2 - 9} = 4.$$

Innsetting av dette gir  $dx/dt = 1$ , dvs. raketts fart er 1 km/sek. ■

### 2.11 Oppgaver

1. En drake flyr rettlinjet i konstant høyde 100 meter. På et gitt tidspunkt løper det ut 2 meter snøre pr. sekund, 200 meter snøre er ute, og snøret er stramt. Hvor fort flyr draken?

2. Du jobber som vindusvasker, og befinner deg på toppen av en 10 meter lang stige som lener seg mot en vertikal vegg. Plutselig

ramler stigen; nedre ende sklir bakover langs bakken mens toppen (med deg klamret fast) glir ned vegg. Din umiddelbare reaksjon er at dette er en interes-sant matematisk situasjon. I det øyeblikk vinkelen mellom stigen og bakken passerer  $30^\circ$ , har stigens nedre ende fart 3 m/s bortover bakken. Hvor fort faller du akkurat da?

## 2.12 Uekte integraler

Vi skal nå studere integraler der enten funksjonen man integrerer eller integrasjonsområdet er *ubegrenset*. Slike integraler kalles *uekte* integraler. Først definerer vi integraler med uendelige integrasjonsgrenser, slik:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx \quad \int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^\infty f(x)dx$$

Hvis  $f$  har en vertikal asymptote i  $x = x_0$  (dvs. null i nevner etc.), definerer vi tilsvarende

$$\int_a^{x_0} f(x)dx = \lim_{t \rightarrow x_0^-} \int_a^t f(x)dx \quad \int_{x_0}^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow x_0^+} \int_t^b f(x)dx$$

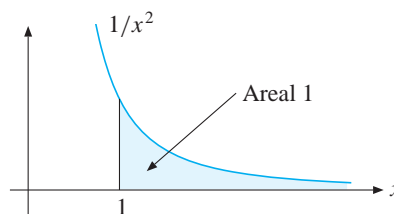
for alle  $a < x_0$  og  $b > x_0$ . I samtlige definisjoner forutsetter vi selvsagt at integralene som inngår på høyre side av likhetstegnene er definert for alle aktuelle verdier av integrasjonsgrensene.

Hvis vi får et endelig tall som svar på et uekte integral, sies integralet å *konvergere*. I motsatt fall sier vi at det *divergerer*.

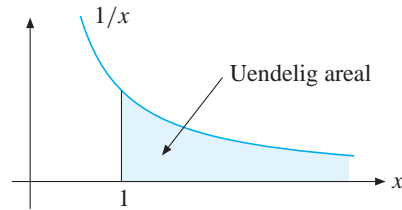
**Eksempel 1** 
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left\{ \int_1^b x^{-2} dx \right\} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left\{ \left[ -x^{-1} \right]_1^b \right\}$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{1}{b} - (-1) \right\} = 1. \quad \blacksquare$$

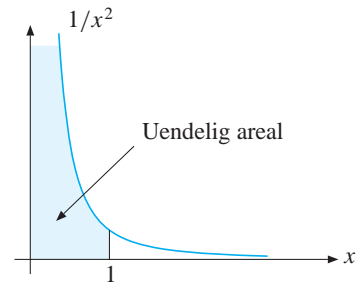
Dette kan tolkes som at arealet under grafen til  $f(x) = 1/x^2$  fra 1 og opp til  $\infty$  er lik 1.



**Eksempel 2**  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln b - \ln 1) = +\infty.$  ■



**Eksempel 3**  $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[ -\frac{1}{x} \right]_t^1 = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left( -1 + \frac{1}{t} \right) = +\infty.$  ■



Merk forskjellen på eksempel 1 og 2. Funksjonen  $1/x^2$  går så fort mot null når  $x \rightarrow \infty$  at arealet under grafen blir endelig, mens grafen til  $1/x$  går tilstrekkelig sakte nedover til at arealet blir uendelig! Mer generelt:

### Teorem 1 $p$ -integralene

Integralet  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$  konvergerer for  $p > 1$  og divergerer for  $p \leq 1$ .

**Bevis** Vi kan anta  $p \neq 1$  nå, siden eks. 2 sier at  $p = 1$  gir divergens. Vi får

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left\{ \int_1^b x^{-p} dx \right\} \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left\{ \left[ \frac{1}{-p+1} x^{-p+1} \right]_1^b \right\} = \frac{1}{-p+1} \lim_{b \rightarrow \infty} \{ b^{1-p} - 1 \}. \end{aligned}$$

Her går  $b^{1-p}$  mot  $+\infty$  hvis  $p < 1$ , og mot null hvis  $p > 1$ . ■

## Konvergenstester for uekte integraler

Hittil har vi kunnet avgjøre konvergens/divergens for de uekte integralene vi har sett på ved å regne dem ut. Men det er ikke alltid dette er så lett, og da kan følgende tre teoremer være nyttige. (Særlig de to siste.)

### Teorem 2    Øvre skranke gir konvergens

Anta at  $f(x)$  er kontinuertlig og at  $f(x) \geq 0$  på  $[a, \infty) \subseteq D_f$ . Da konvergerer det uekte integralet  $\int_a^\infty f(x) dx$  hvis og bare hvis det fins et reelt tall  $M$  slik at  $\int_a^t f(x) dx \leq M$  for alle  $t \in [a, \infty)$ .

**Bevis** La  $F(t) = \int_a^t f(x) dx$  for alle  $t \in \langle a, \infty \rangle$ . Siden  $F'(t) = f(t) \geq 0$  ved fundamentalteoremet, er  $F$  voksende. Hvis det fins en  $M$  som nevnt i teoremet, eksisterer  $s = \sup\{F(t) \mid t > a\}$  ved kompletthetsprinsippet. For gitt  $\epsilon > 0$ , må det da finnes en  $t_0$  slik at  $F(t_0) \in \langle s - \epsilon, s \rangle$ . Men siden  $F$  er voksende, er i så fall  $F(t) \in \langle s - \epsilon, s \rangle$  for alle  $t > t_0$ . Det følger at  $F(t) \rightarrow s$  når  $t \rightarrow \infty$ , dvs. det uekte integralet  $\int_a^\infty f(t) dx$  konvergerer mot  $s$ . Hvis det *ikke* fins noen øvre begrensning  $M$  som nevnt i teoremet, er det klart at det uekte integralet divergerer mot  $+\infty$ . ■

### Teorem 3    Sammenlikningstesten for integraler

La  $f$  og  $g$  være kontinuertlige med  $0 \leq g(x) \leq f(x)$  for  $x > a$ . Da:

- (1) Hvis  $\int_a^\infty f(x) dx$  konvergerer, så konvergerer  $\int_a^\infty g(x) dx$  også.
- (2) Hvis  $\int_a^\infty g(x) dx$  divergerer, så divergerer  $\int_a^\infty f(x) dx$  også.

**Bevis** Vi viser (1) først. Anta at  $\int_a^\infty f(x) dx$  konvergerer mot  $M$ . Da er  $\int_a^t g(x) dx \leq M$  for  $t > a$ , så ved teorem 2 konvergerer integralet av  $g$ . Altså er (1) bevist. Punkt (2) følger direkte fra (1). ■

Helt tilsvarende resultater gjelder for uekte integraler over intervaller på formene  $\langle -\infty, a \rangle$ ,  $[a, x_0)$  og  $\langle x_0, b \rangle$ .

**Eksempel 4**  $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^4+1}} dx$       Konvergerer dette?

Tja, vi har  $0 \leq \frac{1}{\sqrt{x^4+1}} < \frac{1}{\sqrt{x^4}} = \frac{1}{x^2}$  for alle aktuelle  $x$ ,

og vi så i eksempel 1 ovenfor at  $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$  konvergerer.

Ergo konvergerer integralet vårt ved sammenlikningstesten. ■

**Teorem 4 Grense-sammenlikningstesten for integraler**

Betrakt  $\int_a^\infty f(x)dx$  og  $\int_a^\infty g(x)dx$ , der  $f$  og  $g$  er positive og kontinuerlige.  
Hvis

$$L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{fins,} \quad \text{og} \quad 0 < L < \infty,$$

så enten *konvergerer begge integralene* eller *divergerer begge integralene*.

**Bevis** Velg konstanter  $P$  og  $Q$  slik at  $0 < P < L < Q$ . Siden  $f(x)/g(x)$  går mot  $L$ , har vi da for tilstrekkelig store  $x$

$$P < \frac{f(x)}{g(x)} < Q, \quad \text{dvs.} \quad P \cdot g(x) < f(x) < Q \cdot g(x).$$

Vi bruker så den vanlige sammenlikningstesten:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx \text{ konv.} &\implies \int P \cdot g(x) dx \text{ konv,} \quad \text{dvs.} \quad \int g(x) dx \text{ konv.} \\ \int f(x) dx \text{ div.} &\implies \int Q \cdot g(x) dx \text{ div.,} \quad \text{dvs.} \quad \int g(x) dx \text{ div.} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Stikkord for bruk av denne testen: Finn dominerende ledd i funksjonen din, og finn på den måten en enklere funksjon du kan sammenlikne med.

**Eksempel 5**  $\int_1^\infty \frac{x^{3/2} + 1}{x^{5/2} + 1} dx$  Konvergerer dette?

Det dominerende leddet i telleren er  $x^{3/2}$ , og det dominerende i nevneren er  $x^{5/2}$ . Funksjonen  $f(x)$  "går" derfor som  $g(x) = x^{3/2}/x^{5/2} = 1/x$ . Vi vet at det tilsvarende integralet av  $g$  divergerer (eksempel 2). Får

$$L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^{3/2}+1}{x^{5/2}+1}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{5/2} + x}{x^{5/2} + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + x^{-3/2}}{1 + x^{-5/2}} = 1$$

dvs. integralet divergerer ved GS-testen.  $\blacksquare$

**2.12 Oppgaver**

**1.** Finn integralene under, hvis de konvergerer.

a)  $\int_0^\infty e^{-x} dx$

b)  $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{(x-3)^2} dx$

c)  $\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}} dx$

d)  $\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx$

e)  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$

f)  $\int_{-1}^0 \frac{1}{x} dx$

**2.** Avgjør om integralene under konvergerer.

a)  $\int_1^\infty e^{-x^2} dx$

b)  $\int_1^\infty \frac{x}{x^3+1} dx$

c)  $\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x^{3/2}} dx$

d)  $\int_2^\infty \frac{e^{-x}}{1-x^2} dx$

e)  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{x^3+3}} dx$

f)  $\int_0^1 \frac{1}{\arctan x} dx$

## 2.13 Ellipser, parabler og hyperbler

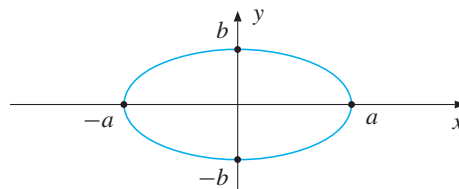
Ellipser, parabler og hyperbler kalles med en fellesbetegnelse *kjeglesnitt-kurver* i planet, eller bare **kjeglesnitt**. Grunnen til denne betegnelsen er at man kan få frem disse typene kurver ved å snitte en dobbelkjegle (dobbel kroneis-kjeks) med  $xy$ -planet på ulike måter. Vi går ikke inn på dette, da vi ikke kommer til å få bruk for det.

Det viktigste å vite om kjeglesnittene er hvordan likningene deres ser ut. Vi skal nå ta dem for oss ett for ett.

**ELLIPSER** Likningen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

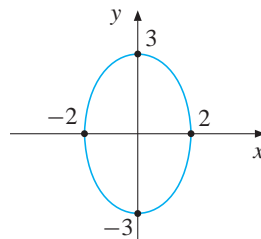
er standardlikningen for en ellipse med **halvaksler**  $a$  og  $b$ . Se figur under.



Hvis  $a = b$ , får vi likningen for en *sirkel* med sentrum i  $(0, 0)$  (gang opp  $a^2$  på begge sider). Sirkler er altså spesialtilfeller av ellipser.

**Eksempel 1** Skisser ellipsen med likning  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ .

**Løsning** Skjæring med  $y$ -aksen (setter  $x = 0$ ) blir  $y = \pm 3$ . Skjæring med  $x$ -aksen (setter  $y = 0$ ) blir  $x = \pm 2$ . Tegningen blir dermed slik:



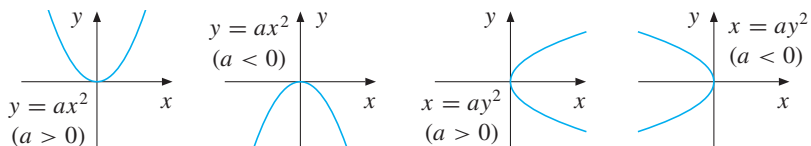
Halvaksene er her 2 og 3, altså. Du ser nå hvorfor en ellipse blir som en flattrøkt sirkel; det henger sammen med at skjæringspunktene med aksene ligger i ulik avstand fra origo. ■



**PARABLER** Likningene

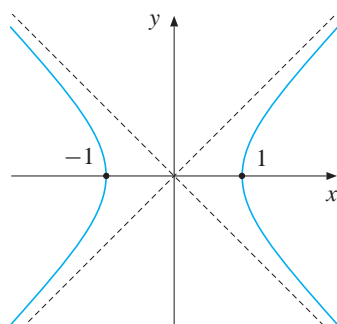
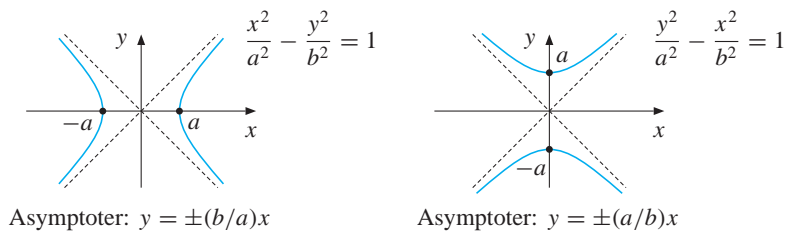
$$y = ax^2 \quad \text{og} \quad x = ay^2$$

er standardlikningene for parabler. Se figurene under.

**HYPERBLER** Likningene

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{og} \quad \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

er standardlikningene for hyperbler. Se figurene under.



Figur 2.13.3

**Eksempel 2** Skisser hyperbelen  $x^2 - y^2 = 1$ .

**Løsning** Løsning med hensyn på  $y$  gir

$$y = \pm\sqrt{x^2 - 1}.$$

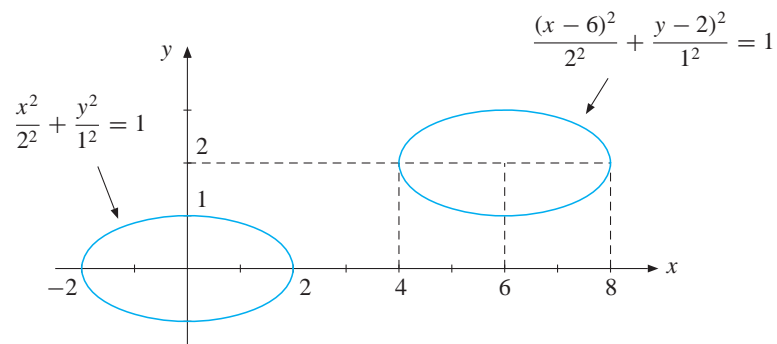
Pluss/minus svarer bare til at vi speiler grafen om  $x$ -aksen. Vi ser på pluss-tilfellet først. Vi ser at

$$y(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

ikke er definert for  $x \in \langle -1, 1 \rangle$ , og at  $y(-1) = y(1) = 0$ . Vi har også  $y(-x) = y(x)$ , dvs. grafen er symmetrisk om  $y$ -aksen. Videre kan ved hjelp av standardmetoden vise at  $y(x)/x$  har skråasymptoten  $y = x$  når  $x \rightarrow \infty$ . Kurven blir dermed som vist på figuren 2.13.3. ■

## Translaterte kjeglesnitt

Å translaterer betyr å flytte uten å rotere. Hvis vi erstatter  $x$  med  $x - h$  og  $y$  med  $y - k$  i likningene vi hadde i sted, blir kjeglesnittene våre flyttet slik at punktet  $(h, k)$  spiller den rollen som origo spilte før. Punktet  $(h, k)$  kalles kjeglesnittets *sentrum*. For eksempel kan vi se på en ellipse:



De translatererte utgavene av standardlikningene våre blir slik:

Ellipse:  $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

Parabel:  $y - k = a(x - h)^2$  og  $x - h = a(y - k)^2$

Hyperbel:  $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$  og  $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

## Utvidelse til fullstendig kvadrat

Å utvide et uttrykk  $ax^2 + bx + c$  til fullstendig kvadrat betyr å bruke kvadratsetningene til å skrive det på formen  $A(x + B)^2 + C$ . Eksempel:

$$\begin{aligned} -3x^2 + 18x - 17 &= -3(x^2 - 6x) - 17 \\ &\stackrel{\text{trix}}{=} -3(x^2 - 6x + 9 - 9) - 17 \\ &= -3(x^2 - 6x + 9) + 27 - 17 \\ &= -3(x - 3)^2 + 10. \end{aligned}$$

**Trix-overgangen:** Du finner det tallet du skal legge til og trekke fra inne i parentesen ved å *halvere og kvadrere* tallet som står foran  $x$ . I eksemplet står det 6 foran  $x$ . Halvering gir 3, og kvadrering gir 9.

## Klassifikasjon av kjeglesnitt

La oss ta utgangspunkt i en likning på formen

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

der  $A, C, D, E, F$  er konstanter. Bortsett fra i noen sære unntakstilfeller (som f.eks.  $A = C = D = E = 0, F \neq 0$ ) vil denne likningen kunne gjøres om til en av de tre translaterede standardlikningene for kjeglesnitt. Metode: Utvid til fullstendige kvadrater i  $x$  og  $y$ . På denne måten kan vi finne ut hva slags kjeglesnitt likningen beskriver, og så kan vi tegne det på vanlig måte. Råd: Hvis du får et kjeglesnitt med  $(h, k) \neq (0, 0)$ , så tegn først det tilsvarende kjeglesnittet du får ved å sette  $h = k = 0$ . Flytt så figuren til posisjon  $(h, k)$  etterpå.

**Eksempel 3** Klassifiser kjeglesnittet  $x^2 + 9y^2 - 6x + 18y + 9 = 0$ .

**Løsning** Vi utvider til fullstendige kvadrater i  $x$  og  $y$ :

$$\begin{aligned} x^2 + 9y^2 - 6x + 18y + 9 &= 0 \\ (x^2 - 6x + 9) + 9(y^2 + 2y + 1) + 9 &= 9 + 9 \\ (x - 3)^2 + 9(y + 1)^2 &= 9 \\ \frac{(x - 3)^2}{3^2} + \frac{(y + 1)^2}{1^2} &= 1 \quad \text{Ellipse!} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

### 2.13 Oppgaver

**1.** Skisser følgende kjeglesnitt, og angi hvilken type (ellipser, parabler eller hyperbler) de er av.

a)  $y^2 - x^2 = 1$                       b)  $\frac{x^2}{25} + y^2 = 1$   
 c)  $4x^2 + y^2 = 1$                     d)  $x - 8y^2 = 0$

**2.** Skisser følgende kjeglesnitt, og angi hvilken type (ellipser, parabler eller hyperbler) de er av.

a)  $(y - 1)^2 - (x - 2)^2 = 1$         b)  $x - 8y^2 = 5$   
 c)  $\frac{(x + 2)^2}{25} + (y - 3)^2 = 1$

**3.** Utvid følgende uttrykk til fullstendig kvadrat.

a)  $2x^2 + 12x - 1$                     b)  $-x^2 - x + 1$

c)  $y^2 - y$                               d)  $x^2 + (1/2)x + 1$

**4.** Avgjør om kjeglesnittene under er ellipser, hyperbler eller parabler, og skisser kurvene.

a)  $9x^2 - 18x + 4y^2 - 16y - 11 = 0$   
 b)  $4x^2 - y^2 + 10y - 21 = 0$   
 c)  $x - 2y^2 + 4y - 5 = 0$

**5.** Som nevnt i teksten ovenfor, vil likningen

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

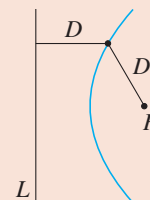
for enkelte valg av konstantene  $A, C, D, E$  og  $F$  verken representere en ellipse, en parabel eller en hyperbel. Vi kaller dette *degenererte tilfeller*. Finn eksempler på dette. Prøv å skaffe deg oversikt over alle mulighetene.

## 2.14 Geometriske egenskaper ved kjeglesnittene

Vi skal nå se på alternative, geometriske definisjoner av kjeglesnittene.

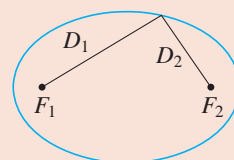
### Geometrisk definisjon av parabler

La  $L$  være en rett linje i planet, og la  $F$  være et punkt som ikke ligger på  $L$ . Mengden av punkter i planet som ligger like langt fra  $L$  som fra  $F$  kalles en *parabel* med styrelinje  $L$  og brennpunkt  $F$ .



### Geometrisk definisjon av ellipser

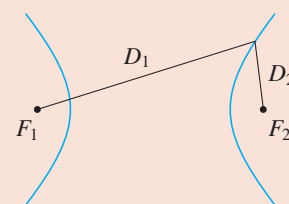
La  $F_1 \neq F_2$  være to punkter i planet, og la  $a$  være et reelt tall slik at avstanden fra  $F_1$  til  $F_2$  er mindre enn  $2a$ . Mengden av punkter i planet slik at *summen* av avstandene til  $F_1$  og  $F_2$  er lik  $2a$ , kalles en *ellipse* med brennpunkter  $F_1$  og  $F_2$ .



$$D_1 + D_2 = 2a$$

### Geometrisk definisjon av hyperbler

La  $F_1 \neq F_2$  være to punkter i planet, og la  $a > 0$  være et reelt tall. Mengden av punkter i planet slik at *differansen* mellom avstandene til  $F_1$  og  $F_2$  er lik  $2a$ , kalles en *hyperbel* med brennpunkter  $F_1$  og  $F_2$ .



$$|D_1 - D_2| = 2a$$

Vi må sjekke at disse nye definisjonene stemmer med de gamle.

*Parabeldefinisjonen:*

Anta at  $L$  er linjen  $x = -d$ , og at brennpunktet er  $F = (d, 0)$ .

Ved å sette de to uttrykkene for  $D$  lik hverandre, får vi

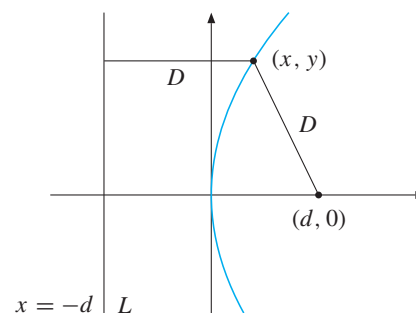
$$\sqrt{y^2 + (x - d)^2} = x + d.$$

Kvadrering gir

$$y^2 + (x - d)^2 = (x + d)^2.$$

Ganger du ut parentesene

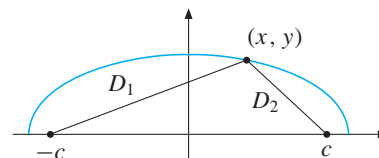
og døper  $a = 1/4d$ , fås standardlikningen  $x = ay^2$ . ■



*Ellipsedefinisjonen:*

Anta at brennpunktene er

$$F_1 = (-c, 0) \text{ og } F_2 = (c, 0).$$

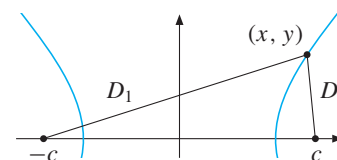


Kravet  $D_1 + D_2 = 2a$  gir  $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$ . Ved å flytte over høyre rotuttrykk og kvadrere, fås  $a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx$ . Ny kvadrering gir  $(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$ . Døper vi  $b^2 = a^2 - c^2$  og deler på  $a^2b^2$  overalt, blir resultatet likningen  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ . ■

*Hyperbeldefinisjonen:*

La oss igjen anta at

$$\text{at } F_1 = (-c, 0) \text{ og } F_2 = (c, 0).$$

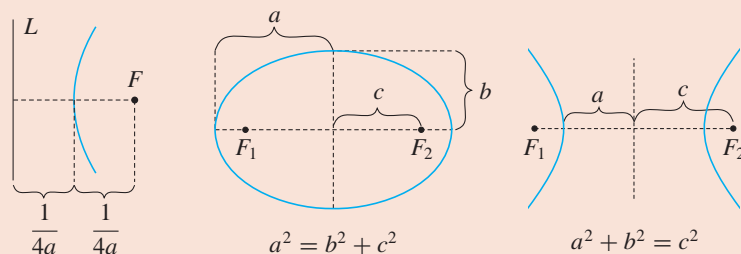


Hvis  $(x, y)$  er på hyperbelen, fås  $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$ , der  $+2a$  gir høyre gren og  $-2a$  gir venstre gren på hyperbelen. Ved å regne slik vi gjorde for ellipsen (ta gjerne de to tilfellene  $\pm 2a$  hver for seg) og døpe  $b^2 = c^2 - a^2$ , får du standardlikningen

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad \blacksquare$$

Resultatene blir analoge hvis rollene til  $x$  og  $y$  byttes om, eller kjegle-snittene er translert. Dermed ser vi at de nye definisjonene stemmer med de gamle. Sammenhengen mellom standardlikningene s. 96 og plassering av styrelinjer/brennpunkter er vist på figurene under, som jeg refererer til som *hjelpefigurene*. På ellipsefiguren forutsettes  $a > b$ .

**Hjelpefigurene** (Refererer til standardlikningene i boksen s. 96)



## Refleksjonsegenskaper

Vi skal nå se på en fysisk anvendelse. Anta at en lysstråle skal bevege seg fra et punkt  $A$  til et punkt  $B$  via et punkt  $P$  på et flatt speil. Ifølge

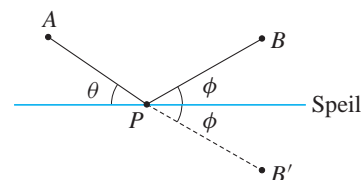
**minste virknings prinsipp** i fysikken vil

da lyset “velge” refleksjonspunktet  $P$

på speilet slik at total tilbakelagt veilengde  $APB$  blir minst mulig.

Hvis vi lar  $B'$  være speilbildet av  $B$  på motsatt side av speilet (se figur), er veilengden  $APB'$  lik veilengden  $APB$ . Det er klart at veien  $APB'$  blir kortest hvis  $P$

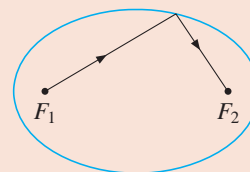
velges slik at hele turen blir rettlinjet, og da er  $\theta = \phi$ . Med andre ord: *Når lys reflekteres via et flatt objekt, er utfallsvinkel lik innfallsvinkel.*



La oss nå tenke oss at en lysstråle beveger seg i planet, og at den treffer en kjeglesnittkurve i et punkt  $P$ . Vi antar at lysstrålen da vil bli reflektert fra kurven på en slik måte at innfallsvinkel er lik utfallsvinkel sett i forhold til kurvens tangentlinje i  $P$ . (Tangenten defineres ved å oppfatte kurven som grafen til en funksjon av  $x$  eller  $y$ , lokalt rundt  $P$ .) Vi har da følgende to pene resultater om ellipser og parabler.

### **Teorem 1** Refleksjonsegenskapen til ellipser

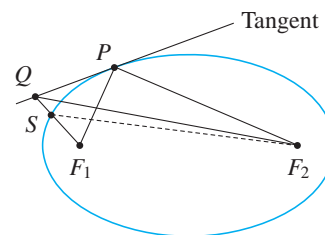
En lysstråle som sendes ut fra det ene brennpunktet i en ellipse vil reflekteres over til det andre brennpunktet, uansett hvilken retning den sendes i.



**Begrunnelse** Se på figuren til høyre. Vi må vise at innfallsvinkel er lik utfallsvinkel i  $P$ .

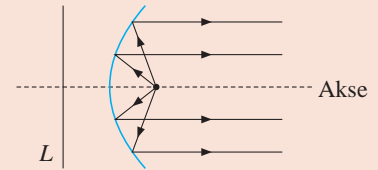
Siden kurven er en ellipse, er veien  $F_1SF_2$  like lang som veien  $F_1PF_2$ .

Dermed er veien  $F_1QF_2$  lengre enn  $F_1PF_2$ . Altså: Hvis man skal gå fra  $F_1$  til  $F_2$  via et punkt på tangenten, er det punktet  $P$  som gir kortest vei. Ved diskusjonen øverst på siden følger dermed at utfallsvinkel er lik innfallsvinkel i  $P$ ! ■



**Teorem 2 Refleksjonsegenskapen til parabler**

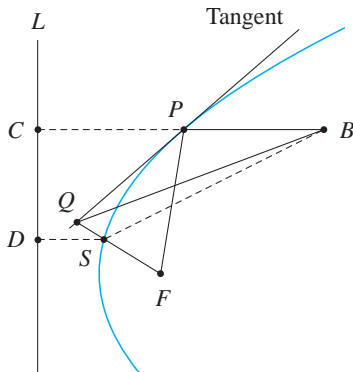
En lysstråle som sendes ut fra brennpunktet til en parabel vil reflekteres parallelt med parabelens symmetriakse, uansett hvilken retning den sendes i.



**Begrunnelse** Se på figuren 2.14.6. Vi må vise at lysstrålen BPF har innfallsvinkel lik utfallsvinkel i  $P$ . Vi har

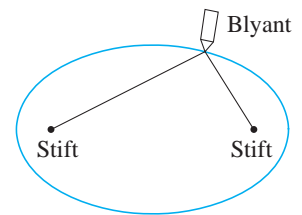
$$\begin{aligned} FP + PB &= CP + PB \\ &\leq DS + SB \\ &= FS + SB \\ &\leq FQ + QB. \end{aligned}$$

Dette viser at veien  $FPB$  er kortere enn  $FQB$ , dvs. av alle punkter på tangenten er  $P$  det punktet som gir kortest vei fra  $F$  til  $B$ . Dermed er utfallsvinkel lik innfallsvinkel i  $P$ . ■



Figur 2.14.6

*Useriøs anvendelse.* Du kan lage deg et ellipseformet biljardbord og imponere dine venner med trick-shots der du skyter en kule fra det ene brennpunktet via vantet og treffer en kule som ligger i det andre. Teoretisk sett skal dette virke uansett hvor på vantet du treffer. (Unngå skru...) Tips til arbeidstegningen: Du kan tegne en perfekt ellipse (pr. def.) ved å feste en slakk snor til to stifter og føre en blyant rundt. Stiftene markerer brennpunktene.



Figur 2.14.8

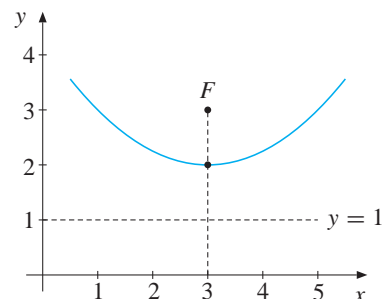
*Seriøs anvendelse.* Refleksjonsegenskapen til parabler utnyttes i både parabolantenner og lyskastere. I parabolantenner bruker man refleksjonsegenskapen baklengs. Antennen er formet som en bit av flaten man får ved å dreie en parabel rundt symmetriaksen. All stråling som kommer inn parallelt med akse vil reflekteres mot brennpunktet, og der plasserer man mottakeren. Se figur 2.14.8.

**Eksempel 1** En parabel har brennpunkt  $(3, 3)$  og styrelinje  $y = 1$ . Finn likningen.

**Løsning** Vi tegner inn brennpunkt og styrelinje på en figur, og ved sammenlikning med hjelpefiguren kan vi så tegne inn hvordan parabelen ligger, se figur til høyre. Så sentrum er  $(h, k) = (3, 2)$ . Siden parabelen åpner seg oppover blir likningen den på formen

$$y - 2 = a(x - 3)^2.$$

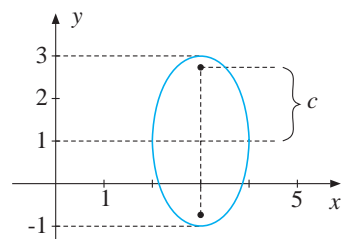
Ved hjelpefiguren ser vi så at  $1/(4a) = 1$ , så  $a = 1/4$ . ■



**Eksempel 2** Finn brennpunktene til ellipsen  $(x - 3)^2 + \frac{(y - 1)^2}{2^2} = 1$ .

**Løsning** Først tegner vi ellipsen, på vanlig måte. Ved sammenlikning med hjelpefiguren tegner vi så inn hvordan brennpunktene vil ligge, sånn omtrent:

Vi har  $a = 2$  og  $b = 1$ .  
Likningen  $a^2 = b^2 + c^2$   
gir  $c = \sqrt{3}$ ,  
og dermed kan vi lese  
av at brennpunktene er  
 $(3, 1 + \sqrt{3})$  og  $(3, 1 - \sqrt{3})$ . ■



## 2.14 Oppgaver

**1.** En parabel har brennpunkt  $(4, 1)$  og styrelinje gitt ved  $x = 2$ . Finn likningen for parabelen.

**2.** En parabel har styrelinje  $y = 0$  og brennpunkt  $(5, 1)$ . Finn likningen for parabelen.

**3.** Finn brennpunktet og styrelinjen for følgende parabler:

- a)  $y = x^2$                                       b)  $x = y^2$   
c)  $4x^2 - 16x + y + 16 = 0$

**4.** Finn brennpunktene til ellipsen

$$9(x - 2)^2 + 4y^2 = 36.$$

**5.** En ellipse består av de punkter som er slik at summen av avstandene til de to brennpunktene  $(1, 1)$  og  $(5, 1)$  er lik 8. Finn likningen for ellipsen.

**6.** Finn brennpunktene til hyperbelen gitt ved likningen  $y^2 - x^2 = 1$ .



**Blandede oppgaver til kapittel 2**

1. Vis at vi for alle naturlige tall  $n \geq k$  har

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Tolk dette resultatet i sammenheng med utvalg.

2. I vanlig poker får man utdelt 5 kort fra en (forhåpentlig) tilfeldig stokket kortstokk med 52 kort. Stokken har 13 kort i hver av de fire fargene. Hva er sannsynligheten for å få flush, dvs. at alle de fem kortene har samme farge?

3. Vi spiller fortsatt poker. Ess kan brukes både som verdi 1 og som verdi 14. Hva er sannsynligheten for at du med de fem kortene du får utdelt fra en tilfeldig stokket kortstokk har

- a) Straight flush, altså fem kort i samme farge med tallverdier etterfølgende hverandre?
- b) Fire like (fire kort med samme tallverdi)?

4. Eksentrisiteten til kjeglesnitt. Kikk på hjelpefigurene nederst side 99, med referanse videre til standardlikningene i boksen side 10.0.0. For ellipser og hyperbler definerer vi eksentrisiteten  $e$  ved

$$e = c/a.$$

Eksentrisiteten til parabler defineres som  $e = 1$ .

- a) Begrunn at for ellipser er  $e \in [0, 1)$ , der  $e = 0$  tilsvarer en sirkel. Begrunn også at for hyperbler er  $e > 1$ .
- b) Finn eksentrisiteten til ellipsene  $(x^2/4) + y^2 = 1$  og  $x^2 + (y^2/16) = 1$  og  $x^2 + y^2 = 1$ . Tegn disse ellipsene. Hvordan kan du tolke eksentrisiteten til en ellipse geometrisk?
- c) Finn eksentrisiteten til kurven  $x^2 - y^2 = 1$ .

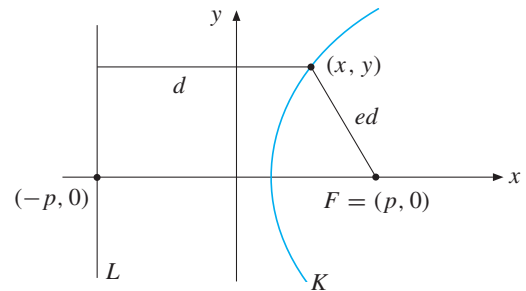
5. Fra mekanikkens likninger kan man utlede at objektene som går i bane rundt solen beveger seg i ellipseformede baner med solen i det ene brennpunktet. Jordbanen har eksentrisitet  $e \approx 0.0167$ , og Plutos bane har eksentrisitet  $e \approx 0.249$ . Banen til Kometen Kahoutek har derimot eksentrisitet  $e \approx 0.99993$ . Finn forholdet  $a/b$  mellom største og minste halvakse for banene til Jorden, Pluto og Kahoutek. Skisser formen på ellipsene, med solens posisjon i det ene brennpunktet.

6. En alternativ geometrisk beskrivelse av kjeglesnittene. La  $p > 0$  være et reelt tall, og  $F$  være punktet  $F = (p, 0)$  i planet, og la  $L$  være den rette linjen med likning

$$x = -p.$$

La så kurven  $K$  være mengden av punkter  $(x, y)$  i planet slik at (avstanden til  $F$ ) =  $e \cdot$  (avstanden til  $L$ .)

Figur:



Vi skal i denne oppgaven se at  $K$  blir et kjeglesnitt med eksentrisitet  $e$  og brennpunkt  $F$ . Med andre ord: Hvis  $e < 1$  får vi en ellipse, hvis  $e = 1$  får vi en parabel, og hvis  $e > 1$  får vi en hyperbel! Linjen  $L$  kalles styrelinjen til kjeglesnittet.

- a) Vis at kravet for at  $(x, y)$  skal ligge på kurven  $K$  kan skrives  $x^2(1 - e^2) - 2p(1 + e^2)x + y^2 = -p^2(1 - e^2)$
- b) Vis at hvis  $e = 1$ , så er  $K$  en parabel med brennpunkt  $F$ . Angi likningen til  $K$ .
- c) Anta nå  $e \neq 1$ , og døp  $h = p(1 + e^2)/(1 - e^2)$ . Vis at likningen fra punkt a) da kan skrives

$$x^2 + 2xh + h^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = -p^2 + h^2.$$

La så  $a^2 = -p^2 + h^2$ , og vis likningen for  $K$  da kan skrives

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - e^2)} = 1.$$

- d) Vis at hvis  $e < 1$ , blir  $K$  en ellipse med eksentrisitet  $e$  og brennpunkt  $F$ .
- e) Vis at hvis  $e > 1$ , blir  $K$  en hyperbel med eksentrisitet  $e$  og brennpunkt  $F$ .

7. Gabriels horn er flaten som fremkommer når grafen til

$$f(x) = 1/x$$

på intervallet  $[1, \infty)$  roteres om  $x$ -aksen.

- a) Vis at arealet av Gabriels horn er uendelig.
- b) Vis at volumet begrenset av Gabriels horn er endelig, dvs. at legemet som fremkommer når området under grafen til

$$f(x) = 1/x$$

på intervallet  $[1, \infty)$  dreies om  $x$ -aksen, har endelig volum.

8. Akilles og skilpadden. I en løpskonkurranse mellom grekeren Akilles og en skilpadde, får skilpadden et forsprang på  $S_0 = 80$

meter ved starten. Akilles løper med fart 9 m/s, mens skilpadden kun klarer 1 m/s.

- a) Hvor lang tid  $T_0$  bruker Akilles på å tilbakelegge de  $S_0$  meterne som skilpadden fikk i forsprang? Finn lengden  $S_1$  skilpadden beveger seg på tiden  $T_0$ .
- b) Hvor lang tid  $T_1$  bruker Akilles på å tilbakelegge de  $S_1$  meterne? Finn lengden  $S_2$  skilpadden beveget seg på tiden  $T_1$ .
- c) Hvor lang tid  $T_2$  bruker Akilles på å tilbakelegge de  $S_2$  me-

terne? Finn lengden  $S_3$  skilpadden beveget seg på tiden  $T_2$ .

- d) Mønsteret antydnet i a) – c) kan fortsettes i det uendelige, og det ser paradoksalt nok ut til at Akilles "aldri" vil nå igjen skilpadden. Forklar, ved å vise at

$$T_0 + T_1 + T_2 + T_3 + \dots$$

er en geometrisk rekke, at den konklusjonen ikke holder. Hvor lang tid bruker Akilles på å ta igjen skilpadden?

# Kapittel 3

## Integrasjonsteknikker

---

*Dette kapitlet bygger på kapittel 1, seksjonene 2.5 og 2.6 samt kapitlene 1–7 fra MIP.*

---

## 3.1 Introduksjon til integrasjonsteknikker

---

Dette kapitlet inneholder ikke mye ny teori, det er en ren verktøykasse med triks man kan bruke for å regne ut spesielle typer integraler. Alle triksene bygger på en av (eller begge) de to grunnleggende teknikkene for integrasjon som vi har, nemlig *substitusjon* (seksjon 3.5) og *delvis integrasjon* (seksjon 5.10). Før du begynner på dette kapitlet, bør du sørge for å ha disse to grunnleggende teknikkene rimelig godt i fingrene.

### “Uløselige” integraler

Å anti-derivere er på en fundamental måte vanskeligere enn å derivere. Ved hjelp av derivasjonsreglene våre kan vi finne den deriverte av *alle* såkalte “elementære funksjoner”, dvs. funksjoner som kan uttrykkes ved en regneformel sammensatt av rasjonale funksjoner, logaritmer, eksponentialfunksjoner, potensfunksjoner og trigonometriske funksjoner ved et endelig antall addisjoner, subtraksjoner, multiplikasjoner, divisjoner og funksjonssammensetninger. Kort og godt: Vi kan finne den deriverte av alle funksjoner som er gitt ved en “vanlig formel”. Derimot finnes det ikke noe tilsvarende sett med regler som kan brukes til å finne en anti-derivert av alle elementære funksjoner. Et berømt eksempel er funksjonen

$$f(x) = e^{-x^2}.$$

Denne er kontinuerlig, så ved fundamentalteoremets del 1 (s. 87) vet vi at den har en anti-derivert  $F(x)$ . Men man kan vise (vi dropper det) at  $F(x)$  ikke er en elementær funksjon, dvs. den lar seg ikke uttrykke som en formel sammensatt av de vanlige funksjonene våre. Dette betyr at det ubestemte integralet

$$\int e^{-x^2} dx$$

i en viss forstand er *uløselig*, dvs. du kan ikke finne noen endelig “formel” for svaret. (Derimot kan integralet uttrykkes som en rekke, se kap. 9.) Andre berømte eksempler på integraler med denne egenskapen er

$$\int \frac{\sin x}{x} dx \quad \text{og} \quad \int \sqrt{1+x^4} dx.$$

Så det er langt fra alle integraler vi kan løse med en endelig formel.

### Maskinell utregning av integraler

Det finnes i dag matematiske computerprogrammer som kan løse diverse typer ubestemte integraler automatisk, inkludert de typene som dekkes i dette lille kapitlet. (Gitt at minnekapasiteten ikke overskrides.) Men dette betyr ikke

at det nå er blitt uinteressant å lære seg å løse slike integraler på papir. De integraltypene som presenteres her representerer en minimalpakke av integraler som det selv i våre dager er lurt å kjenne til hvordan kan løses for hånd. I mange sammenhenger er det f.eks. kun kvalitativ informasjon til de visse trekk ved de antideriverte funksjonene man trenger. Slik innsikt kan man skaffe seg ut fra løsningsmetodene for integralene, og dette kan fungere også i situasjoner hvor det aktuelle integralet ikke kan regnes fullstendig ut, f. eks. fordi det ikke er fullt spesifisert eller fordi det inngår parametre på kompliserte måter. I andre situasjoner kan det f.eks. være aktuelt å tilnærme et gitt integral med et som er formel-løselig og som er slik at den anti-deriverte har visse egenskaper. Kjennskap til integraltyper som er formel-løselige og innsikt i løsningsmetodene for disse er da nyttig.

## Integraltabeller

Mange lærebøker inneholder lange tabeller over ubestemte integraler, og det finnes også bøker som kun består av integraltabeller. En mini-utgave av en slik tabell basert på resultater fra foregående kapitler er vist her:

$$\begin{array}{ll}
 (1) \int \cos x \, dx = \sin x + C & (2) \int \sin x \, dx = -\cos x + C \\
 (3) \int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + C & (4) \int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\cot x + C \\
 (5) \int e^x \, dx = e^x + C & (6) \int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan x + C \\
 (7) \int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + C & (8) \int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C
 \end{array}$$

I likning (8) må vi forutsette  $n \neq -1$ . Resultatene i denne tabellen brukes såpass ofte at du bør prøve å lære dem utenat.

### 3.1 Oppgaver

1. Ovenfor skrev jeg at det ubestemte integralet

$$\int e^{-x^2} \, dx$$

i en viss forstand ikke er løsbart. Vis ut fra dette at integralet

$$\int x^2 e^{-x^2} \, dx$$

heller ikke kan være løsbart i denne forstand.

2. Avgjør om følgende integraler er "løsbare", og løs dem dersom det går an.

a)  $\int x e^{-x^4} \, dx$

b)  $\int x e^{-x^2} \, dx$

c)  $\int \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \, dx$

d)  $\int \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx$

## 3.2 Trigonometriske integraler

Denne seksjonen dreier seg om spesielle typer trigonometriske integraler.

A. Integraler av typen  $\int \sin^m x \cos^n x dx$  ( $n$  og  $m$  hele tall  $\geq 0$ )

**Tilfelle 1:** Enten  $m$  eller  $n$  (eller begge!) er oddetall.

Hvis  $n$  er odde, så skriv  $\cos^n x = \cos^{n-1} x \cdot \cos x$ . Gjør så om  $\cos^{n-1} x$  ved hjelp av formelen  $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ , og substituer  $u = \sin x$ .

Tilsvarende hvis  $m$  er odde. Skriv da  $\sin^m x = \sin^{m-1} x \cdot \sin x$ , bruk  $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$  og sett  $u = \cos x$ .

**Eksempel 1** 
$$\begin{aligned} \int \sin^8 x \cos^5 x dx &= \int \sin^8 x \cos^4 x \cdot \cos x dx \\ &= \int \sin^8 x (1 - \sin^2 x)^2 \cos x dx \\ &\stackrel{u=\sin x}{=} \int u^8 (1 - u^2)^2 du = \int (u^8 - 2u^{10} + u^{12}) du \\ &= \frac{1}{9}u^9 - \frac{2}{11}u^{11} + \frac{1}{13}u^{13} + C \\ &= \frac{1}{9}\sin^9 x - \frac{2}{11}\sin^{11} x + \frac{1}{13}\sin^{13} x + C. \blacksquare \end{aligned}$$

**Tilfelle 2:** Både  $m$  og  $n$  er partall. Bruk

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \quad \text{og} \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

til å redusere potensene trinnvis. Gang ut parentesene i hvert trinn. Formlene ovenfor fås ved å vrenge uttrykkene  $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$  og  $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ .

**Eksempel 2** 
$$\begin{aligned} \int \cos^4 x dx &= \int \left[ \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \right]^2 dx \quad (\text{her var } m = 0) \\ &= \frac{1}{4} \int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx \\ &= \frac{1}{4} \int \left( 1 + 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1 + \cos 4x) \right) dx \\ &= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C. \blacksquare \end{aligned}$$

B. Integraler av typen  $\int \frac{\sin^m x}{\cos^n x} dx$  og  $\int \frac{\cos^m x}{\sin^n x} dx$

( $n$  og  $m$  hele tall  $\geq 0$ . Antar her at  $m$  eller  $n$  er odde.)

**Tilfelle 1:** Er  $m$  odde, så *spalt* av en faktor i telleren og sett inn for resten av telleren vha.  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ . Sett så  $u = \sin x$  eller  $u = \cos x$ .

**Eksempel 3**  $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^{10} x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^{10} x} \cdot \sin x dx$

$$\stackrel{u=\cos x}{\Downarrow} \int \frac{u^2 - 1}{u^{10}} du = \text{etc.} \blacksquare$$

**Tilfelle 2:** Hvis  $n$  er odde, så *gang* oppe og nede med en ekstra faktor av det som står i nevneren. Deretter analogt med tilfelle 1.

**Eksempel 4**  $\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cos x dx = \int \frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x} \cos x dx$

$$\stackrel{u=\sin x}{\Downarrow} \int \frac{u^2}{1 - u^2} du = \text{etc.}$$

Integralet kan nå løses ved delbrøkkoppspalting, se seksjon 8.2.  $\blacksquare$

## 3.2 Oppgaver

### 1. Beregn integralene

a)  $\int \cos^2 x \sin^2 x dx$       b)  $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x} dx$   
 c)  $\int \frac{\cos^2 x}{\sin x} dx$       d)  $\int \sin^3 x \cos^4 x dx$

**2.** Integralene nedenfor er ikke nøyaktig på den formen vi har sett på i denne seksjonen, men de lar seg løse ved liknende ideer. Finn følgende:

a)  $\int \cos^5 x \sqrt{\sin x} dx$       b)  $\int \frac{\cos^5 x}{(\sin x)^{3/2}} dx$

### 3. Finn integralene

a)  $\int \frac{\cos^7 x}{\sin^2 x} dx$       b)  $\int \sin x \cos^3 x dx$

**4.** Finn integralet  $\int \sin^4 x \cos^2 x dx$ .

**5.** I denne oppgaven skal vi bruke formlene

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) - \cos(A + B)]$$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) + \cos(A + B)]$$

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2}[\sin(A - B) + \sin(A + B)]$$

til å løse en spesiell type integraler.

a) Utled de tre formlene.

b) Finn  $\int \sin 7x \cos 4x dx$

c) Finn  $\int \sin 5x \sin 9x dx$

d) Finn  $\int \cos 12x \cos 7x dx$

### 3.3 Trigonometriske substitusjoner

Disse substitusjonene kan bl.a. brukes til å knekke integraler der det inngår spesielle typer rottuttrykk. La  $a > 0$  være en konstant.

1. Hvis integralet inneholder  $\sqrt{a^2 - x^2}$ , så prøv  $x = a \sin \theta$ .

Da har vi

$$dx = a \cos \theta \, d\theta \qquad \sqrt{a^2 - x^2} = a \cos \theta$$

$$\sin \theta = \frac{x}{a} \qquad \cos \theta = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$$

2. Hvis integralet inneholder  $\sqrt{x^2 - a^2}$  og  $x \geq a$ , så prøv  $x = \frac{a}{\cos \theta}$ .

Da har vi

$$dx = a \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} d\theta \qquad \sqrt{x^2 - a^2} = a \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} \qquad \cos \theta = \frac{a}{x}$$

3. Hvis integralet inneholder  $\sqrt{a^2 + x^2}$  eller  $a^2 + x^2$ , prøv  $x = a \tan \theta$ .

Da har vi

$$dx = \frac{a}{\cos^2 \theta} d\theta \qquad \sqrt{a^2 + x^2} = \frac{a}{\cos \theta}$$

$$\sin \theta = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} \qquad \cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

#### Utfyllende forklaring til nr. 1 (de andre tilsvarende)

Vi ser at kun  $x \in [-a, a]$  går an i  $\sqrt{a^2 - x^2}$ . Dette tilsvarer  $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , og på dette området er  $\cos \theta \geq 0$ . Dermed får vi

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 - x^2} &= \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 \theta} = \sqrt{a^2(1 - \sin^2 \theta)} \\ &= \sqrt{a^2 \cos^2 \theta} = a \cos \theta. \end{aligned}$$

Merk at alle de tre trigonometriske substitusjonene fungerer "baklengs". Den nye variabelen heter  $\theta$ . For  $x = a \sin \theta$  har vi  $x = h(\theta) = a \sin \theta$ . Siden  $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , kan vi vrenge og få  $\theta = \theta(x) = \arcsin(x/a)$ . Dette gir  $h(\theta(x)) = a \sin(\arcsin(x/a)) = x$ , slik teorem 10.0.0 krever. ■



**Eksempel 1**  $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$  (tilfelle 1,  $a = 1$ , sub.  $x = \sin \theta$ )

$$= \int \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \cos \theta d\theta$$

$$= \int \sin^2 \theta d\theta \quad (\text{trig. integral type A})$$

$$= \int \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta) d\theta = \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta + C$$

$$= \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{2}\sin \theta \cos \theta + C \quad (\text{klart for tilbakesub.})$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin x - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C. \blacksquare$$

**Eksempel 2**  $\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x} dx$   $x > 4$  (tilfelle 2,  $a = 4$ , sub.  $x = \frac{4}{\cos \theta}$ )

$$= \int \left(4 \cdot \frac{\sin \theta}{\cos \theta}\right) \left(\frac{\cos \theta}{4}\right) \cdot 4 \cdot \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} d\theta$$

$$= 4 \int \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} d\theta \quad (\text{Nyttig triks kommer nå!})$$

$$= 4 \int \frac{1}{\cos^2 \theta} (1 - \cos^2 \theta) d\theta = 4 \tan \theta - 4\theta + C$$

$$= \sqrt{x^2-16} - 4 \arccos\left(\frac{4}{x}\right) + C. \blacksquare$$

### 3.3 Oppgaver

1. Beregn integralene

a)  $\int \frac{1}{\sqrt{16-x^2}} dx$       b)  $\int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$

c)  $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-25}} dx$  (anta  $x > 5$ )

2. La  $a > 0$  være et gitt reelt tall. Finn det ubestemte integralet

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{a^2-x^2}} dx.$$

3. Finn integralene

a)  $\int \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} dx$       b)  $\int x^2\sqrt{9-x^2} dx$

c)  $\int (4-x^2)^{3/2} dx$       d)  $\int \frac{\sqrt{1-u^2}}{u^2} du$

4. Studér den utfyllende forklaringen til substitusjon nr. 1 nederst forrige side, og lag tilsvarende forklaringer til de to andre trigonometriske substitusjonene.

## 3.4 Integraler med annengradsuttrykk

Disse kan ofte forenkles ved å utvide annengradsuttrykkene til fullstendig kvadrat, dvs. ved å skrive  $ax^2 + bx + c$  på formen  $A(x + B)^2 + C$ .

**Eksempel 1**  $\int \frac{dx}{\sqrt{-4x^2 + 32x - 39}}$  (dette betyr  $\int \frac{1}{\sqrt{-4x^2 + 32x - 39}} dx$ )

Utvider til fullstendig kvadrat (jfr. side 190):

$$\begin{aligned} -4x^2 + 32x - 39 &= -4(x^2 - 8x) - 39 \\ &= -4(x^2 - 8x + 16) - 39 + 64 = -4(x - 4)^2 + 25 \end{aligned}$$

Så vi får

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{-4x^2 + 32x - 39}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{25 - 4(x - 4)^2}} \\ &= \frac{1}{5} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - [\frac{2}{5}(x - 4)]^2}} \\ &\stackrel{u = \frac{2}{5}(x - 4)}{\Downarrow} \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{2} \int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \frac{1}{2} \arcsin u + C \\ &= \frac{1}{2} \arcsin \left( \frac{2}{5}(x - 4) \right) + C. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Spesialtilfelle: Integraler på formen  $\int \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^n} dx$ ,

der  $ax^2 + bx + c = 0$  ikke har reell løsning og  $n > 0$  er heltallig. Disse kan *alltid* løses. Jeg refererer til metoden her som "kvadrat-teknikken".

1. Skriv integralet om på formen

$$C_1 \cdot \int \frac{2ax + b}{(ax^2 + bx + c)^n} dx + C_2 \cdot \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

der  $C_1$  og  $C_2$  er konstanter. Trikket vises i eksemplet neste side.

2. Integralet til venstre tas ved substitusjonen  $u = ax^2 + bx + c$ . Høyre integral: Utvid til fullstendig kvadrat og bruk trigonometrisk substitusjon nr. 3. Du får da et integral på formen  $\int \cos^m \theta d\theta$ , der  $m \geq 0$  er heltallig. Dette løses som trigonometrisk integral type A.

**Eksempel 2** 
$$\int \frac{x+2}{(x^2+x+1)^2} dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+1) - \frac{1}{2} + 2}{(x^2+x+1)^2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} dx + \frac{3}{2} \int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$$

Venstre integral løses ved substitusjonen  $u = x^2 + x + 1$ . Høyre integral: Utvidelse til fullstendig kvadrat gir  $x^2 + x + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$ , så vi får

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} &= \int \frac{dx}{[\frac{3}{4} + (x + \frac{1}{2})^2]^2} \\ &= \left(\frac{4}{3}\right)^2 \int \frac{dx}{(1 + [\frac{2}{\sqrt{3}}(x + \frac{1}{2})]^2)^2} \\ &\stackrel{u = \frac{2}{\sqrt{3}}(x + \frac{1}{2})}{=} \frac{16}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \int \frac{du}{(1+u^2)^2} \\ &\stackrel{u = \tan \theta}{=} \frac{8\sqrt{3}}{9} \int \cos^2 \theta d\theta = \frac{8\sqrt{3}}{9} \int \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) d\theta \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{9} (\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta) + C = \frac{4\sqrt{3}}{9} (\theta + \sin \theta \cos \theta) + C \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{9} (\arctan u + \frac{u}{1+u^2}) + C = \text{sett inn for } u. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Om hvorfor metoden alltid virker: Merk at vi fikk  $1 + u^2$  i nevneren etter at vi hadde utvidet til fullstendig kvadrat og ryddet opp. Slik blir det *alltid* når  $ax^2 + bx + c$  ikke har nullpunkter. Med  $u = \tan \theta$  fås så

$$\int \frac{1}{(1+u^2)^n} du = \int \frac{1}{(\frac{1}{\cos \theta})^{2n}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta = \int \cos^{2n-2} \theta d\theta.$$

### 3.4 Oppgaver

1. Gjør ferdig utregningen i eksemplet ovenfor på denne siden, slik at du finner det opprinnelige integralet.

2. Beregn integralene

a)  $\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 9}$       b)  $\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 23}$   
 c)  $\int \frac{4x+1}{(x^2-2x+10)^2} dx$

d)  $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}} dx$

e)  $\int \sqrt{2x-x^2} dx$

3. Vis at for  $|u| < 1$  gir  $u = \sin \theta$  at

$$\int \frac{1}{(1-u^2)^n} du = \int \frac{1}{\cos^{2n-1} \theta} d\theta.$$

## 3.5 Delbrøkoppspalting

Denne metoden kan brukes til å integrere alle rasjonale funksjoner, dvs. funksjoner på formen

$$\frac{p(x)}{q(x)}$$

der  $p(x)$  og  $q(x)$  er polynomer. Eneste forutsetning er at vi klarer å finne en faktorisering av nevneren  $q(x)$ , se punkt 2.

1. Bruk polynomdivisjon inntil  $p(x)$  har lavere grad enn  $q(x)$ .

2. Faktoriser  $q(x)$  i faktorer av typen

$$(x - r)^n \quad \text{og} \quad (ax^2 + bx + c)^n.$$

I leddene til høyre må likningen  $ax^2 + bx + c = 0$  være uten reelle løsninger. Hvis  $p(x)$  og  $q(x)$  har felles faktorer, så forkort.

3. Hver faktor av typen  $(x - r)^n$  i  $q(x)$  gir leddene

$$\frac{a_1}{x - r} + \frac{a_2}{(x - r)^2} + \cdots + \frac{a_n}{(x - r)^n},$$

og hver faktor  $(ax^2 + bx + c)^n$  gir leddene

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_nx + B_n}{(ax^2 + bx + c)^n}.$$

Sett  $\frac{p(x)}{q(x)}$  lik summen av alle leddene du har funnet.

Pass på at alle konstantene har ulike navn.

Gang så med  $q(x)$  overalt, og finn konstantene. Mulige metoder:

- sette inn lure  $x$ -verdier
- først derivere likningen og så sette inn lure  $x$ -verdier
- sammenlikne koeffisientene i polynomene (gir likningssystem)

4. Integralet

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$$

kan nå beregnes ledd for ledd. Leddene med  $(ax^2 + bx + c)$  i nevneren tas ved "kvadrat-teknikken", hvis ikke noe enklere går. ■

**Eksempel 1**  $\int \frac{3x^2 - 3x - 2}{(x^2 - 1)(x - 1)} dx$

Vi går gjennom metoden punkt for punkt.

1. grad  $p = 2$ , grad  $q = 3$ , dvs. ok.
2. Faktoren  $x^2 - 1$  kan faktoriseres, for likningen  $x^2 - 1 = 0$  har løsninger  $x = \pm 1$ . Altså  $(x^2 - 1) = (x + 1)(x - 1)$ , og dermed

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{3x^2 - 3x - 2}{(x - 1)^2(x + 1)}.$$

Ser at verken  $x = 1$  eller  $x = -1$  gir null i telleren, dvs.  $p(x)$  og  $q(x)$  har ingen felles faktorer.

3. Vi får

$$\frac{3x^2 - 3x - 2}{(x - 1)^2(x + 1)} = \frac{a_1}{x - 1} + \frac{a_2}{(x - 1)^2} + \frac{a_3}{x + 1}.$$

Multiplikasjon med nevneren  $q(x)$  gir

$$3x^2 - 3x - 2 = a_1(x - 1)(x + 1) + a_2(x + 1) + a_3(x - 1)^2.$$

Vi setter inn lure  $x$ -verdier. Det gjelder å få ledd til å bli null.

$$x = 1 \text{ gir } 2a_2 = -2, \text{ dvs. } a_2 = -1$$

$$x = -1 \text{ gir } 4a_3 = 3 + 3 - 2 = 4, \text{ dvs. } a_3 = 1$$

Setter inn dette og ganger ut, får da

$$\underline{3x^2} - 3x - 2 = \underline{a_1x^2} - a_1 - x - 1 + \underline{x^2} - 2x + 1.$$

Ser av de understrekede ledd at  $a_1 = 2$ .

4. Vi kan nå integrere ledd for ledd og få svaret:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2 - 3x - 2}{(x^2 - 1)(x - 1)} dx &= \int \frac{2}{x - 1} dx + \int \frac{(-1)}{(x - 1)^2} dx + \int \frac{1}{x + 1} dx \\ &= 2 \ln |x - 1| + \frac{1}{x - 1} + \ln |x + 1| + C. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Nå kommer et ekstra stygt eksempel. Delbrøkkoppspaltingen kan faktisk gjøres på en enklere måte i dette tilfellet, nemlig ved å splitte av en faktor  $(x^2 + 2x + 2)^2$  i nevneren og så bruke polynomdivisjon. Ikke bry deg om det hvis du ikke skjønnte hva jeg mente nå, poenget er bare at du skjønner den metoden som er vist på neste side.

**Eksempel 2**  $\int \frac{x^3 + 3x^2 + 4x}{(x^2 + 2x + 2)^3} dx$

1. Graden til  $p$  er 3, og graden til  $q$  er 6. Altså ok.
2. Likningen  $x^2 + 2x + 2 = 0$  har ingen reelle løsninger, så  $q(x)$  kan ikke faktoriseres ytterligere.
3. Oppspaltingen blir her

$$\frac{x^3 + 3x^2 + 4x}{(x^2 + 2x + 2)^3} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2x + 2} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 2x + 2)^2} + \frac{Ex + F}{(x^2 + 2x + 2)^3}$$

Multiplikasjon med  $q(x)$  gir

$$x^3 + 3x^2 + 4x = (Ax + B)(x^2 + 2x + 2)^2 + (Cx + D)(x^2 + 2x + 2) + Ex + F$$

Her må  $A = 0$ , for  $A$  vil bli stående alene foran  $x^5$ -leddet på høyre side når vi ganger ut. Og vi har ikke noe  $x^5$ -ledd på venstre side. Når vi vet at  $A = 0$ , kan vi se at  $B = 0$  også. For  $B$  blir nå stående alene foran  $x^4$ -leddet. Vi ganger ut og samler ledd:

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 + 4x &= Cx^3 + 2Cx^2 + 2Cx + Dx^2 + 2Dx + 2D + Ex + F \\ &= Cx^3 + (2C + D)x^2 + (2C + 2D + E)x + 2D + F. \end{aligned}$$

Her må  $C = 1$ , og da må  $D = 1$ . Da fås  $E = 0$ , og  $F = -2$ . Så

$$\int \frac{x^3 + 3x^2 + 4x}{(x^2 + 2x + 2)^3} dx = \int \frac{x + 1}{(x^2 + 2x + 2)^2} dx - 2 \int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 2)^3}.$$

4. Integralet til venstre kan løses ved substituasjonen  $u = x^2 + 2x + 2$ . For integralet til høyre må vi bruke "kvadrat-teknikken". Merk at vi allerede har det på oppdelt form, med  $C_1 = 0$ . ■

### 3.5 Oppgaver

1. Finn integralene

a)  $\int \frac{6x + 6}{x^2 + x - 2} dx$

b)  $\int \frac{x^3}{x + 1} dx$

c)  $\int \frac{4x^2 + 5x - 3}{(x - 1)^2(x + 2)} dx$

d)  $\int \frac{x^2 + 6x - 9}{x^3 - 9x} dx$

e)  $\int \frac{x^2 + x + 2}{(x + 1)(x^2 + 1)} dx$

f)  $\int \frac{14 - x^2 - 4x}{x^3 + 3x^2 - 4} dx$

g)  $\int \frac{x^4 + 2x^2 + x}{(x - 1)(x^2 + 1)^2} dx$

## 3.6 Rasjonaliserende substitusjoner

Med **rasjonaliserende substitusjoner** mener jeg substitusjoner som kan brukes til å gjøre et gitt integral om til integralet av en rasjonal funksjon. Først skal vi se på den mest berømte av disse substitusjonene.

Substitusjonen  $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

Denne fjerner alle trigonometriske funksjoner fra integralet. For den gir nemlig

$$dx = \frac{2 du}{1 + u^2} \quad \sin x = \frac{2u}{1 + u^2} \quad \cos x = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}$$

**Bevis** Vi får

$$\sin x = \sin\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{2 \sin(\frac{x}{2}) \cos(\frac{x}{2})}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{\tan^2 \frac{x}{2} + 1}$$

$$\cos x = \cos\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$$

der jeg delte på  $\cos^2(\frac{x}{2})$  oppe og nede i nest siste overgang begge steder. Videre er  $\arctan u = (x/2)$ , dvs.  $x = 2 \arctan u$ . Så  $dx/du = 2/(1 + u^2)$ . Dette gir uttrykket for  $dx$ . ■

**Eksempel 1** 
$$\int \frac{dx}{1 - \cos x} = \int \frac{1}{1 - \frac{1-u^2}{1+u^2}} \cdot \frac{2 du}{1 + u^2}$$

$$= \int \frac{1}{u^2} du = -\frac{1}{u} + C = -\frac{1}{\tan(\frac{x}{2})} + C,$$

der jeg substituerte  $u = \tan(x/2)$  i annen overgang. ■

En funksjonsuttrykk kalles et *rasjonalt uttrykk* i  $\sin x$  og  $\cos x$  hvis det er satt sammen av disse to funksjonene ved et endelig antall addisjoner, subtraksjoner, multiplikasjoner og divisjoner. Et eksempel er

$$f(x) = \frac{\sin^3 x \cos^5 x + \sin^7 x + 5}{\cos x \sin x - \cos x}.$$

Substitusjonen  $u = \tan \frac{x}{2}$  gjør automatisk alle slike uttrykk i  $\sin x$  og  $\cos x$  om til rasjonale funksjoner av  $u$ , og disse kan så integreres ved delbrøkkopp spalting. (Men regningen blir ofte heller grisete, dessverre.)

Til slutt skal vi se på en type triks som av og til virker når det gjelder å få vekk rottegn og potenser som ikke er heltallige. Ideen er følgende:

Hvis  $\sqrt[n]{h(x)}$  inngår, så kan vi prøve substitusjonen

$$u = \sqrt[n]{h(x)} \quad , \quad \text{dvs.} \quad u^n = h(x).$$

**Eksempel 2**  $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x+1}}$

Setter her  $u = \sqrt{x+1}$ , som gir  $u^2 = x+1$ ,  $x = u^2 - 1$ ,  $\frac{dx}{du} = 2u$ , dvs.  $dx = 2u du$ . Altså

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1 + \sqrt{x+1}} &= \int \frac{2u}{1+u} du \quad (\text{tar nå polynomdivisjon}) \\ &= \int \left[ 2 - \frac{2}{u+1} \right] du = 2u - 2 \ln|u+1| + C \\ &= 2\sqrt{x+1} - 2 \ln(\sqrt{x+1} + 1) + C. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Eksempel 3**  $\int \frac{dx}{x^{1/2} + x^{2/3}}$

Triksset her er å skrive  $x^{1/2} = (x^{1/6})^3$  og  $x^{2/3} = (x^{1/6})^4$ , dvs. vi finner en  $n$ -te rot av  $x$  slik at alle  $x$ -forekomster blir heltallige potenser av den. Substituerer så  $u = x^{1/6}$ , som gir  $x = u^6$  og  $dx = 6u^5 du$ . Altså

$$\int \frac{dx}{x^{1/2} + x^{2/3}} = \int \frac{dx}{(x^{1/6})^3 + (x^{1/6})^4} = \int \frac{6u^5 du}{u^3 + u^4} \quad \text{osv.} \quad \blacksquare$$

### 3.6 Oppgaver

#### 1. Finn integralene

a)  $\int x\sqrt{x+2} dx$       b)  $\int \frac{1}{\sqrt[4]{x}+1} dx$   
 c)  $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} dx$       d)  $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$   
 e)  $\int \frac{1}{x^{1/2} + x^{1/3}} dx$       f)  $\int e^{\sqrt{x}} dx$   
 $\int p(x) \sqrt[n]{ax+b} dx.$

g)  $\int x(2x+5)^{1/3} dx$       h)  $\int x^5 \sqrt[3]{4+x^2} dx$

#### 2. Finn integralene

a)  $\int \frac{1}{1 + \sin \theta} d\theta$       b)  $\int \frac{d\theta}{3 \cos \theta + 4 \sin \theta}$

**3.** La  $n > 1$  være et naturlig tall, la  $a \neq 0$  og  $b$  være reelle tall, og la  $p(x)$  være et polynom. Vis at substitusjonen  $u = \sqrt[n]{ax+b}$  gjør følgende integral om til integralet av et rasjonalt  $u$ -uttrykk:



**Blandede oppgaver til kapittel 3**

**1. Finn integralene**

- a)  $\int \sqrt{2x+3} dx$
- b)  $\int \frac{1}{x^2-x} dx$
- c)  $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+5}} dx$
- d)  $\int \frac{1}{t^2-1} dx$
- e)  $\int x \ln x dx$
- f)  $\int \frac{1+x+x^2}{x^3+x} dx$
- g)  $\int \frac{\sin x}{1+\cos x} dx$
- h)  $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx$
- i)  $\int x^2 \cos x dx$
- j)  $\int \frac{1}{e^{-\sqrt{t}}} dt$
- k)  $\int x^3 e^{x^2} dx$
- l)  $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx$
- m)  $\int e^{\sin x} \cos x dx$
- n)  $\int \frac{1}{\cos x} dt$
- o)  $\int x^3 \sin(x^2) dx$
- p)  $\int dumt dt$

**2. Vis følgende, og illustrer på en figur:**

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 x dx = \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx = \pi.$$

**3. La  $n$  være et naturlig tall. Finn integralet**

$$\int x^n \ln x dx.$$

**4. For hvert heltall  $n \geq 0$ , la**

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx.$$

- a) Vis at for alle heltall  $n \geq 2$  har vi

$$I_n = nI_{n-1} - e^{-1}.$$

- b) Vis ved induksjon at for alle heltall  $n \geq 1$  er

$$I_n = n! - \frac{n!}{e} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

- c) Begrunn at  $I_n \rightarrow 0$  når  $n \rightarrow \infty$ , og bruk dette til å vise at

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

**5. I forrige oppgave utledet vi det man kaller er rekursjonsformel for integralet  $I_n$ . Rekursjonsformelen gir oss hvert nytt integral  $I_n$  uttrykt ved det foregående integralet. Vi skal i denne oppgaven vise at hvis vi lar**

$$I_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n},$$

for hvert heltall  $n > 0$ , så har vi for  $n \geq 2$  rekursjonsformelen

$$I_n = \frac{1}{2(n-1)} \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} I_{n-1}.$$

Denne formelen gir oss et alternativ til å bruke substitusjonen  $x = \tan \theta$  på integralene  $I_n$ .

- a) Beregn  $I_1$ , og bruk rekursjonsformelen til å finne  $I_2$ .
- b) Vis at hvis man delvisintegrerer integralet

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}$$

med

$$F(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} \quad \text{og} \quad G'(x) = 1$$

for  $n \geq 2$ , så får man at det blir lik

$$\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + 2(n-1) \int \frac{x^2}{(1+x^2)^n} dx.$$

- c) Vis at vi for alle reelle  $x$  og heltall  $n \geq 2$  har

$$\frac{x^2}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} - \frac{1}{(1+x^2)^n}.$$

- d) Utled rekursjonsformelen ved å kombinere b) og c).

**6. For hvert heltall  $n \geq 1$ , la**

$$I_n = \int \sin^n x dx \quad J_n = \int \cos^n x dx.$$

Vis for at for alle heltall  $n \geq 3$  er da

$$I_n = -\frac{\sin^{n-1} \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

og

$$J_n = \frac{\cos^{n-1} \sin x}{n} + \frac{n-1}{n} J_{n-2}.$$

**7. Bruk resultatet fra forrige oppgave til å vise at vi for alle hele tall  $n \geq 1$  har**

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n}$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} x dx = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n}{2n+1}$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n}$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n-1} x \, dx = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n}{2n+1}$$

**8.** For hvert reelt tall  $a > 0$  og heltall  $n \geq 0$ , la

$$I(a)_n = \int_0^a x^n e^{-x} \, dx.$$

a) Vis at for alle heltall  $n \geq 1$  er

$$I(a)_n = nI(a)_{n-1} - a^n e^{-a}.$$

b) For hvert heltall  $n \geq 0$ , la

$$I_n = \lim_{a \rightarrow \infty} I(a)_n = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} \, dx.$$

Bruk a) til å vise at

$$I_n = nI_{n-1}$$

for alle heltall  $n \geq 1$ . Konkluder med at de uekte integralene  $I_n$  konvergerer for alle heltall  $n \geq 0$ .

c) Vis at for alle naturlige tall er

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x} \, dx = n!$$

### Hyperbolske substitusjoner

Til hver av de tre trigonometriske substitusjonene fra seksjon 10.0.0 fins en hyperbolsk substitusjon som har samme effekt når det gjelder å fjerne rot-tegnet. Hva som blir enklest å bruke varierer. De hyperbolske substitusjonene er:

- For  $\sqrt{a^2 + x^2}$  : Sett  $x = a \sinh \theta$ , og bruk  $1 + \sinh^2 \theta = \cosh^2 \theta$ .

- For  $\sqrt{x^2 - a^2}$  : Sett  $x = a \cosh \theta$ , og bruk  $\cosh^2 \theta - 1 = \sinh^2 \theta$ .

- For  $\sqrt{a^2 - x^2}$  : Sett  $x = a \tanh \theta$ , og bruk  $1 - \tanh^2 \theta = \frac{1}{\cosh^2 \theta}$ .

**9.** Sjekk at likheten vi bruker i den tredje av de hyperbolske substitusjonene holder, dvs. vis at vi for alle reelle tall  $\theta$  har

$$1 - \tanh^2 \theta = \frac{1}{\cosh^2 \theta}.$$

**10.** Bruk de tre hyperbolske substitusjonene til å finne følgende integraler.

a)  $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 9}} \, dx$  (for  $x > 3$ )

b)  $\int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^2} \, dx$  (for  $x > 1$ )

c)  $\int \sqrt{4 + x^2} \, dx$       d)  $\int \frac{1}{4 - x^2} \, dx$

e)  $\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx$       f)  $\int \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 1}} \, dx$

# Kapittel 4

## Rekker

---

*Dette kapitlet bygger på seksjonene 1.1–1.9, seksjonene 2.4–2.6, seksjon 2.10 og kapitlene 1–9 fra MIP.*

---

## 4.1 Følger

En **følge** er en uendelig lang liste av reelle tall

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

Vi bruker notasjonen  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  for følger, der  $x_n$  er det  $n$ -te leddet i følgen. Følgen sies å *konvergere mot*  $L$ , og vi skriver

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L,$$

hvis det for hver  $\epsilon > 0$  fins en  $N$  slik at  $|a_n - L| < \epsilon$  for alle  $n \geq N$ . Intuitivt er dette det samme som å si at  $a_n$  nærmer seg  $L$  når  $n \rightarrow \infty$ . Hvis følgen ikke konvergerer mot noe tall  $L$ , sier vi at den *divergerer*.

**Eksempel 1**  $\left\{ \frac{n}{n+1} \right\}_{n=1}^{\infty}$  Denne ser slik ut:  $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$

Siden  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + (1/n)} = 1$ , konvergerer følgen mot 1. ■

Vi brukte her trikset med å dele på dominerende ledd oppe og nede. Vi tenker akkurat som vi gjør når vi tar grensen  $x \rightarrow \infty$  for funksjoner. Siden følger kan oppfattes som funksjoner  $f(n) = a_n$  definert bare for naturlige tall  $n$ , gjelder alle “ $x \rightarrow \infty$ ”-variantene av grenselovene 1.7.2 også for følger. Startindeksen til en følge trenger ikke være 1, den kan være et hvilket som helst heltall. En følge kalles

- *voksende*            hvis  $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq \dots$
- *avtakende*        hvis  $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq \dots$
- *oppad begrenset*    hvis det fins et tall  $M$  slik at  $a_n \leq M$  for alle  $n$
- *nedad begrenset*    hvis det fins et tall  $M$  slik at  $a_n \geq M$  for alle  $n$

### Teorem 1 Kompletthetsegenskapen for følger

1. Er en følge *voksende* og *oppad begrenset*, så konvergerer den.
2. Er en følge *avtakende* og *nedad begrenset*, så konvergerer den.

**Bevis** (1) Anta at følgen  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  er voksende og oppad begrenset. Da fins  $L = \sup\{a_n \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$  ved kompletthetsprinsippet. Gitt  $\epsilon > 0$  fins da  $N \geq 1$  slik at  $|a_N - L| < \epsilon$ . Men siden følgen er voksende og  $a_n \leq L$  for alle  $n$ , får vi nå at  $|a_n - L| < \epsilon$  for alle  $n \geq N$ . Altså  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ .

(2) Vises helt tilsvarende. ■

**Eksempel 2** Betrakt følgen gitt ved  $a_1 = 0$  og  $a_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}(a_n + 1)}$  for  $n \geq 1$ .

- Vis ved induksjon at følgen er oppad begrenset av 1.
- Vis at følgen er voksende.
- Vis at følgen konvergerer, og finn ut hva den konvergerer mot.

### Løsning

- a) Vi har  $a_1 < 1$ , og hvis vi antar  $a_n < 1$  får vi

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}(a_n + 1)} < \sqrt{\frac{1}{2}(1 + 1)} = 1$$

også. Dermed har vi vist ved induksjon at  $a_n < 1$  for alle  $n$ .

- b) Ved å bruke at  $a_n < 1$ , får vi

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}(a_n + 1)} > \sqrt{\frac{1}{2}(a_n + a_n)} = \sqrt{a_n} > a_n,$$

siste ulikhet fordi  $x < \sqrt{x}$  når  $x < 1$ . Altså er følgen voksende.

- c) At følgen konvergerer får vi nå ved teorem 1. Kall grensen  $L$ . Siden vi vet at  $L$  fins, kan vi finne den ved å la  $n \rightarrow \infty$  på begge sider i likningen for  $a_{n+1}$  gitt i oppgaven. Vi får da at  $L$  må oppfylle

$$L = \sqrt{\frac{1}{2}(L + 1)} \quad , \quad \text{dvs.} \quad L^2 = \frac{1}{2}(L + 1).$$

Likningen til høyre gir  $L = 1$  og  $L = -\frac{1}{2}$ . Siden alle leddene i følgen er positive, er det klart at  $L = -\frac{1}{2}$  er umulig. Så  $L = 1$ . ■

## 4.1 Oppgaver

1. Skriv opp de 6 første leddene i følgen

$$\left\{ \frac{(-1)^n}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Konvergerer denne følgen? Mot hva?

2. Avgjør om disse følgene konvergerer, og finn grensene deres hvis de gjør det.

a)  $\left\{ n \sin^2 \frac{1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$

b)  $\left\{ \frac{2n^2}{\sqrt{n} + n^2} \right\}_{n=1}^{\infty}$

c)  $\left\{ \frac{(1/2)^n - (4/5)^n}{(2/3)^n} \right\}_{n=1}^{\infty}$     d)  $\left\{ \frac{1 + (-1)^n n^2}{n^3 + 1} \right\}_{n=0}^{\infty}$

3. La følgen  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  være gitt ved  $a_1 = 1$ , og

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n - \frac{5}{2} \quad \text{for } n = 1, 2, 3, \dots$$

- Vis at følgen er nedad begrenset av  $-5$ .
- Vis at følgen er avtakende.
- Vis at følgen konvergerer.
- Finn ut hva følgen konvergerer mot.

## 4.2 Generelt om rekker

En **rekke** er en uendelig lang sum av reelle tall

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$$

Vi kan danne delsummer:

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

osv. Hvis  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  fins, sier vi at rekken *konvergerer* mot summen  $S$  og skriver  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots = S$ . I motsatt fall *divergerer* rekken. Spørsmålet er altså om delsummene  $S_n$  nærmer seg noe spesielt når vi spør på med stadig flere ledd.

*Geometriske rekker* er rekker på formen

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots$$

### Teorem 1 Sum av geometriske rekker

Vi har

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots = \frac{a}{1-r}$$

for alle reelle tall  $a$  og  $r$  slik at  $|r| < 1$ . Hvis  $|r| \geq 1$  divergerer rekken.

**Bevis** At tilfellene  $r = 1$  og  $r = -1$  gir divergens er klart. Antar nå  $r \neq \pm 1$ . La  $S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}$ , da gir teorem 2.4.1 at

$$S_n = a \cdot \frac{1-r^n}{1-r}.$$

Resultatet følger nå direkte, siden vi har

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{hvis } |r| < 1 \\ \text{fins ikke} & \text{hvis } |r| > 1. \quad \blacksquare \end{cases}$$

**Eksempel 1** Betrakt rekken  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$

Dette er en geometrisk rekke med  $a = 1$  og  $r = \frac{1}{2}$ . Så summen er

$$\frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2. \quad \blacksquare$$

## Summenotasjon

Istedenfor  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$  skriver man vanligvis  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . Eksempel:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots \quad (\text{geometrisk rekke})$$

Merk at her var startindeksen 0, ikke 1. Regneregler for rekker:

1. Vi kan splitte opp summer:  $\sum_{i=1}^{\infty} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i + \sum_{i=1}^{\infty} b_i$   
(Forutsetning: De to rekkene til høyre konvergerer.)
2. Vi kan sette utenfor konstanter:  $\sum_{i=1}^{\infty} ca_i = c \cdot \sum_{i=1}^{\infty} a_i$   
(Hvis  $\sum a_i$  divergerer, så divergerer  $\sum ca_i$  også, for  $c \neq 0$ .)

**Bevis** Vi vet (MIP seksjon 1.10) at disse reglene holder i det endelige tilfellet, dvs. når øvre summasjonsgrense er et naturlig tall  $n$ . La så  $n \rightarrow \infty$  på begge sider i hver lov, og bruk grenselovene. ■

**Eksempel 2**  $\sum_{n=0}^{\infty} \left[ \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = 2 + \frac{3}{4},$

dvs. denne rekken konvergerer. Her brukte vi formelen  $a/(1-r)$  for sum av en geometrisk rekke på hvert av leddene. ■

## 4.2 Oppgaver

1. Avgjør om de geometriske rekkene under konvergerer, og finn summen av dem som gjør det.

- a)  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n$       b)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-0.5)^{n+1}$   
 c)  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-3}{2}\right)^n$       d)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{7^n}$   
 e)  $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \dots$

2. Skriv følgende rekke med summetegn:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots$$

3. Finn summen av rekken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{12^n} \left[ 6^n + (-4)^n - 3^n \right]$$

4. La  $c$  være mengden (målt i kg) av Cesium-isotopen  $^{137}\text{Cs}$  som havnet på Finnmarksvidda ved Tsjernobyl-ulykken i 1986. Isotopen  $^{137}\text{Cs}$  mister 2.3% av sin masse pr. år ved radioaktiv nedbrytning. Anta at vi hadde én Tsjernobyl-ulykke til samme tid *hvert* år. Hva ville mengden utslippet  $^{137}\text{Cs}$  på Finnmarksvidda da stabilisere seg på i det lange løp? Skriv svaret som en uendelig geometrisk rekke, og finn summen av denne.

## 4.3 Konvergenstester for rekker

Vi skal nå se på en mengde tester som man kan bruke til å avgjøre om en gitt rekke konvergerer eller ei. Felles for dem alle er at de bare forteller oss *om* rekkene konvergerer, ikke *hva* de eventuelt konvergerer mot.

### Teorem 1 n'te ledd-testen

Hvis rekken  $\sum a_n$  konvergerer, så er  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

(Startindeksen kan være vilkårlig, så vi droppet summegrensene.)

**Bevis** La  $S_n$  være summen av de  $n$  første leddene i rekken. Hvis rekken konvergerer mot et tall  $S$ , så gir grenselov nummer 2 fra teorem 1.7.2 at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0. \quad \blacksquare$$

**Eksempel 1**  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$  divergerer, for  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0$ .  $\blacksquare$

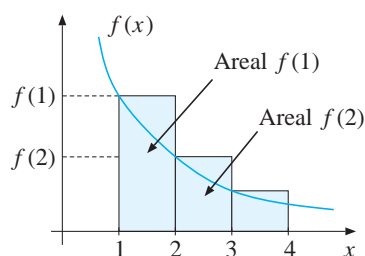
### Teorem 2 Integraltesten

Hvis funksjonen  $f$  er kontinuert, avtakende og positiv på  $[1, \infty)$ , har vi at

$$\text{rekken } \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \quad \text{og integralet } \int_1^{\infty} f(x) dx$$

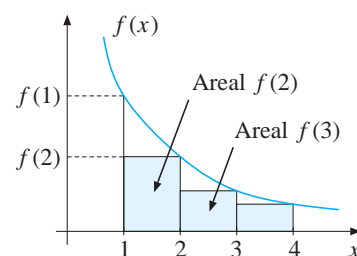
enten begge konvergerer eller begge divergerer.

**Bevis** Se på figurene under. Vi bruker teorem 2.12.2 og 4.1.1.



$$\text{Ser at } \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \geq \int_1^{\infty} f(x) dx,$$

så hvis summen konvergerer, konvergerer integralet også.



$$\text{Ser at } \sum_{n=2}^{\infty} f(n) \leq \int_1^{\infty} f(x) dx,$$

så hvis summen divergerer, divergerer integralet også.  $\blacksquare$



**Eksempel 2** Vi skal sjekke om  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  konvergerer.

Prøver integraltesten med  $f(x) = 1/x$ . Har

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} [\ln x]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln b - 0) = +\infty$$

dvs. divergens. Denne rekken kalles *den harmoniske rekken*. ■

### Teorem 3 p-rekkene

Rekken  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  konvergerer for  $p > 1$  og divergerer for  $p \leq 1$ .

**Bevis** Teorem 2.12.1 kombinert med integraltesten. ■

**Eksempel 3** Rekken  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  konvergerer ( $p = 2$ )

Rekken  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$  divergerer ( $p = \frac{1}{2}$ ). ■

### Teorem 4 Sammenlikningstesten

Anta at  $0 \leq a_n \leq b_n$  for alle  $n$ . Da:

- (1) Hvis  $\sum b_n$  konvergerer, så konvergerer  $\sum a_n$  også.
- (2) Hvis  $\sum a_n$  divergerer, så divergerer  $\sum b_n$  også.

**Bevis** (1) Anta at  $\sum b_n$  konvergerer mot et tall  $L$ . La  $S_n$  være summen av de  $n$  første leddene i rekken  $\sum a_n$ . Da er følgen  $S_1, S_2, S_3 \dots$  voksende og oppad begrenset av  $L$ . Dermed konvergens ved teorem 4.1.1.

(2) Divergerer  $\sum a_n$ , så gir (1) at  $\sum b_n$  divergerer. ■

**Eksempel 4**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n+4^n}$  Konvergerer denne? Vel, vi har  $\frac{5}{n+4^n} < \frac{5}{4^n}$ ,

og

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 5 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n \text{ konvergerer (geometrisk).}$$

Altså konvergerer rekken vår ved sammenlikningstesten. ■

Sammenlikningstesten er ofte litt krøkkete å bruke, fordi det kan være vanskelig å få ulikhetene til å gå den veien man vil. Her kommer en variant av testen som vanligvis er enklere i bruk:

**Teorem 5 Grense-sammenlikningstesten (GS-testen)**

La  $\sum a_n$  og  $\sum b_n$  være rekker med positive ledd. Hvis grensen

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$$

fins og  $0 < L < +\infty$ , så enten *konvergerer begge rekkene* eller *divergerer begge rekkene*. Hvis  $L = 0$  og  $\sum b_n$  konvergerer, konvergerer  $\sum a_n$  også.

**Bevis** Velg konstanter  $P$  og  $Q$  slik at  $0 < P < L < Q$ . Siden  $a_n/b_n$  nærmer seg  $L$ , har vi da for tilstrekkelig store  $n$

$$P < \frac{a_n}{b_n} < Q, \quad \text{dvs.} \quad Pb_n < a_n < Qb_n.$$

Bruker så den vanlige sammenlikningstesten:

$$\sum a_n \text{ div. medfører at } \sum Qb_n = Q \sum b_n \text{ div, dvs. } \sum b_n \text{ div.}$$

$$\sum a_n \text{ konv. medfører at } \sum Pb_n = P \sum b_n \text{ konv, dvs. } \sum b_n \text{ konv.}$$

Tilleggstilfellet  $L = 0$  vises tilsvarende, bare erstatt  $P$  med 0. ■

Stikkord for bruk av GS-testen: Finn *dominerende ledd* i rekke-uttrykket ditt. Ved å ignorere alt unntatt de dominerende leddene, kan du finne en enklere rekke som "går" på samme måte som din opprinnelige rekke. Hvis du så finner ut om den enklere rekken konvergerer eller divergerer, kan du sammenlikne med den i GS-testen.

**Eksempel 5**  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2 - n}$  Konvergerer denne?

Det dominerende leddet i nevneren er  $n^2$ , og det dominerende i telleren er definitivt 2. Vi trenger bare regne "på en konstant nær", og derfor konkluderer vi med at rekken går som  $\sum \frac{1}{n^2}$ . Sistnevnte er en konvergent  $p$ -rekke, så vi sammenlikner med den:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n^2 - n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{n^2 - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1 - 1/n} = 2,$$

så rekken konvergerer ved GS-testen. ■

**Eksempel 6**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{3/2} + 5\sqrt{n}}{2n^2 + 10n + 2}$  Konvergerer denne?

Dominerende ledd i telleren er  $n^{3/2}$ , og det dominerende i nevneren er  $n^2$ . Rekken går dermed som  $\sum \frac{1}{n^{1/2}}$  (divergent  $p$ -rekke), så vi sammenlikner med den. Vi får

$$\frac{\frac{n^{3/2} + 5\sqrt{n}}{2n^2 + 10n + 2}}{\frac{1}{n^{1/2}}} = \frac{n^2 + 5n}{2n^2 + 10n + 2} = \frac{1 + 5/n}{2 + 10/n + 2/n^2} \rightarrow \frac{1}{2} \quad \text{når } n \rightarrow \infty$$

så rekken vår divergerer ved GS-testen. ■

### Definisjon 1 Absolutt konvergens

Rekken  $\sum a_n$  sies å være *absolutt konvergent* hvis rekken

$\sum |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots$  konvergerer.

En rekke som *konvergerer*, men som ikke konvergerer absolutt, sies å være *betinget* konvergent.

### Teorem 6 Absolutt konvergens - testen

Hvis  $\sum |a_n|$  konvergerer, så konvergerer  $\sum a_n$  også. Altså: Alle absolutt konvergente rekker er "vanlig" konvergente også.

**Bevis** Anta at  $\sum |a_n|$  konvergerer. Vi har

$$0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|,$$

så da konvergerer  $\sum (a_n + |a_n|)$  også, ved sammenlikningstesten. Og

$$\begin{aligned} \sum a_n &= \sum [(a_n + |a_n|) - |a_n|] \\ &= \sum (a_n + |a_n|) - \sum |a_n|, \quad (\text{regneregel}) \end{aligned}$$

der begge rekkene på høyre side nå konvergerer. ■

**Eksempel 7**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^3 n}{n^5}$  Konvergerer denne?

Har  $\left| \frac{\sin^3 n}{n^5} \right| \leq \frac{1}{n^5}$ , og  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$  konvergerer.

Altså er  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin^3 n}{n^5} \right|$  konvergent ved sammenlikningstesten.

Så rekken vi startet med er absolutt konvergent, dvs. konvergent. ■

**Definisjon 2 Alternierende rekker**

En rekke kalles *alternierende* hvis leddene i rekken er vekselvis positive og negative (annethvert positivt, annethvert negativt).

**Eksempel 8**  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \dots$  er alternierende. ■

Her var første ledd positivt, men det kan være negativt også. Poenget er at fortegnene skal *alternere*, dvs. *veksle* på godt norsk. Typiske alternierende rekker har  $(-1)$  opphøyd i noe i ledd-uttrykket sitt.

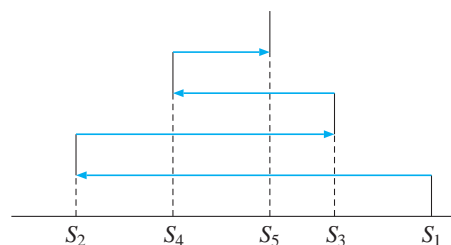
**Teorem 7 Alternierende rekke - testen**

La  $\sum a_n$  være en alternierende rekke.

Hvis  $|a_n| > |a_{n+1}| > 0$  for alle  $n$  og  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$ , konvergerer rekken.

Videre: Hvis vi tilnærmer summen av hele rekken med den endelige summen opp til og med et ledd  $a_N$ , er feilen vi gjør mindre enn  $|a_{N+1}|$ .

**Bevis** La  $S_n$  være summen av de  $n$  første leddene i rekken. Se på figuren under.



Pilene viser hvordan summen endrer seg når vi legger til hvert nytt ledd. De går frem og tilbake fordi fortegnene skifter. Siden absoluttverdien av leddene minker, blir pilene stadig kortere. Summen vil stabilisere seg på noe "midt i". Presist formulert: De odde delsummene  $S_1, S_3, S_5, \dots$  er en avtakende følge som er begrenset nedad av  $S_2$ . Ved kompletthet (4.1.1) konvergerer derfor de odde delsummene mot en grense  $S$ . Tilsvarende er  $S_2, S_4, S_6, \dots$  en voksende følge som er oppad begrenset av  $S_1$ , så de jevne delsummene konvergerer mot en grense  $S'$ . Men siden  $|a_n| \rightarrow 0$  når  $n \rightarrow \infty$  (pil-lengden går mot null), må  $S = S'$ .

Når det gjelder feilen vi gjør ved å bruke en delsum  $S_N$  som tilnærming til summen  $S$  av rekken, ser du fra figuren at summen  $S$  må bli noe "midt i", og at  $S_N$  derfor ligger nærmere  $S$  enn lengden av neste pil. Og lengden av neste pil er jo nettopp  $|a_{N+1}|$ . ■

**Eksempel 9**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2 + 1}$  Konvergerer denne?

Vi ser at leddene veksler i fortegn, og vi har

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 + 1} = 0.$$

Videre: Med  $f(x) = x/(x^2 + 1)$  fås  $f'(x) < 0$  for  $x > 1$  (sjekk det!), så siden  $|a_n| = f(n)$  følger at  $|a_n| > |a_{n+1}|$  for alle  $n$ . Altså konvergerer rekken ved alt.rekke-testen. ■

Hvis vi vil finne summen av rekken over med feil mindre enn f.eks. 0.05, må vi (ifølge resultatet forrige side) ta med så mange ledd at absolutt-verdien av første ledd vi *dropper* er mindre enn 0.05. Løser vi likningen  $n/(n^2 + 1) = 0.05$  får vi  $n \approx 19.95$ , dvs.  $n = 20$  kommer under grensen. Det holder derfor å ta med leddene til og med  $n = 19$  i tilnærmingen.

### Teorem 8 Forholdstesten

La  $\sum a_n$  være en rekke. Anta at

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

fins. Da har vi:

- (1) Hvis  $L < 1$  konvergerer rekken (absolutt)
- (2) Hvis  $L > 1$  divergerer rekken.

Hvis  $L = 1$  gir testen ingen konklusjon (dvs. den virker ikke).

### Bevis

(1) Velg  $r$  slik at  $L < r < 1$ . Da fins en  $N$  slik at vi har

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < r \quad , \quad \text{dvs.} \quad |a_{n+1}| < |a_n| \cdot r$$

for alle  $n \geq N$ . Altså

$$|a_N| + |a_{N+1}| + |a_{N+2}| + \dots < |a_N| + |a_N| \cdot r + |a_N| \cdot r^2 + \dots$$

Rekken til høyre er geometrisk, med sum  $\frac{|a_N|}{1-r}$ . Altså konvergerer  $\sum a_n$  absolutt ved sammenlikningstesten.

(2) Her har vi

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1 \quad , \quad \text{dvs.} \quad |a_{n+1}| > |a_n|$$

for tilstrekkelig store  $n$ . Altså er  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  umulig, og rekken divergerer ved  $n$ -te ledd - testen. ■

**Regning med faktulteter** Forholdstesten er ofte lur å tenke på når uttrykket for  $a_n$  inneholder faktulteter. Vi kommer ofte bort i overganger av typen

$$\frac{(n+1)!}{n!} = n+1.$$

For å forstå dette, skriver vi ut faktultetene i teller og nevner:

$$\frac{(n+1)!}{n!} = \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 1}{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 1} = n+1$$

(alle faktorene unntatt  $(n+1)$  forkortes). Andre tilsvarende overganger:

$$\frac{(n+3)!}{(n+1)!} = (n+3)(n+2) \qquad \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$$

**Eksempel 10**  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{5^n}{n!}$  Konvergerer den? Forholdstesten gir

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\frac{5^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{5^n}{n!}} = \frac{5^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{5^n} = \frac{5}{n+1}.$$

Har  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n+1} = 0$ , dvs. rekken konvergerer. ■

**Eksempel 11**  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  Konvergerer denne?

Vi behandler  $x$  som et konstant tall, og bruker forholdstesten:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n+1} = 0,$$

dvs. konvergens. Vi har dermed også vist at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \quad \text{for alle faste tall } x \in \mathbf{R}$$

for ellers kan ikke rekken konvergere ( $n$ 'te ledd-testen). Dette er et nyttig resultat som vi refererer til ved å si at *fakultet dominerer potens*. ■

**Teorem 9 Rot-testen**

La  $\sum a_n$  være en rekke, og anta at

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}$$

fins. Da har vi at

- (1) Hvis  $L < 1$  konvergerer rekken (absolutt)
- (2) Hvis  $L > 1$  divergerer rekken.

Hvis  $L = 1$  gir testen ingen konklusjon.

**Bevis** Ideen i dette beviset er den samme som i beviset for forholdstesten: Vi sammenlikner med en geometrisk rekke.

(1) Velg  $r$  slik at  $L < r < 1$ . Da fins en  $N$  slik at

$$|a_n|^{1/n} < r \quad , \quad \text{dvs.} \quad |a_n| < r^n$$

for  $n \geq N$ . Rekken  $\sum_{n=N}^{\infty} r^n$  er en konvergent geometrisk rekke, så

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  konvergerer ved sammenlikningstesten.

(2) Her må vi ha

$$|a_n|^{1/n} > 1 \quad , \quad \text{dvs.} \quad |a_n| > 1$$

for tilstrekkelig store  $n$ . Altså

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0,$$

dvs. rekken divergerer ved  $n$ -te ledd - testen. ■

**Eksempel 12**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^n}$  Konvergerer denne? Vi prøver rot-testen:

$$|a_n|^{1/n} = \left(\frac{1}{n^n}\right)^{1/n} = \frac{1}{(n^n)^{1/n}} = \frac{1}{n},$$

og vi har

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Altså konvergerer rekken vår ved rot-testen. ■

## Brukstips for konvergenstestene

Når du skal avgjøre om en gitt rekke  $\sum a_n$  konvergerer, må du selv velge hvilken konvergenstest du skal prøve. Her er noen tips i den forbindelse. Tipsene er ikke *alltid* lure, men de fungerer vanligvis bra for de rekkene man støter på i praksis. Følg listen fra punkt 1 og nedover.

1. Kan uttrykket for  $a_n$  splittes opp i flere ledd?
2. Hvis  $a_n$  inneholder  $n!$  eller ting opphøyd i  $n$ ,  $2n$  etc., så tenk på *forholds-testen*. Eventuelt kan du (særlig hvis ingen faktorer forekommer) prøve rotttesten.
3. Tenk på  $n$ -te ledd - testen.
4. Hvis alle  $a_n \geq 0$ , så tenk på *sammenlikningstestene*. GS-testen er vanligvis den mest effektive av dem. Stikkord for bruk av GS-testen: Finn dominerende ledd, eller prøv å finne en enklere rekke som "går" på samme måte som rekken du har. (Se eksempel under.)
5. Hvis  $a_n$  inneholder en "vekslende" faktor av typen  $(-1)^n$  og ellers er uten  $n!$  og ting opphøyd i  $n$ , så tenk på *alternierende rekke - testen*. Eventuelt: Går det an å vise at  $\sum |a_n|$  konvergerer, f.eks. ved en sammenlikningstest?

Generelt kan man si at forholdstesten og rotttesten er tester som passer å bruke når rekkene inneholder "kraftige" ting, som  $n!$  og ting opphøyd i  $n$ -te. Disse testene er imidlertid ikke tilstrekkelig finfølende til å ta "svakere" ting, som f.eks. polynomer i  $n$ . Prøver du forholdstesten på

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1},$$

får du  $L = 1$ , ingen konklusjon. Her kan man imidlertid fikse biffen med GS-testen (sammenlikne med  $p$ -rekken  $\sum \frac{1}{n^2}$ , som konvergerer).

Husk ellers at det å ta bort eller legge til et endelig antall ledd i starten av en rekke selvsagt ikke påvirker spørsmålet om konvergens.

**Eksempel 13**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n^2 + \sin n}$  Konvergerer denne?

Punkt 1-2 på listen er uaktuelle, og  $n$ -te ledd - testen virker heller ikke (leddet går mot null). Leddene veksler i fortegn (nevneren er positiv for alle  $n$ ), så vi prøver *alternierende rekke - testen*. Vi har at  $|a_n| \rightarrow 0$  når  $n \rightarrow \infty$ , og med  $f(x) = 1/(2x^2 + \sin x)$  får vi  $f'(x) < 0$  for  $x > 1$ . Altså er  $|a_n| > |a_{n+1}|$  for alle  $n$ , så rekken konvergerer ved *alt. rekke-testen*. ■



## 4.3 Oppgaver

1. Avgjør om rekkene under konvergerer ved å bruke de angitte testene.

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n^2 + 3n + 1}$  (n-te ledd - testen)

b)  $\sum_{n=1}^{\infty} 2n e^{-n^2}$  (integraltesten)

c)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1}$  (sammenlikningstesten)

d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{7n^2 - 3n - 2}$  (GS-testen)

e)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$  (abs. konv.-testen)

f)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{5n-4}}$  (alt. rekke-testen)

g)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!}$  (forholdstesten)

h)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^{2n}}{(n^3 + 1)^n}$  (rot-testen)

2. Avgjør hvilke av rekkene under som konvergerer og hvilke som divergerer.

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{e^n}$

b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+3}$

c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{5^n (n!)^2}$

d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3+5}$

e)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (k+1)}{k^3+5}$

f)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\ln n}{4n}\right)^n$

g)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!n^2}$

h)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\sqrt{n}+1)}$

3. Avgjør om de to rekkene under konvergerer absolutt, konvergerer betinget eller divergerer.

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{(n^2)}}{n^n}$

b)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{1/n}}{\ln n}$

4. Avgjør om rekkene under konvergerer.

a)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2n^2 + 3n + 1}$

b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$

c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\sqrt{2n^2 + 1}}$

e)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

f)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n - n^{5/3}}{\sqrt{n+1} + 6n^3}$

5. Finn summen av den alternerende rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

med feil mindre enn 0.01.

6. Avgjør om rekkene under konvergerer.

a)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-200)^n}{(2n)!}$

b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{n(2^n + 2)}$

c)  $\sum_{n=1}^{\infty} (n^{1/n} - 1)^n$

d)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{3n+1} \frac{n!}{n^n}$

e)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{(-1)^n n}$

f)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1/5}}{\ln n + n^{3/2}}$

g)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(1.05)^n}{1+n^2}$

h)  $\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{11}{13}\right)^n$

i)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{4n^2}$

j)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(1/n)}{n^2 + n + 1}$

k)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)}$

l)  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n + \sqrt{n}}{n + n^3}\right)$

m)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{e^n (n+1)^2}$

n)  $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{n}\right)$

7. La  $p$  være et reelt tall. Avgjør for hvilke verdier av  $p$  følgende rekke konvergerer:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$$

## 4.4 Taylorrekker og Taylorpolynomer

Anta at funksjonen  $f$  er uendelig mange ganger deriverbar i punktet  $a$ . Uttrykket

$$f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3 + \dots$$

kalles da *Taylorrekken* til funksjonen  $f$  i punktet  $a$ . Moral for å finne Taylorrekker: Vi regner ut noen ledd og håper på et under (dvs. at vi ser et system).

**Eksempel 1** Vi skal finne Taylorrekken til  $f(x) = e^x$  i punktet  $a = 0$ . Vi har

$$\begin{array}{ll} f(x) = e^x & f(0) = 1 \\ f'(x) = e^x & f'(0) = 1 \\ f''(x) = e^x & f''(0) = 1 \quad \text{osv.} \end{array}$$

så Taylorrekken blir (innsetting i formelen, med  $a = 0$ )

$$1 + 1 \cdot (x - 0) + \frac{1}{2!}(x - 0)^2 + \frac{1}{3!}(x - 0)^3 + \dots$$

Vi ser nå systemet utover i leddene. I utskrevet form blir rekken

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \blacksquare$$

**Eksempel 2** Vi skal finne Taylorrekken til  $f(x) = \ln x$  i punktet  $a = 1$ . Vi har

$$\begin{array}{ll} f(x) = \ln x & f(1) = 0 \\ f'(x) = x^{-1} & f'(1) = 1 \\ f''(x) = -x^{-2} & f''(1) = -1 \\ f'''(x) = 2x^{-3} & f'''(1) = 2 \\ f^{(4)}(x) = -6x^{-4} & f^{(4)}(1) = -6 \end{array}$$

Innsatt i formelen får vi at rekken blir

$$0 + 1 \cdot (x - 1) - \frac{1}{2 \cdot 1}(x - 1)^2 + \frac{2}{3 \cdot 2 \cdot 1}(x - 1)^3 - \frac{6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}(x - 1)^4 + \dots$$

Igjen fikk vi et fint system. I utskrevet forme blir rekken

$$(x - 1)^2 - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{3}(x - 1)^3 - \frac{1}{4}(x - 1)^4 + \frac{1}{5}(x - 1)^5 - \dots \blacksquare$$

**Definisjon 1 Taylorpolynomer**

Hvis vi kutter av Taylorrekken etter leddet med  $(x - a)^n$ , får vi *Taylorpolynomet*  $T_n(x)$  av grad  $n$  til  $f(x)$  i punktet  $a$ .

**Eksempel 3** Taylorpolynomet til  $\ln x$  av grad 3 i  $a = 1$  er

$$T_3(x) = (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{3}(x - 1)^3. \blacksquare$$

**Teorem 1 Taylorpolynomenes grunnleggende egenskap**

La  $T_n$  være Taylorpolynomet av grad  $n$  til  $f$  i punktet  $a$ .

Da har vi  $T_n(a) = f(a)$ ,  $T_n'(a) = f'(a)$ ,  $\dots$ ,  $T_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$ .

**Bevis** Vi har

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3 + \dots$$

der summen går til  $n$ . Så  $T_n(a) = f(a) + 0$  (alle  $(x - a)$ -faktorer blir 0). Derivasjon av uttrykket for  $T_n(x)$  gir videre:

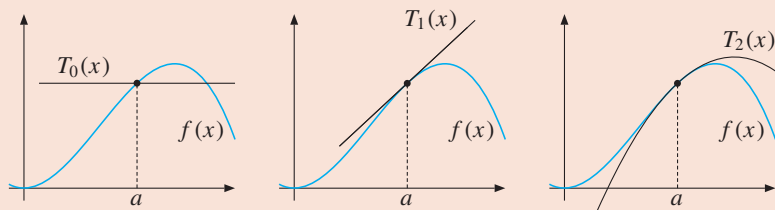
$$T_n'(x) = f'(a) \cdot 1 + f''(a)(x - a) + \frac{f'''(a)}{3!}3(x - a)^2 + \dots$$

så  $T_n'(a) = f'(a) + 0 + \dots + 0$ . Deriverer en gang til:

$$T_n''(x) = f''(a) + \frac{f'''(a)}{3!} \cdot 3 \cdot 2(x - a) + \dots$$

så  $T_n''(a) = f''(a) + 0$ . Og så videre. Her ser du hvorfor  $n!$ -faktorene er med. De trengs for at vi skal få ut de riktige deriverte.  $\blacksquare$

**Konklusjon:** Taylorpolynomet  $T_n(x)$  er en tilnærming til  $f(x)$  rundt  $a$  der vi tar hensyn til  $f(a)$  og de  $n$  første deriverte av  $f$  i punktet  $a$ .



0. grads tilnærming  
(riktig funk. verdi)

1. grads tilnærming  
(riktig verdi og  
riktig derivert)

2. grads tilnærming  
(riktig verdi, derivert  
og 2. derivert)

Men hvordan kan vi vite hvor gode disse tilnærmingene egentlig er? Neste resultat gir svaret.

### Teorem 2 Taylors formel

Anta at  $f$  og dens deriverte av orden opp til og med  $n + 1$  er kontinuerlige på et åpent intervall  $I$  om  $a$ . Da er

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x) \quad \text{for alle } x \in I,$$

der  $T_n(x)$  er Taylorpolynomet av grad  $n$  i punktet  $a$ , og leddet  $R_n(x)$  kalles *restleddet*. Det måler feilen i tilnærmingen, og er gitt ved

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1},$$

der  $c$  er et ukjent tall mellom  $a$  og  $x$  på tallinjen.

**Bevis** La  $x \in I$ . Vi skriver

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt.$$

Åpenbart riktig, hva? Bare regn ut integralet og se. Delvis integrasjon med  $F(t) = f'(t)$  og  $G(t) = -(x-t)$  gir så

$$\begin{aligned} \int_a^x f'(t) dt &= [-f'(t)(x-t)]_a^x + \int_a^x f''(t)(x-t) dt \\ &= f'(a)(x-a) + \int_a^x f''(t)(x-t) dt. \end{aligned}$$

En ny delvis integrasjon med  $F(t) = f''(t)$  og  $G(t) = -\frac{(x-t)^2}{2}$  gir

$$\begin{aligned} \int_a^x f''(t)(x-t) dt &= \left[ -\frac{f''(t)}{2}(x-t)^2 \right]_a^x + \int_a^x f'''(t) \frac{(x-t)^2}{2} dt \\ &= \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \int_a^x f'''(t) \frac{(x-t)^2}{2} dt. \end{aligned}$$

Så totalt hittil:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \int_a^x f'''(t) \frac{(x-t)^2}{2!} dt.$$

Etter  $n$  slike trinn får vi (se oppgave 9.B.15)

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 \\ &\quad + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt. \end{aligned}$$

Ved middelverдитеoremet for integraler (se oppgave 10.0.0) fins det nå et "gjennomsnittlig" tall  $c$  mellom  $a$  og  $x$  slik at

$$\begin{aligned} \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt &= \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} \int_a^x (x-t)^n dt \\ &= \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} \left[ -\frac{1}{n+1} (x-t)^{n+1} \right]_a^x = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!(n+1)} (x-a)^{n+1}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

### Typisk problemstilling

- Vi finner en tilnærming til  $f(x)$  rundt  $x = a$  ved å regne ut et Taylorpolynom  $T_n(x)$ .
- Vi finner en øvre grense for feilen i tilnærmingen ved å se på restleddet. Vi setter da opp en "restleddsestimering" av følgende type:

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \frac{1}{(n+1)!} |f^{(n+1)}(c)| \cdot |x-a|^{n+1} \quad (c \text{ mellom } a \text{ og } x) \\ &\leq \left[ \begin{array}{l} \text{samme uttrykk med "verst tenkelige"} \\ \text{verdier av } f^{(n+1)}(c) \text{ og } |x-a| \text{ innsatt} \end{array} \right] \\ &= \text{øvre grense for feil.} \end{aligned}$$

### Eksempel 4

- Finn Taylorpolynomet  $T_2(x)$  av grad 2 for  $f(x) = \sin x$  i  $a = \frac{\pi}{4}$ .
- Vis at  $T_2(x)$  tilnærmer  $f(x)$  med feil mindre enn 0.0002 når  $x \in [\frac{\pi}{4} - \frac{1}{10}, \frac{\pi}{4} + \frac{1}{10}]$ .

### Løsning

- Direkte utregning gir

$$T_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}(x - \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2\sqrt{2}}(x - \frac{\pi}{4})^2.$$

- Ved Taylors formel får vi at feilen er

$$\begin{aligned} |R_2(x)| &= \frac{1}{3!} |f'''(c)| \cdot |x - \frac{\pi}{4}|^3 \quad (\text{der } c \text{ er mellom } \frac{\pi}{4} \text{ og } x) \\ &= \frac{1}{3!} |-\cos c| \cdot |x - \frac{\pi}{4}|^3 \\ &\leq \frac{1}{3!} \cdot 1 \cdot (\frac{1}{10})^3 = \frac{1}{6000} \approx 0.000167 \end{aligned}$$

og dette er mindre enn 0.0002.  $\blacksquare$

**Eksempel 5** Bruk et Taylorpolynom for  $e^x$  i  $a = 0$  til å tilnærme  $\sqrt{e}$  med feil mindre enn 0.01.

**Løsning** Dette er ikke så umulig som det ser ut, husk at  $\sqrt{e} = e^{1/2}$ . Taylors formel for  $e^x$  utviklet i  $a = 0$  sier

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Hele clouet er nå at feilen i  $x = 1/2$  må være mindre enn 0.01. Vi får

$$\begin{aligned} |R_n(\tfrac{1}{2})| &= \frac{e^c}{(n+1)!} \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1} && \text{der } c \in [0, \tfrac{1}{2}] \\ &\leq \frac{e^{1/2}}{(n+1)!} \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1} && \text{(siden } e^x \text{ er voksende)} \\ &\leq \frac{2}{(n+1)!} \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1} && \text{(vet at } \sqrt{e} < 2) \\ &= \frac{1}{(n+1)! \cdot 2^n}. \end{aligned}$$

Vi skal altså ha

$$\frac{1}{(n+1)! \cdot 2^n} < 0.01, \quad \text{dvs.} \quad 100 < (n+1)! \cdot 2^n.$$

Ved prøving/feiling (kalkulator?) finner du at  $n = 3$  er første  $n$ -verdi som fikser dette. Altså er tilnærmingen vår

$$e^{1/2} \approx 1 + (1/2) + \frac{(1/2)^2}{2!} + \frac{(1/2)^3}{3!} = \frac{79}{48}. \quad \blacksquare$$

**Eksempel 6** Bruk Taylors formel til å tilnærme integralet

$$\int_0^1 \frac{e^{x^2} - 1}{x} dx$$

med feil mindre enn 0.0004.

**Løsning** Ideen er å finne et uttrykk for  $e^{x^2}$  v.h.a. Taylors formel for  $e^x$  i  $a = 0$ . Denne er (jfr. forrige eksempel)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}$$

der  $z$  er mellom 0 og  $x$ . Innsetting av  $x^2$  for  $x$  gir

$$\begin{aligned} e^{x^2} &= 1 + (x^2) + \frac{(x^2)^2}{2!} + \cdots + \frac{(x^2)^n}{n!} + \frac{e^z}{(n+1)!} (x^2)^{n+1} \\ &= 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!} x^{2n+2}, \end{aligned}$$

der  $z$  er mellom 0 og  $x^2$ . Vi trekker fra 1 på begge sider og deler på  $x$ :

$$\frac{e^{x^2} - 1}{x} = x + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!} x^{2n+1}.$$

Altså

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{e^{x^2} - 1}{x} dx &= \int_0^1 \left( x + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{n!} \right) dx \\ &\quad + \int_0^1 \frac{e^c}{(n+1)!} x^{2n+1} dx \quad \text{der } c \in [0, x^2]. \end{aligned}$$

Det siste leddet er feilen, og vi må velge  $n$  så stor at den er mindre enn 0.0004. Vi estimerer på vanlig måte og integrerer til slutt:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{e^c}{(n+1)!} x^{2n+1} dx &\leq \int_0^1 \frac{e^1}{(n+1)!} x^{2n+1} dx \quad (\text{hadde } c \in [0, 1]) \\ &= \frac{e}{(n+1)!} \int_0^1 x^{2n+1} dx \\ &= \frac{e}{(n+1)!} \left[ \frac{1}{2n+2} x^{2n+2} \right]_0^1 = \frac{e}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{2n+2} \end{aligned}$$

Ved prøving og feiling finner du at den første  $n$ -verdien som gjør dette mindre enn 0.0004 er  $n = 5$ . Tilnærmingen vår blir derfor

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{e^{x^2} - 1}{x} dx &\approx \int_0^1 \left( x + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{3!} + \frac{x^7}{4!} + \frac{x^9}{5!} \right) dx \\ &= \left[ \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2! \cdot 4} + \frac{x^6}{3! \cdot 6} + \frac{x^8}{4! \cdot 8} + \frac{x^{10}}{5! \cdot 10} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2! \cdot 4} + \frac{1}{3! \cdot 6} + \frac{1}{4! \cdot 8} + \frac{1}{5! \cdot 10} = \frac{9487}{14400}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

## Konvergens av Taylorrekker

Vi har sett at Taylorpolynomene  $T_n(x)$  gir tilnærminger til funksjonen  $f(x)$  rundt punktet  $x = a$  der de er utviklet, og at tilnærmingene blir bedre jo større  $n$  er. Vi skal nå se på hva som skjer når vi lar  $n \rightarrow \infty$ , dvs. når vi tar med *hele* Taylorrekken. Spørsmålet er om tilnærmingen da blir "uendelig god", dvs. om Taylorrekken sum blir *nøyaktig*  $f(x)$ .

### Teorem 3 Vilkår for at Taylorrekken skal konvergere mot $f$

La  $I$  være et intervall som inneholder punktet  $x = a$ , og anta at  $f(x)$  er uendelig mange ganger deriverbar på  $I$ . For å bevise at

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots$$

for alle  $x \in I$  (dvs. vise at Taylorrekken konvergerer mot  $f(x)$  på  $I$ ), trenger vi bare vise at restleddet oppfyller

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0 \quad \text{for alle } x \in I.$$

**Bevis** Taylors formel sier at

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x),$$

der  $T_n(x)$  er Taylorpolynomiet av grad  $n$  utviklet i punktet  $a$ . Hvis  $R_n(x) \rightarrow 0$  når  $n \rightarrow \infty$  for alle faste tall  $x$ , følger det at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) = f(x).$$

Men  $T_n(x)$  er jo delsummene av Taylorrekken, så her står det nettopp at Taylorrekken konvergerer mot  $f(x)$ . ■

### Teorem 4 Konvergens av populære Taylorrekker

Vi har

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

for alle  $x \in \langle -\infty, \infty \rangle$ .



**Bevis**

(1)  $f(x) = e^x$ .

Taylorrekken har vi fra før. Vi har  $a = 0$ , og (fakultet dominerer potens)

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| = e^z \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\leq e^{|x|} \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0 \quad \text{når } n \rightarrow \infty.$$

(2)  $f(x) = \sin x$ .

Taylorrekken finnes ved direkte utregning. Har  $a = 0$ . Restleddet:

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| = |f^{(n+1)}(z)| \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Siden  $|f^{(n+1)}(z)|$  er enten  $|\cos z|$  eller  $|\sin z|$ , har vi

$$|f^{(n+1)}(z)| \leq 1.$$

Derfor

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0 \quad \text{når } n \rightarrow \infty.$$

(3) Tilfellet  $f(x) = \cos x$  går nøyaktig som tilfellet  $\sin x$ . ■**4.4 Oppgaver****1.** La funksjonen  $f$  være definert ved

$$f(x) = \frac{1}{2x+1}.$$

- a) Finn Taylorrekken til  $f(x)$  i  $a = 0$ . Skriv også opp Taylorpolynomet av grad 3 for  $f(x)$  i samme punkt.
- b) Vis at Taylorrekken du fant under a) konvergerer for hver fast  $x$  som er slik at  $|x| < \frac{1}{2}$ , og finn ut hva den konvergerer mot. (Hint: Tenk på formelen for sum av en geometrisk rekke!)

**2.** Bestem Taylorpolynomet av grad 3 til

$$f(x) = 3 - 7x + x^2 + 5x^3 + 2x^4$$

i  $a = 0$ . Finn deretter Taylorrekken i samme punkt. Finn til slutt Taylorrekken til  $f(x)$  i punkt-tet  $a = 1$ , og forenkler svaret mest mulig. Hva kan du etter dette si om Taylorrekkene til polynomer?**3.** La funksjonen  $f$  være gitt ved  $f(x) = e^{2x}$ .

- a) Bestem Taylorpolynomet  $T_4(x)$  av grad 4 for  $f(x)$  i punktet  $a = 0$ .
- b) Vis at  $T_4(x)$  tilnærmer  $f(x)$  med feil mindre enn 0.03 når  $x$  er i intervallet  $[-1/2, 1/2]$ .

**4.** La  $f(x) = \ln x$ .

- a) Vis ved induksjon at

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{x^n}$$

der  $f^{(n)}(x)$  er den  $n$ -te deriverte av  $f(x)$ , for  $n = 1, 2, 3, \dots$ 

- b) Bruk at Taylorpolynom for
- $f(x)$
- i punktet
- $a = 1$
- til å beregne
- $\ln(1.2)$
- med feil mindre enn 0.001.

## 4.5 Potensrekker

Vi har sett at funksjoner gir opphav til Taylorrekker. Taylorrekker er eksempler på *potensrekker*, og vi skal nå studere slike rekker.

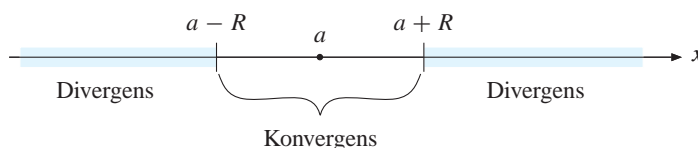
En **potensrekke** er en rekke på formen

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots$$

For å avgjøre for hvilke  $x$  en slik rekke konvergerer, kan vi vanligvis bruke forholdstesten, evt. rottesten. Vi behandler  $x$  som en konstant. Vi finner da alltid at det fins en  $R \geq 0$  slik at

- rekken konvergerer absolutt for  $|x-a| < R$
- rekken divergerer for  $|x-a| > R$ .

Tallet  $R$  kalles *konvergensradien* til potensrekken, mens  $a$  kalles potensrekkenes *sentrum*. (Det generelle beviset for at enhver potensrekke har en konvergensradius, får vi ikke bruk for. Derfor droppes det.)



Tilfellet  $R = \infty$  (konvergens for alle  $x$ , dvs. uendelig konvergensintervall) kan forekomme. Hvis konvergensintervallet er endelig, må endepunktene  $x = a - R$  og  $x = a + R$  alltid sjekkes manuelt ved innsetting.

**Eksempel 1**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n \cdot 5^n}$  For hvilke  $x$  konvergerer den? Forholdstesten:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x-2)^{n+1}}{(n+1) \cdot 5^{n+1}} \cdot \frac{n \cdot 5^n}{(x-2)^n} \right| \\ &= |x-2| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right) \cdot \frac{1}{5} \\ &= \frac{1}{5} \cdot |x-2| \end{aligned}$$

Altså konvergens hvis

$$\frac{1}{5} \cdot |x-2| < 1 \quad , \quad \text{dvs.} \quad |x-2| < 5$$

og divergens hvis  $|x-2| > 5$ . Altså  $R = 5$ .

$$\begin{aligned}\text{Endepunktene: } x &= 2 + 5 = 7 \\ x &= 2 - 5 = -3\end{aligned}$$

$x = 7$  innsatt gir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(7-2)^n}{n \cdot 5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad (\text{divergent } p\text{-rekke})$$

$x = -3$  innsatt gir

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^n}{n \cdot 5^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{-5}{5}\right)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \quad (\text{konv. v/alt.rekke-testen})\end{aligned}$$

Så rekken konvergerer for  $x \in [-3, 7)$ . ■

## 4.5 Oppgaver

1. Avgjør for hvilke  $x \in \mathbf{R}$  potensrekkene under konvergerer.

a)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{10^n} (x-3)^n$

b)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! x^n}{(1000)^n}$

c)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (x-2)^n$

d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n (n+2)^2} (x+1)^n$

2. Bestem konvergensraden til følgende potensrekker: (Du trenger ikke sjekke endepunkter.)

a)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+5)^2 + n}{10n+17} (x+9)^{2n}$

b)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} (x-1)^n$

3. Skriv følgende potensrekker med summetegn. Avgjør så for hvilke verdier av  $x$  de to rekkene konvergerer.

a)  $\frac{x}{1 \cdot 3} + \frac{x^2}{2 \cdot 4} + \frac{x^3}{3 \cdot 5} + \frac{x^4}{4 \cdot 6} + \dots$

b)  $\frac{x}{1 \cdot 3} + \frac{x^3}{2 \cdot 4} - \frac{x^5}{3 \cdot 5} + \frac{x^7}{4 \cdot 6} - \dots$

4. Betrakt de to funksjonene  $f$  og  $g$  definert for alle reelle  $x$  ved

$$f(x) = \sinh x \quad \text{og} \quad g(x) = \cosh x.$$

- a) Finn Taylorrekken til  $f$  og  $g$  utviklet i punktet  $a = 0$ .  
 b) Vis ved hjelp av forholdstesten at begge de to Taylorrekken konvergerer for alle reelle  $x$ .  
 c) Vis at Taylorrekken til  $f$  og  $g$  konvergerer mot henholdsvis  $f(x)$  og  $g(x)$  for alle  $x$ .  
 (Hint: Se på beviset for teorem 9.6.)

## 4.6 Triksing med potensrekker

Hvis vi kjenner summen av noen potensrekker, kan vi bruke de fire triksene under til å finne summen av mange nye. Moral: Vi regner med uendelige summer stort sett akkurat som med endelige. Bevisene for gyldigheten av triks 1, 2 og 4 behandles i oppgave 4.6.4. Gyldigheten av triks 3 bevises i den stjernemerkede seksjonen 4.8.

### Triks 1: Gange inn x og slikt

Husk at  $x$  bare er et konstant tall sett fra summeindeksens synspunkt. Vi kan derfor dele eller gange hele rekken med  $x$ ,  $x^2$ ,  $x^3$  etc. som vi vil uten at konvergensområdet endres.

**Eksempel 1** Vi har  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$  for alle  $x$ ,

så  $x^2 e^x = x^2 + x^3 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^5}{3!} + \frac{x^6}{4!} + \dots$  for alle  $x$ .

Merk at regningen kan gjøres fullstendig på summetegnsnivå også:

$$x^2 e^x = x^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n!}. \blacksquare$$

### Triks 2: Sette inn ting for x

Vi kan sette inn  $x^2$ ,  $x^3$ ,  $2x^2$  (generelt *polynomer*) for  $x$  i en rekke.

**Eksempel 2** Vi har (geometrisk rekke med  $r = x$ )

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

for  $-1 < x < 1$ . Innsetting av  $(-x)$  for  $x$  gir

$$\frac{1}{1-(-x)} = 1 + (-x) + (-x)^2 + (-x)^3 + (-x)^4 + \dots$$

dvs.

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$$

Den siste formelen vil nå være gyldig for  $-1 < (-x) < 1$ , dvs. for  $-1 < x < 1$ . Jada, vi fikk det samme, men det var tilfeldig. Setter vi inn  $2x^3$  isteden, får vi (gjør nå regningen på summetegnsnivå)

$$\frac{1}{1-2x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (2x^3)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^{3n}.$$

Denne er gyldig for  $-1 < 2x^3 < 1$ , dvs. for  $-(\frac{1}{2})^{1/3} < x < (\frac{1}{2})^{1/3}$ .  $\blacksquare$

**Triks 3: Leddvis derivasjon og integrasjon**

Hvis vi har en rekke for  $f(x)$  gyldig på  $U = \langle a - R, a + R \rangle$ , så fås en rekke for  $f'(x)$  på  $U$  ved å *derivere leddvis*. Vi kan også *integrere*  $f(x)$  leddvis innenfor intervallet  $U$ , både bestemt og ubestemt.

**Eksempel 3** Vet at  $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$  for  $x \in \langle -1, 1 \rangle$ . Derivasjon gir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{1-x} \right) &= \frac{d}{dx} (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots) \\ \frac{1}{(1-x)^2} &= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \dots \quad \text{for } x \in \langle -1, 1 \rangle. \end{aligned}$$

Hvis vi gjør dette på summetegnsnivå, deriverer vi ledd-uttrykket. Den deriverte summen starter på 1 fordi derivasjon av konstantleddet gir 0:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx} \left( \sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \quad \blacksquare$$

**Eksempel 4** Vi fant i stedet at  $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$  for  $x \in \langle -1, 1 \rangle$ . Integrasjon gir

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1+x} dx &= \int (1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots) dx \\ \ln(1+x) &= C + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots \end{aligned}$$

Vi setter integrasjonskonstanten  $C$  foran, siden den blir konstantleddet i den nye rekken. Innsetting av  $x = 0$  gir  $\ln 1 = C + 0$ , dvs.  $C = 0$ . Så

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots \quad \text{for } x \in \langle -1, 1 \rangle. \quad \blacksquare$$

**Triks 4: Addisjon og subtraksjon av potensrekker**

Hvis vi har rekker for  $f(x)$  og  $g(x)$ , finner vi en rekke for  $f(x) + g(x)$  ved å *addere leddvis*. Rekken for  $f(x) + g(x)$  blir gyldig for alle  $x$  der rekkene for  $f(x)$  og  $g(x)$  *begge* er gyldige. Tilsvarende for subtraksjon.

**Eksempel 5**

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} &= (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots) \\ &+ (1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \dots) \\ &= 2 + 2x^2 + 2x^4 + 2x^6 + \dots = 2 \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Kombinert med de fire triksene er følgende teorem meget slagkraftig:

### **Teorem 1 Unikhet av Taylorrekker**

Hvis vi har en potensrekke med sentrum  $a$  og sum  $f(x)$ , dvs.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

på et intervall rundt  $a$ , så er dette Taylorrekken til  $f(x)$  i punktet  $a$ . Altså kan alle potensrekketriksene våre brukes til å finne Taylorrekker!

**Bevis** Antakelsen er at

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \dots$$

så innsetting av  $x = a$  gir  $c_0 = f(a)$ . Leddvis derivasjon:

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \dots$$

Innsetting av  $x = a$  gir  $c_1 = f'(a)$ . Leddvis derivasjon igjen:

$$f''(x) = 2c_2 + (3 \cdot 2)c_3(x-a) + \dots$$

Innsetting av  $x = a$  gir  $f''(a) = 2c_2$ , dvs.  $c_2 = \frac{f''(a)}{2!}$  osv.

Vi ser at koeffisientene  $c_n$  må stemme med dem vi har i Taylorrekken, dvs. dette er Taylorrekken. ■

På neste side er vist en oversikt over kjente Taylorrekker som kan brukes som utgangspunkt for triksing. Konvergensområdene står bak rekkene. De tre første rekkene fant vi i seksjon 4.4, den fjerde er geometrisk og rekken for  $\ln(1+x)$  fikk vi ved triksene i sted. Man kan vise ved Taylors formel at den holder for  $x = 1$  også. Den siste rekken i oversikten kalles **binomialrekken**. Den er Taylorrekken til  $f(x) = (1+x)^\alpha$  i  $x = 0$ , der  $\alpha \neq 0$  er en konstant (trenger ikke være heltallig). Når  $\alpha = 1, 2, 3, \dots$  blir rekken endelig, og vi får binomialformelen fra s. 73. (Prøv  $\alpha = 2$ .)

Hvis vi setter inn  $(x-1)$  for  $x$  i rekken for  $\ln(1+x)$  vist i oversikten, får vi en rekke for  $\ln x$ :

$$\ln x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \dots$$

Siden dette er en potensrekke med sentrum 1, må det (unikhet av Taylorrekker) være Taylorrekken til  $\ln x$  i  $a = 1$ . Resultatet stemmer da også med det vi fikk i seksjon 4.4 da vi brukte definisjonen. Vi får nå at denne rekken konvergerer mot  $\ln x$  for  $-1 < (x-1) \leq 1$ , dvs.  $0 < x \leq 2$ .

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \langle -\infty, \infty \rangle$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \langle -\infty, \infty \rangle$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad \langle -\infty, \infty \rangle$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \langle -1, 1 \rangle$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \quad \langle -1, 1 \rangle$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots \quad \langle -1, 1 \rangle$$

**Bevis** (For binomialrekken.) Med forholdstesten får vi  $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = |\frac{\alpha-n}{n}| \cdot |x| \rightarrow |x|$  når  $x \rightarrow \infty$ , så rekken konvergerer for  $|x| < 1$ .

La  $S(x)$  være summen. Leddvis derivasjon gir da

$$S'(x) = \alpha + \alpha(\alpha-1)x + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{2!}x^2 + \dots$$

Så

$$xS'(x) = \alpha x + \alpha(\alpha-1)x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{2!}x^3 + \dots$$

Addisjon av disse to likningene gir

$$\begin{aligned} S'(x) + xS'(x) &= \alpha + \alpha^2 x + \frac{\alpha^2(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha^2(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots \\ &= \alpha S(x) \end{aligned}$$

Så

$$(x+1)S'(x) = \alpha S(x), \quad \text{dvs.} \quad S'(x) - \frac{\alpha}{x+1}S(x) = 0$$

for alle  $x \in \langle -1, 1 \rangle$ . Denne difflikningen er både lineær og separabel (dvs. du kan velge løsningsmetode), og med initialbetingelsen  $S(0) = 1$  (som fås fra rekken) blir løsningen  $S(x) = (1+x)^\alpha$  for alle  $x \in \langle -1, 1 \rangle$ . ■

Som avslutning skal vi se på noen eksempler med potensrekketriksing. Merk hvor lett det nå er blitt å finne Taylorrekker. Husk ellers at det å avgjøre for hvilke

$x$  en Taylorrekke *konvergerer* (f.eks. ved forholds-testen) *ikke* er det samme som å avgjøre for hvilke  $x$  den *konvergerer mot*  $f(x)$ . Det finnes eksempler på slemme Taylorrekker som konvergerer mot noe annet enn sin funksjon  $f(x)$ . For å vise at en Taylorrekke konvergerer mot  $f(x)$ , er den vanligste metoden å bruke potensrekketriks.

**Eksempel 6** Finn Taylorrekken til

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 3}$$

i punktet  $a = 0$ , og vis at den konvergerer mot  $f(x)$  for  $x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ .

**Løsning** Vi ser at  $f$  likner på summen av en geometrisk rekke. Presser over:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{3 + x^2} = \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{1 + x^2/3} \right] \\ &= \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{1 - (-\frac{1}{3}x^2)} \right] && \text{(geometrisk med } -\frac{1}{3}x^2 \text{ for } x) \\ &= \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}x^2\right)^n && \text{(satte inn i formelen fra oversikten)} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{3^{n+1}}. \end{aligned}$$

Rekken konvergerer mot  $f(x)$  for  $|\frac{1}{3}x^2| < 1$ , dvs. for  $|x| < \sqrt{3}$ . ■

**Eksempel 7** Finn Taylorrekken i  $a = 0$  til funksjonen  $f$  gitt ved  $f(0) = 0$  og

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} - 1 \quad \text{for } x \neq 0.$$

**Løsning** Divisjon med  $x$  i rekken for  $\sin x$  fra boksen gir

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{x} &= 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots \\ \frac{\sin x}{x} - 1 &= -\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots \\ \text{altså} \quad f(x) &= \underline{\underline{-\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots}} \end{aligned}$$

for  $x \neq 0$ . Siden  $f(0) = 0$ , holder rekkeuttrykket for  $f(x)$  også for  $x = 0$ . Dermed har vi skrevet  $f(x)$  for alle  $x \in \mathbf{R}$  som summen av en potensrekke med sentrum 0. Ved unikheth av Taylorrekker må da den understrekede rekken være Taylorrekken til  $f$  i punktet 0. ■



**Eksempel 8** Anta at

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{(n!)^2} \quad \text{for alle } x.$$

Finn rekker for  $f'(x)$  og  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$  gyldige for alle  $x$ .

**Løsning** Leddvis derivasjon gir

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n+1)x^{4n}}{(n!)^2} \quad f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n(4n+1)x^{4n-1}}{(n!)^2}$$

Leddvis bestemt integrasjon gir at  $F(x)$  blir

$$\int_0^x \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{4n+1}}{(n!)^2} \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{t^{4n+2}}{(4n+2)(n!)^2} \right]_0^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)(n!)^2} \quad \blacksquare$$

## 4.6 Oppgaver

1. Vis at rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n} = x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{27} + \dots$$

konvergerer for alle  $x \in \mathbf{R}$ . La  $f(x)$  være summen av rekken, med  $D_f = \mathbf{R}$ . Finn en rekke som konvergerer mot funksjonen  $g(x)$  definert ved

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt \quad \text{for alle } x.$$

2. Bruk potensrekketriksing (med utgangspunkt i boksen side 151) til å finne Taylorrekken i  $a = 0$  for funksjonene under. Begrunn i hvert tilfelle at rekken konvergerer mot  $f(x)$  for alle  $x$ , eventuelt for alle  $x$  innenfor de oppgitte begrensninger.

a)  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  (vi definerer  $f(0) = 1$ )

b)  $f(x) = \frac{e^{-x} - 1}{x}$  (vi definerer  $f(0) = -1$ )

c)  $f(x) = \int_0^x \ln(1+t) dt$   $-1 < x < 1$

d)  $f(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$   $-1 < x < 1$

e)  $f(x) = \frac{1}{4x+8}$   $-2 < x < 2$

3. La  $f(x)$  være definert for alle  $x \in \mathbf{R}$  ved

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+2)x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

- a) Verifiser at rekken  $f$  er gitt ved konvergerer for alle  $x \in \mathbf{R}$ .
- b) La funksjonen  $F(x)$  være definert for alle reelle  $x$  ved kravene

$$F'(x) = f(x) \quad \text{og} \quad F(0) = 0.$$

Finn en potensrekke som konvergerer mot  $F(x)$  for alle  $x$ .

- c) Bruk resultatet i b) til å finne et lukket uttrykk (dvs. en vanlig "formel") for  $F(x)$ .
- d) Finn et lukket uttrykk for  $f(x)$ .
- e) Finn summen av rekken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+2)\pi^{2n+1}}{2^{2n+1}(2n+1)!}.$$

4. Begrunn triksene 1, 2 og 4 fra seksjon 4.6.

## 4.7 Summering av rekker

Vi skal nå se litt systematisk på hvordan potensrekketriksing kan brukes til å finne summen av rekker. Vi antar at vi har gitt en rekke, og ønsker å finne ut hva den konvergerer mot.

### A. Potensrekker

1. Se om det er aktuelt å splitte rekken opp i en sum av flere rekker.
2. Absorber faktorer av typen  $2^n$ ,  $3^n$  etc. og flytt sentrum av potensrekken til 0 ved å innføre en ny variabel  $u$ . Sett "overskytende" potenser utenfor. Eksempel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n \cdot 2^{n+1}} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x-1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^n}{n}, \quad u = \frac{x-1}{2}.$$

3. "Plukk opp" eventuelle faktorer av typen  $(n+1)$ ,  $n$ ,  $(n-\frac{1}{2})$  etc. ved å justere eksponenten og bruke leddvis derivasjon og integrasjon. Det ene virker for faktorer i telleren, det andre for faktorer i nevneren. Det gir vanligvis enklest regning å ta leddene i telleren først. Det kan være at du må *faktorisere* enkelte  $n$ -uttrykk før du kommer i gang, som for eksempel  $(1-n^2) = (1+n)(1-n)$ .
4. Se om du kan få gjort om rekken du sitter igjen med til en av de kjente rekkene i oversikten på side 151. Justering av summeindeksen (sette  $m = n+1$  etc.) kan være aktuelt. Husk til slutt å sette inn igjen for  $u$  hvis du har skiftet variabel.

### B. Vanlige rekker

Det beste her er å se om man kan oppfatte rekken som en potensrekke med en spesiell verdi av  $x$  innsatt. Vi bruker faktorer av typen  $2^n$ ,  $3^n$  etc. til å "bygge opp"  $x$ -uttrykket. Eksempel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{kan oppfattes som} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} x^n$$

med  $x = \frac{1}{2}$  innsatt. Finn så summen av potensrekken.

Metodikken ovenfor setter oss i stand til å finne summen av mange rekker som oppstår i praksis, men den dekker langt fra alle rekker man *kan* finne summen av. Dessuten fins det (analogt til hva tilfellet er for integraler) mange rekker som konvergerer mot en sum som ikke kan uttrykkes ved elementære funksjoner, og disse kan vi heller ikke takle ved metoden vår.

**Eksempel 1** Finn summen av rekken  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+5}}{n! \cdot 2^n}$ .

**Løsning** Å splitte opp er uaktuelt her. For å absorbere faktoren  $2^n$ , setter vi utenfor overskytende  $x$ -potenser i telleren. Får da

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+5}}{n! \cdot 2^n} = x^5 \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x/2)^n}{n!} \right] = x^5 \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} \right] = x^5 e^u = x^5 e^{x/2}$$

for alle  $x$ . Vi hadde her  $u = x/2$  og brukte rekken for  $e^u$ . ■

**Eksempel 2** Finn summen av rekken  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{2n-1}(2n+2)}$ .

**Løsning** Denne kan skrives  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+2} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n-1}$ , dvs. den kan oppfattes som

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+2} x^{2n-1} \quad \text{med } x = \frac{1}{4} \text{ innsatt.}$$

Så gjelder det å finne summen av potensrekken. Her kan vi gå rett på punkt 3, og vi gjør da slik:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n+2} &= \frac{1}{x^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{2n+2} \\ &= \frac{1}{x^3} \int_0^x \left( \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n+1} \right) dx \quad [\text{se forklaring under}] \\ &= \frac{1}{x^3} \int_0^x (x^3 + x^5 + x^7 + \dots) dx \\ &= \frac{1}{x^3} \int_0^x \frac{x^3}{1-x^2} dx \quad [\text{geometrisk med } a = x^3, r = x^2] \end{aligned}$$

Tankegang: Faktoren  $(2n+2)$  var i nevneren. Vi justerte derfor eksponenten slik at vi kunne få den vekk ved å derivere ledd-uttrykket. Dermed får vi den neste overgangen; vi betrakter rekken vi hadde som *integralet* av den deriverte rekken. Hadde faktoren  $(2n+2)$  stått i telleren isteden, ville vi gått motsatt vei. Se eksemplet neste side. Resten av regningen er grei, regn ut integralet og sett inn  $x = 1/4$  til slutt. Summen blir  $32 \ln(16/15) - 2$ . ■

**Eksempel 3** Finn summen av rekken  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n}{n+1} x^n$  for  $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ .

**Løsning** Vi får

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n}{n+1} x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot (2x)^n}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot u^n}{n+1} && [u = 2x] \\ &= u \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot u^{n-1}}{n+1} && [\text{justerte for å ta } n] \\ &= u \cdot \frac{d}{du} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^n}{n+1} \right] && [\text{plukket opp } n] \\ &= u \cdot \frac{d}{du} \left[ \frac{1}{u} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^{n+1}}{n+1} \right] && [\text{justerte for å ta } (n+1)] \\ &= u \cdot \frac{d}{du} \left[ \frac{1}{u} \int_0^u \left( \sum_{n=1}^{\infty} u^n \right) du \right] && [\text{plukket opp } (n+1)] \\ &= u \cdot \frac{d}{du} \left[ \frac{1}{u} \int_0^u \frac{u}{1-u} du \right] && [\text{geometrisk rekke}] \\ &= u \cdot \frac{d}{du} \left[ \frac{1}{u} \int_0^u \left( -1 + \frac{1}{1-u} \right) du \right] && [\text{polynomdivisjon}] \\ &= \frac{1}{1-u} + \frac{\ln(1-u)}{u} && [\text{standard regning}] \\ &= \frac{1}{1-2x} + \frac{\ln(1-2x)}{2x} && [\text{for } x \neq 0] \end{aligned}$$

Formelen for sum av den geometriske rekken holdt for  $-1 < u < 1$ , som tilsvarer  $-1/2 < x < 1/2$ . Med  $x = 0$  er selvsagt summen av rekken null. Så vi har funnet summen av rekken for alle  $x \in \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$ . ■

## 4.7 Oppgaver

1. I punktene a)–d) skal du gjøre følgende:

- (i) Avgjør for hvilke  $x$  rekken konvergerer.  
 (ii) Finn rekkens sum i konvergensområdet.

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$                       b)  $\sum_{n=1}^{\infty} n(x-3)^n$   
 c)  $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n(x-1)^n$               d)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$

2. Finn summen av rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

3. Finn summen av rekken

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n(n-1)}$$

## \*4.8 Teorien bak leddvis derivasjon og integrasjon

I denne seksjonen skal vi vise gyldigheten av triks 3 fra seksjon 4.6.

Vi starter med en potensrekke som konvergerer mot en sum  $S(x)$  på åpent intervall rundt potensrekkens sentrum, altså

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = S(x) \quad \text{for } x \in U$$

der  $U = \langle a - R, a + R \rangle$  er et åpent intervall. La  $S_N$  være summen av de  $N$  første leddene i rekken ovenfor.

### Påstand 1

La  $J \subseteq U$  være et lukket intervall. Da konvergerer  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$  absolutt for alle  $x \in J$ . For hver  $\epsilon > 0$  fins  $N$  slik at for alle  $x \in J$  er

$$|S(x) - S_N(x)| < \epsilon$$

### Bevis for påstand 1

Velg  $b \in U$  og  $r < 1$  slik at  $|x - a| \leq r \cdot |b - a|$  for alle  $x \in J$ . Siden rekken konvergerer i  $b$ , fins  $K$  slik at  $|c_n(b-a)^n| < K$  for alle  $n$ . Da er

$$|c_n(x-a)^n| \leq |c_n(b-a)^n| \cdot r^n \leq K \cdot r^n \quad \text{for alle } x \in J.$$

Rekken  $\sum K r^n$  er geometrisk og konvergent, så sammenlikningstesten gir at potensrekken vår er absolutt konvergent i punktet  $x$ . Videre er

$$|S(x) - S_N(x)| = \left| \sum_{n=N}^{\infty} c_n(x-a)^n \right| \leq \left| \sum_{n=N}^{\infty} K \cdot r^n \right|$$

Her er uttrykket lengst til høyre "resten" av en konvergent geometrisk rekke, og det er derfor mindre enn en gitt  $\epsilon > 0$  for  $N$  stor nok. ■

### Påstand 2

Funksjonen  $S(x)$  er kontinuerlig på  $U$ .

### Bevis for påstand 2

Gitt  $p \in U$ , velg et lukket intervall  $J \subseteq U$  slik at  $p \in J^*$ . Gitt  $\epsilon > 0$ . Ved kontinuitet av polynomet  $S_N(x)$  fins en omegn  $V$  om  $p$  inneholdt i  $J$  slik at  $|S_N(x) - S_N(p)| < \epsilon/3$  hvis  $x \in V$ . Ved påstand 1 fins  $N$  slik at  $|S(x) - S_N(x)| < \epsilon/3$  for alle  $x \in V$ . Hvis  $x \in V$  fås da (trekantulikheten)

$$\begin{aligned} |S(x) - S(p)| &\leq |S(x) - S_N(x)| + |S_N(x) - S_N(p)| + |S_N(p) - S(p)| \\ &< \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Påstand 3**

Rekken  $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1}$  konvergerer for alle  $x \in U$ .

**Bevis for påstand 3**

Gitt  $x \in U$ , velg  $b \in U$  slik at  $|x-a| = r|b-a|$ , der  $r < 1$ . Da er

$$|n c_n (x-a)^{n-1}| \leq B_n \cdot |c_n (b-a)^n|, \quad \text{der} \quad B_n = \frac{n r^n}{r|b-a|}$$

Her går  $n r^n = n e^{n(\ln r)}$  mot 0 når  $n \rightarrow \infty$  fordi  $r < 1$  (l'Hopital), så det fins  $K$  slik at  $B_n < K$  for alle  $n$ . Siden rekken  $\sum c_n (b-a)^n$  konvergerer absolutt ved påstand 1, gir nå sml.testen at  $\sum n c_n (x-a)^{n-1}$  konvergerer. ■

**Påstand 4**

$\int_b^c S(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \int_b^c S_N(x) dx \right]$  for alle  $b, c \in U$  slik at  $b < c$ .

**Bevis for påstand 4**

Gitt  $\epsilon > 0$ . Ved påstand 1, velg  $N$  slik at  $|S(x) - S_N(x)| < \epsilon/(c-b)$  for alle  $x \in [b, c]$ . Da fås

$$\left| \int_b^c S(x) dx - \int_b^c S_N(x) dx \right| = \left| \int_b^c [S(x) - S_N(x)] dx \right| \leq \frac{\epsilon(c-b)}{c-b} = \epsilon,$$

ved påstand 2 og teorem 10.0.0. Påstand 4 er vist. ■

Fra påstand 4 følger at leddvis bestemt integrasjon innenfor  $U$  er ok. For siden vi kan integrere polynomet  $S_N(x)$  ledd for ledd, har vi

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \int_b^c S_N(x) dx \right] = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{N-1} \left[ \int_b^c c_n (x-a)^n dx \right],$$

og uttrykket til høyre er summen av den rekken vi får ved å integrere rekken for  $S(x)$  leddvis. At leddvis ubestemt integrasjon er lovlig følger også, for ved fundamentalteoremet er det bestemte integralet  $\int_a^x S(t) dt$  en antiderivert av  $S(x)$ , og dette bestemte integralet vet vi nå at vi kan beregne leddvis. Så var det leddvis derivasjon. Ved påstand 3 kan vi døpe  $H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (t-a)^{n-1}$  for  $t \in U$ . Leddvis integrasjon gir da

$$\int_a^x H(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ c_n (t-a)^n \right]_a^x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (x-a)^n = S(x) - c_0,$$

for alle  $x \in U$ . Fundamentalteoremet gir  $S'(x) = H(x)$  for alle  $x \in U$ .

**Blandede oppgaver til kapittel 4**

**1.** Onkel Skruer har lenge irritert seg over at hans verste konkurrent Rikerud dominerer *kalkulator-markedet*. Kalkulatorer anvendes som kjent ved økonomiske beregninger, og det er helt uakseptabelt at folk bruker et produkt fra fattiglusen og finansstosken Rikerud til slikt hellig arbeid, mener Skruer. Han bestemmer seg følgelig for å lansere sin egen kalkulator, og Ole, Dole og Doffen blir ansatt (uten lønn, selvsagt) for å gjøre utviklings-arbeidet. Et av problemene guttene står overfor, er å lage sinus-knappen til kalkulatoren. Hvordan i all verden skal man *regne ut* for eksempel  $\sin(1.37)$ , der vinkelen er i radianer? Formelen  $f(x) = \sin x$  er jo ikke "operativ" på samme måte som  $f(x) = x^2 + 2x + 17$ , for eksempel. I Hakkespettboken ser guttene at *Taylorpolynom* er en mulig løsning på problemet, og bestemmer seg for å prøve dette. De vil la kalkulatoren bruke et Taylorpolynom i  $a = 0$  til å beregne  $\sin x$  direkte for  $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ , og så la den tilbakeføre andre vinkler til dette området ved hjelp av formlene  $\sin x = \sin(\pi - x)$  og  $\sin x = \sin(x - 2\pi) = \sin(x + 2\pi)$ .

- a) Onkel Skruer mener at kalkulatoren må kunne gi  $\sin x$  med feil mindre enn 0.0000001. Finn  $n$  slik at Taylorpolynomet  $T_n(x)$  i  $a = 0$  for  $f(x) = \sin x$  tilnærmer  $\sin x$  med feil mindre enn onkels krav for  $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ . Finn også det tilsvarende polynomet  $P_n(x)$ .

Guttene planlegger også en alternativ, mer estetisk kalkulatormodell der det ikke brukes til-bakeføringsformler av typen  $\sin x = \sin(\pi - x)$  overhodet. Denne modellen skal bare kunne regne ut  $\sin x$  for  $x \in [-2\pi, 2\pi]$ , og beregningen skal skje med ett felles polynom for alle vinkelverdiene.

- b) Finn en  $n$  slik at guttene kan bruke Taylorpolynomet  $T_n(x)$  for  $\sin x$  i  $a = 0$  til den alternative kalkulatoren, dvs. slik at  $P_n(x)$  tilfredsstiller onkels feilkraft på  $[-2\pi, 2\pi]$ .

**2.** Betrakt funksjonen  $g(x) = \sqrt{x}$ .

- a) Finn Taylorpolynomet  $T_3(x)$  av grad 3 for  $g(x)$  i punktet  $x = 1$ .
- b) Vis at  $T_3(x)$  tilnærmer  $g(x)$  med feil mindre enn 0.05 når  $x$  er i intervallet  $[1/2, 3/2]$ .

**3.** Bruk Taylors formel for  $\sin x$  til å beregne integralet

$$\int_0^1 \sin(x^2) dx$$

med feil mindre enn 0.0001.

**4.** Vis at

$$\int_0^1 \sin(x^2) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(4n+3)}$$

ved å sette inn en potensrekke for  $\sin(x^2)$  og integrere leddvis.

**5.** Bruk feilestimatet i alternerende-rekke-testen til å finne en tilnærmet verdi av integralet fra forrige oppgave med feil mindre enn 0.001.

**6.** Bruk binomialrekken til å finne de tre første leddene i Taylorrekken i  $a = 0$  til følgende funksjoner. Begrunn at rekken konvergerer mot  $f(x)$  i det oppgitte området.

- a)  $f(x) = \sqrt{1+x}, \quad |x| < 1$
- b)  $f(x) = \sqrt{1+4x^2}, \quad |x| < 1/2$
- c)  $f(x) = \sqrt[3]{1+x^4}, \quad |x| < 1$
- d)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}, \quad |x| < 1$

**7.** Finn Taylorrekken i  $a = 0$  til  $f(x) = \arctan x$ . Vis at rekken konvergerer mot  $f(x)$  for  $|x| < 1$ .

**8. Abels teorem.** I 1826 beviste Niels Henrik Abel at summen av en potensrekke  $\sum c_n(x-a)^n$  er kontinuerlig i *hele* konvergensområdet, inkludert eventuelle endepunkter der rekken konvergerer.

- a) Vis at Taylorrekken for  $\arctan x$  funnet i forrige oppgave konvergerer også for  $x = 1$ .
- b) Bruk Abels teorem til å finne summen av rekken for  $x = 1$ .
- c) Bevis at

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

**9.** Avgjør om følgende rekke konvergerer:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{ne^{1/n}}{n^3}$$

**10.** Avgjør om rekkene under konvergerer. Begrunn svarene.

- a)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^3}{2^n \cdot (3n)!}$
- b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{4/3} + \sin n}{100n^2 + (-1)^n}$

**11.** Finn konvergensintervallet til potensrekken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{8^n (n+3)} (x+2)^n$$

**12.** Finn Taylorpolynomet  $T_3(x)$  av grad 3 for  $f(x) = x - (3+x)^{1/2}$  i punktet  $x = 1$ , og vis at  $T_3(x)$  tilnærmer  $f(x)$  med feil mindre enn 0.001 når  $0 \leq x \leq 2$ .

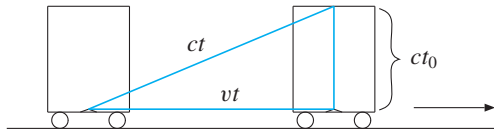
**13.** Finn Taylorrekken i punktet  $a = 0$  for funksjonen  $f$  definert for alle  $x$  ved

$$f(x) = \int_0^{x^2} \left[ \frac{\ln(t+1) - t + (1/2)t^2}{t^3} - \frac{1}{1+t} \right] dx$$

**14.** I denne oppgaven skal vi se på *den spesielle relativitetsteorien*. Denne teorien bygger på to grunnleggende antakelser (aksiomer), nemlig

- (i) Naturlovene er de samme i alle koordinat-systemer
- (ii) Lyshastigheten  $c$  er uavhengig av lyskildens fart.

La oss tenke oss en vogn som kjører med fart  $v$  langs en jernbanelinje. Inne i vognen sendes en lysstråle fra gulvet til taket. La  $t$  være tiden lyset bruker sett fra bakken utenfor, og la  $t_0$  være tiden lyset bruker sett fra innsiden av toget. Strekningen lyset tilbakelegger sett fra vognas innside blir da  $ct_0$ . Sett fra bakken blir lysets strekning  $ct$ , mens vognen i løpet av tiden  $t$  kjører strekningen  $vt$ . Vi får dermed sammenhengen vist under:



a) Vis følgende formel for "tidsutvidelsen":

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Den *kinetiske energien*  $E$  til en partikkel med fart  $v$  (i forhold til et gitt koordinatsystem) kan generelt defineres ved

$$E = \int_0^v \frac{dp}{dv} \cdot v \, dv \tag{1}$$

der  $p = p(v)$  kalles partikkelens *impuls*.

b) I klassisk mekanikk er  $p(v) = m_0v$ , der  $m_0$  er partikkelens masse. Det antas at  $m_0$  er uavhengig av  $v$ . Vis ved utregning av integralet (1) at vi i det klassiske tilfellet har

$$E = \frac{1}{2}m_0v^2.$$

Relativistisk viser det seg (ved betraktninger a la de vi gjorde med toget ovenfor) at vi må korrigere  $m_0$  i impulsformelen til

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{2}$$

for å få bevaring av impuls i kollisjoner. Massen  $m$  kalles partikkelens *relativistiske masse*, og  $m_0$  (som blir lik  $m$  når  $v = 0$ ) kalles nå partikkelens *hvilemasse*. Den relativistiske impulsen er altså gitt ved  $p(v) = mv$ , der massen  $m$  er gitt ved (2). La  $M = m - m_0$ .

c) Vis ved utregning av integralet (1) at

$$E = Mc^2$$

i det relativistiske tilfellet.

d) Ved innsetning for  $M$  i formelen fra c) får vi at  $E = E(v)$  kan skrives

$$E(v) = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0c^2.$$

Finn Taylorpolynomet  $T_2(v)$  for funksjonen  $E(v)$  av annen grad i punktet 0.

e) Vis at når

$$v < (0.0001) \cdot c$$

(dvs.  $v < 30$  km/sek) vil feilen  $R$  man gjør ved å bruke den klassiske tilnærmingen

$$E(v) = (1/2)m_0v^2$$

oppfylle ulikheten

$$\frac{R}{(1/2)m_0v^2} < 0.0000001.$$

**15.** Bruk induksjon til å vise likningen nederst på side 140, i beviset for Taylors formel. Hint: Anta at formelen holder for  $n = k$ , og bruk delvis integrasjon i det siste integralet med

$$F(t) = f^{(k+1)}(t) \text{ og } G(t) = \frac{(x-t)^{k+1}}{(k+1)!}$$

**16. Renormalisering.** Rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n-1) = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots$$

er som kjent meget divergent. Vi skal imidlertid i denne oppgaven bruke en teknikk fra fysikk som kalles *renormalisering* til å "fjerne" divergensen i rekken og vise at i en viss mystisk forstand er rekkens sum, dvs. summen av alle de naturlige tallene, lik  $-1/12$ . Regningen begynner slik:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) &= \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ ne^{-nx} - (1-x^2)^{n-1} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ ne^{-nx} - (1-x^2)^{n-1} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx} - \sum_{n=1}^{\infty} (1-x^2)^{n-1} \right] \end{aligned}$$

Annen overgang ovenfor er "ulovlig" i henhold til etablerte regnearter, man kan ikke flytte grensen utenfor summen i denne situasjonen. Dette lar vi oss ikke skremme av akkurat nå, la oss heller se hvordan vi kan fortsette regningen videre.

a) Vis at  $\sum_{n=1}^{\infty} (1-x^2)^{n-1} = \frac{1}{x^2}$  for  $x \in (0, \sqrt{2})$ .



b) Vis at 
$$\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx} = \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} \quad \text{for } x > 0.$$

c) Vis at 
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} - \frac{1}{x^2} \right] = -\frac{1}{12}.$$

Kombinerer du alle resultatene, får du nå at

$$0 + 1 + 2 + 3 + \dots = -\frac{1}{12},$$

slik vi skulle ha. Men le ikke for tidlig. Rekken vi har sett på oppstår ved teoretiske beregninger flere steder innen kvantefysikk, og det viser seg at svaret  $-1/12$  stemmer med eksperimentene! Så det ligger kanskje noe her man ikke forstår ennå.

### Sinus og cosinus definert ved rekker

Vi skal i denne oppgavesekvensen se på hvordan man kan bruke potensrekkeuttrykkene

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

som *definisjoner* av funksjonene  $\sin x$  og  $\cos x$ , og bygge opp teorien for trigonometriske funksjoner på dette rent analytiske grunnlaget. Ved forholdstesten konvergerer rekkene for alle  $x \in \mathbf{R}$ , så begge funksjonene er definert på hele  $\mathbf{R}$ .

**17.** Vis at vi har  $\sin 0 = 0$ ,  $\cos 0 = 1$ ,  $\sin(-x) = -\sin x$  og  $\cos(-x) = \cos x$ , og dessuten at vi har reglene  $(\sin x)' = \cos x$  og  $(\cos x)' = -\sin x$ .

**18.** Vis at  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  for alle  $x \in \mathbf{R}$ . (Hint: La  $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$ . Vis at  $f'(x) = 0$ .)

**19.** Bevis summeformlene (1) og (2) i teorem 10.0.0 ved å vise at funksjonen

$$f(x) = [\sin(x + y) - \sin x \cos y - \cos x \sin y]^2 + [\cos(x + y) - \cos x \cos y + \sin x \sin y]^2$$

oppfyller  $f(0) = 0$  og  $f'(x) = 0$  for alle  $x$ , slik at  $f(x) = 0$  for alle  $x$ . Dermed må begge hakeparentesene være 0! Forklar hvordan de øvrige formelene i teorem 10.0.0 nå kan utledes.

**20.** I denne oppgaven skal vi sirkle oss inn mot en ny definisjon av tallet  $\pi$ .

a) Bruk feilestimatet for alternerende rekker til å vise at vi for alle  $x > 0$  har

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$$

$$1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

b) Bruk punkt a til å forklare at  $\cos x$  har et nullpunkt mellom de minste positive løsningene av

(i)  $1 - \frac{x^2}{2} = 0$

og

(ii)  $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} = 0.$

c) Vis at det fins  $a \in (\sqrt{2}, \sqrt{3})$  slik at  $\cos a = 0$ .

d) Bruk

$$x - x^2/6 < \sin x$$

til å vise at  $\sin x > 0$  for  $x \in (0, \sqrt{6})$ .

e) Bruk d) til å vise at  $\cos x$  kan ha kun *ett* nullpunkt i intervallet

$$(\sqrt{2}, \sqrt{3}).$$

Det følger nå at  $\cos x$  har et unikt nullpunkt i

$$a \in (\sqrt{2}, \sqrt{3}).$$

Siden  $\cos 0 = 1$ , er det videre klart at  $\cos x > 0$  for  $x \in [0, a)$ .

f) Bruk teorem 10.0.0 til å vise at

$$\sin(2a) = 0,$$

samt at dersom  $b$  er den minste positive roten til  $\sin x$ , så er

$$\cos(b/2) = 0.$$

Konkluder med at  $\sin x > 0$  for  $x \in (0, 2a)$ .

Vi vet nå at det fins et minste reelt tall  $x > 0$  slik at  $\sin x = 0$ . Dette tallet kan vi definere som  $\pi$ . Ved forrige oppgave er

$$\pi \in (2\sqrt{2}, 2\sqrt{3}) \approx 2.82, 3.46.$$

Altså  $\pi \approx 3$ . Man kan skaffe seg bedre anslag for  $\pi$  ved å bruke ymse rekketriks og feilestimater.

**21.** Bruk summeformlene til å vise at

a)  $\sin \pi = 0$  og  $\cos(\pi/2) = 0$

b)  $\sin x > 0$  for  $x \in (0, \pi)$

c)  $\cos x > 0$  for  $x \in (-\pi/2, \pi/2)$

d)  $\sin(x + 2\pi) = \sin x$  for alle  $x \in \mathbf{R}$

e)  $\cos(x + 2\pi) = \cos x$  for alle  $x \in \mathbf{R}$

Med den informasjonen vi nå har, kan vi skissere grafene til  $\sin x$  og  $\cos x$ . Vi kan faktisk tegne grafene svært *nøyaktig* hvis vi vil, ved maskinell utregning av funksjonsverdier basert på potensrekkene. (Husk feilestimatet for alternerende rekker.)

**22.** Vis at punktet  $(\cos \theta, \sin \theta)$  ligger på enhetssirkelen for alle  $\theta \in \mathbf{R}$ . Vis så at hvis  $(a, b)$  er et punkt på enhetssirkelen, så fins et unikt tall  $\theta \in [0, 0 + 2\pi)$  slik at  $(a, b) = (\cos \theta, \sin \theta)$ .

**23.** La  $\theta \in [0, 2\pi)$ . Vis at lengden av buen på enhetssirkelen

fra  $(1, 0)$  til punktet  $(\cos \theta, \sin \theta)$  er lik  $\theta$ , når r vi beveger oss mot klokken. (Hint: Bruk formelen for graflengde. Substituer  $u = \sin \theta$ .)

**24.** Vis at arealet av enhetssirkelen er  $\pi$  ut fra vår nye definisjon. (Hint: Arealet er to ganger anarealet under grafen til  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$  på  $x \in [-1, 1]$ . Substituer  $u = \sin \theta$  i integralet.)

# Kapittel 5

## Koordinatsystemer og beskrivelser

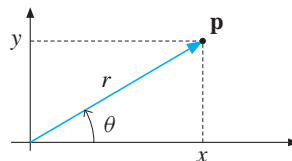
---

*Dette kapitlet bygger på kapittel 1, seksjon 2.11 og 2.12 samt kapitlene 1–7 og 10 fra MIP.*

---

## 5.1 Polarkoordinater

For å angi hvor et punkt  $\mathbf{p} = (x, y)$  i planet ligger, har vi hittil brukt koordinatene  $x$  og  $y$ . Et alternativ er å oppgi avstanden  $r$  fra  $\mathbf{p}$  til origo, samt vinkelen  $\theta$  fra den positive delen av  $x$ -aksen til vektoren  $\mathbf{p}$ .



Størrelsene  $r$  og  $\theta$  kalles **polarkoordinater** til punktet  $\mathbf{p}$ . Figuren gir at

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Vinkelen  $\theta$  måles i radianer, og regnes med positiv omløpsretning mot klokken. Vi tillater  $\theta$  å være både negativ og større enn  $2\pi$ . Eksempel: Punktet  $(x, y) = (1, 1)$  kan angis i polarkoordinater både som  $r = \sqrt{2}$ ,  $\theta = \pi/4$ , som  $r = \sqrt{2}$ ,  $\theta = 9\pi/4$  og som  $r = \sqrt{2}$ ,  $\theta = -7\pi/4$ . Tegn en figur og tenk på det. Merk at  $r = 0$  tilsvarer origo, uansett verdi av  $\theta$ .

### Polarkurver

Mengden av alle punkter i planet som er slik at polarkoordinatene  $r$  og  $\theta$  oppfyller en gitt likning på formen

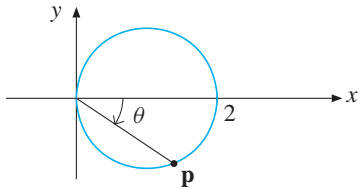
$$r = f(\theta),$$

kalles en **polarkurve**. Her skal  $f$  være en funksjon av én variabel  $\theta$ .

**Eksempel 1** Finn likningen for sirkelen  $(x - 1)^2 + y^2 = 1$  i polarkoordinater, dvs. skriv den som polarkurve.

**Løsning** Vi setter inn  $x = r \cos \theta$  og  $y = r \sin \theta$ , og får

$$\begin{aligned} (r \cos \theta - 1)^2 + (r \sin \theta)^2 &= 1 \\ r^2 \cos^2 \theta - 2r \cos \theta + 1 + r^2 \sin^2 \theta &= 1 \\ r^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) &= 2r \cos \theta \\ r^2 &= 2r \cos \theta \\ \text{dvs.} \quad r &= 2 \cos \theta. \end{aligned}$$



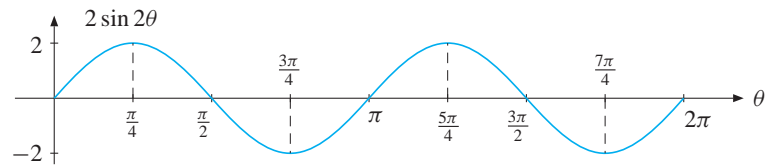
Figur 5.1.1

I siste linje forkortet vi  $r$ , det eneste vi eventuelt kunne ha mistet ved dette er punktet origo (der er  $r = 0$ ). Men origo er inkludert i likningen  $r = 2 \cos \theta$  også, f.eks. gir  $\theta = \frac{\pi}{2}$  at  $r = 0$ . For å gjennomløpe sirkelen en gang kan vi la  $\theta$  ligge i intervallet  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ . Tenk deg at du starter med  $\theta = -\frac{\pi}{2}$  (det gir  $r = 2 \cos(-\frac{\pi}{2}) = 0$ ) og så lar  $\theta$  øke oppover mot null. Da øker  $r = 2 \cos \theta$  med  $\theta$  slik at punktet  $\mathbf{p}$  med polarkoordinater  $(r, \theta)$  følger sirkelen nøyaktig. Når  $\theta$  er kommet opp til null, er  $r = 2 \cos 0 = 2$ . Så avtar  $r$  til null igjen når  $\theta$  nærmer seg  $\frac{\pi}{2}$ . Se figur 5.1.1. ■

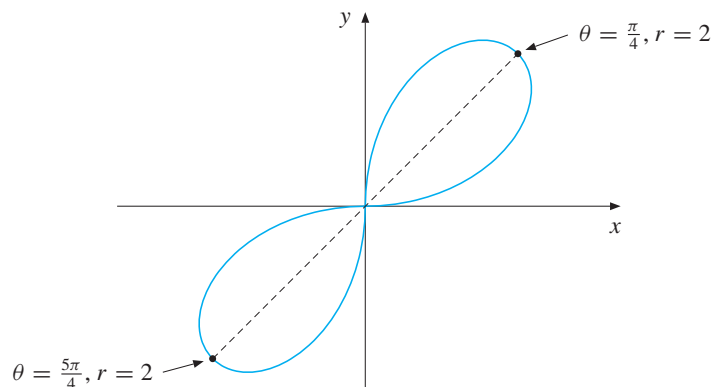
For å eksplisitt skille dem fra polarkoordinatene, kalles ofte de vanlige koordinatene  $x, y$  til et punkt  $\mathbf{p}$  for de *kartesiske* koordinatene til  $\mathbf{p}$ . De kalles også for **standardkoordinatene** til  $\mathbf{p}$ . I eksemplet over sier man således at  $(x - 1)^2 + y^2 = 1$  er likningen for sirkelen i kartesiske koordinater, mens  $r = 2 \cos \theta$  er likningen for sirkelen i polarkoordinater.

**Eksempel 2** Vi skal skissere polarkurven  $r = 2 \sin 2\theta$ .

Til hjelp er det lurt å tegne grafen til  $\theta$ -uttrykket:



Kurven blir som på figur refpolkurveeksto. Merk at for  $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$  og  $\theta \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$  er  $r$  negativ, og da får vi ingen kurve. ■



Figur 5.1.2

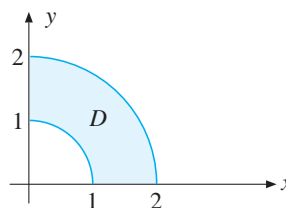
## Beskrivelser av områder i polarkoordinater

Å finne en *beskrivelse* av et gitt område  $D \subseteq \mathbf{R}^2$  i polarkoordinater, betyr å angi hvilke verdier av  $r$  og  $\theta$  som tilsvarer punktene i området. Man begrenser seg her alltid til ett omløp av  $\theta$ , slik at hvert punkt i det indre av  $D$  blir angitt ved kun én vinkel. Vanligvis plukkes vinkelangivelsene fra intervallet  $\theta \in [0, 2\pi]$  eller intervallet  $[-\pi, \pi]$ .

**Eksempel 3** La  $D$  være mengden av punkter  $(x, y)$  i planet som oppfyller kravene

$$1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \quad x \geq 0 \quad \text{og} \quad y \geq 0.$$

Vi skal beskrive  $D$  i polarkoordinater. Området  $D$  ser slik ut:



Forklaring: Uttrykket  $x^2 + y^2$  er kvadratet av avstanden fra  $(x, y)$  til origo. Betingelsen  $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$  sier dermed at  $(x, y)$  skal ligge mellom de to sirklene  $x^2 + y^2 = 1$  og  $x^2 + y^2 = 4$ . Betingelsene  $x, y \geq 0$  sier at vi skal begrense oss til første kvadrant. Så i polarkoordinater kan  $D$  beskrives slik:

$$r \in [1, 2], \quad \theta \in [0, \pi/2]. \quad \blacksquare$$

### 5.1 Oppgaver

**1.** Angi polarkoordinater til punktene i planet med følgende kartesiske koordinater:

- a)  $(2, 0)$       b)  $(0, 4)$       c)  $(0, -1)$   
d)  $(1, 1)$       e)  $(1, \sqrt{3})$       f)  $(-3, 4)$

**2.** Angi de kartesiske koordinatene til punktene i planet med følgende polarkoordinater:

- a)  $r = 1, \theta = \pi$       b)  $r = \sqrt{2}, \theta = 5\pi/4$

**3.** Skisser følgende polarkurver:

- a)  $r = 4 \sin \theta$       b)  $r = 1 + \cos \theta$   
c)  $r = 1 - \sin \theta$       d)  $r^2 = 4 \cos \theta$

e)  $r^2 = \sin 3\theta$       f)  $r = \theta$

**4.** Skisser polarkurven  $r = \sqrt{\sin \theta}$  for  $\theta \in [0, \pi]$ , og finn likningen for kurven uttrykt ved rektangulære koordinater  $x$  og  $y$ .

**5.** I hvert punkt under er gitt en beskrivelse av et område  $D \subseteq \mathbf{R}^2$  i rektangulære koordinater. Beskriv området  $D$  i polarkoordinater.

- a)  $x^2 + y^2 \leq 1$       b)  $0 \leq x \leq y$       c)  $x > 1$   
d)  $y \in [0, x], x^2 + y^2 \leq 4$

**6.** La  $a > 0$  være en konstant. Finn likningen for polarkurven  $r = a|1 - r \cos \theta|$  i rektangulære koordinater. (Hint: Avhengig av verdien til  $a$  er kurven en ellipse, en parabel eller en hyperbel.)

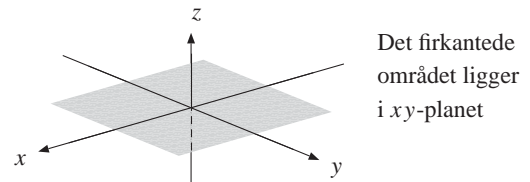
## 5.2 Noen annengradsflater i rommet

I denne seksjonen skal vi se eksempler på noen delmengder av  $\mathbf{R}^3$  som med en fellesbetegnelse kalles **annengradsflater** i rommet. Flatene vi skal se på er alle definert ved en likning på formen

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0,$$

der  $A, B, \dots, G$  er reelle tall slik at enten  $A, B$  eller  $C$  er ulik 0.

Med *xy-planet* i  $\mathbf{R}^3$  mener man planet utspent av  $x$ -aksen og  $y$ -aksen. Dette planet består av alle punkter  $(x, y, z)$  slik at  $z = 0$ . Tilsvarende består  $xz$ -planet av punktene der  $y = 0$ , og  $yz$ -planet av punktene der  $x = 0$ . Med fellesbetegnelse kalles  $xy$ -planet,  $xz$ -planet og  $yz$ -planet for **koordinatplanene**.

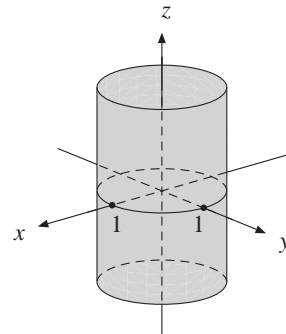


### Sylindere

Det enkleste eksempelet på en sylinder i rommet er mengden av alle punkter  $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$  slik at

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Denne flaten er vist på figuren under.

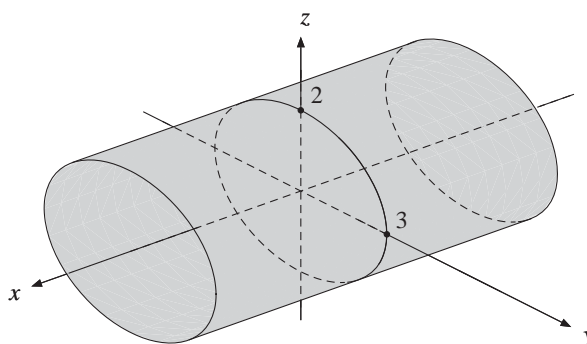


For å skjønne hvorfor flaten blir sånn, merk at likningen ovenfor ikke stiller *noen krav* til  $z$ -koordinaten i punktet  $(x, y, z)$ . Eneste krav er at  $x$ -koordinaten og  $y$ -koordinaten skal oppfylle  $x^2 + y^2 = 1$ , dvs. at punktet  $(x, y)$  skal ligge på sirkelen med radius 1 om origo i  $xy$ -planet.

Flaten på forrige side er et eksempel på det man kaller en *sirkulær* sylinder. Terminologien henspiller på at tverrsnittet av sylinderen vinkelrett på lengdeaksen er en sirkel. Imidlertid kan vi også ha sylinderer som ikke er sirkulære. Mengden av alle  $(x, y, z)$  i rommet slik at

$$\frac{y^2}{3^2} + \frac{z^2}{2^2} = 1$$

kalles en *elliptisk* sylinder. Kravet til punktet  $(x, y, z)$  er her at  $(y, z)$  skal ligge på ellipsen  $(y/3)^2 + (z/2)^2 = 1$  i  $yz$ -planet. Merk at sylinderens lengdeakse i dette tilfellet er  $x$ -aksen.



## Sfærer

Hvis  $\mathbf{p} = (a, b, c)$  er et gitt punkt i  $\mathbf{R}^3$  og  $r \geq 0$  er et reelt tall, kalles mengden av alle punkter  $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$  som ligger i avstand  $r$  fra punktet  $\mathbf{p}$  for *sfæren* med sentrum  $\mathbf{p}$  og radius  $r$ .

Siden avstanden fra  $\mathbf{p} = (a, b, c)$  til  $\mathbf{q} = (x, y, z)$  er lengden av vektoren

$$\mathbf{q} - \mathbf{p} = [x - a, y - b, z - c]$$

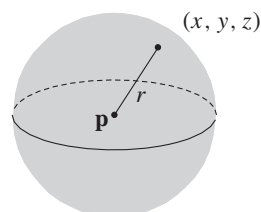
gir definisjonen av vektorlengde at sfæren består av alle punkter

$\mathbf{q} = (x, y, z)$  som oppfyller

$|\mathbf{q} - \mathbf{p}| = [(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2]^{1/2} = r$ . Kvadrerer vi begge sider av siste likhet, fås likningen for sfæren med sentrum  $(a, b, c)$  og radius  $r$ :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2.$$

Hvis f.eks. sentrum er origo og  $r = 1$ , blir likningen  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .



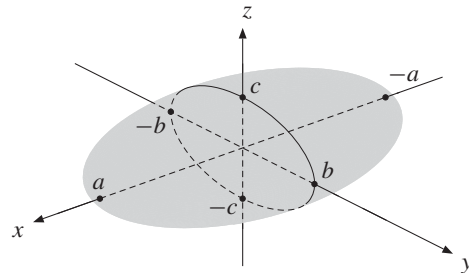


## Ellipsoider

Som sfærene er rommets analogi til sirker i planet, er ellipsoider rommets analogi til *ellipser*. Standardlikningen for en ellipsoide med sentrum  $(h, k, \ell)$  er

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} + \frac{(z-\ell)^2}{c^2} = 1.$$

Her er  $a, b, c, h, k, \ell$  gitte reelle tall. Merk analogien med likningen for en ellipse på s. 94. Tilfellet  $(h, k, \ell) = (0, 0, 0)$ , altså sentrum origo, er vist på figuren under. For å overbevise deg om at flaten blir slik, kan du velge et konkret eksempel og kikke på hva som skjer når du snitter flaten med ulike planer parallelle med koordinatplanene. Se oppgave 6.



### 5.2 Oppgaver

1. Finn likningen for sfæren som har sentrum  $(2, 0, 0)$  og radius 2. Lag en figur som viser hvordan sfæren ligger plassert.
2. Lag en figur som viser hvordan sfæren med likning  $(x-3)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 4$  ligger plassert.
3. Lag en skisse som viser hvordan cylinderen  $x^2 + z^2 = 4$  ligger plassert.
4. Bestem likningen for den ellipsoiden som går gjennom punktene  $(4, 0, 0)$ ,  $(-4, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, -1, 0)$ ,  $(0, 0, 3)$  og  $(0, 0, -3)$ .
5. Finn likningen for ellipsoiden som går gjennom følgende seks punkter:  $(2, 0, -2)$ ,  $(2, 0, 2)$ ,  $(2, 1, 0)$ ,  $(2, -1, 0)$ ,  $(4, 0, 0)$  og  $(0, 0, 0)$ . Skisser ellipsoiden.
6. Betrakt ellipsoiden  $S$  som er gitt ved likningen  $(x^2/9) + (y^2/4) + z^2 = 1$ . Finn likningene for snittet mellom  $S$  og følgende plan:

- (i)  $z = 0$       (ii)  $y = 0$       (iii)  $x = 0$   
 (iv)  $z = 1/2$     (v)  $y = 1$       (vi)  $x = 2$

Skisser ellipsoiden med snittkurvene markert. Hvilken type kurver blir snittkurvene?

7. Flaten  $S$  gitt ved  $z = 9 - x^2$  kalles en *parabolisk sylinder*. Skisser  $S$ .
8. Flaten  $S$  gitt ved  $x^2 + y^2 = z^2$  kalles en *dobbel-kjegle*. Skisser  $S$ . (Hint: Kikk f.eks. på snittet med koordinatplanene.)
9. Flaten  $S$  gitt ved  $z = y^2 - x^2$  kalles en *hyperbolsk paraboloid*. Skisser  $S$ . (Hint: Se på snittet med planene  $z = 0$ ,  $z = 1$  etc.)
10. Flaten  $S$  gitt ved  $z = (x/a)^2 + (y/b)^2$  (der  $a, b \neq 0$ ) kalles en *elliptisk paraboloid*. Skisser  $S$ .

## 5.3 Sylinderkoordinater og kulekoordinater

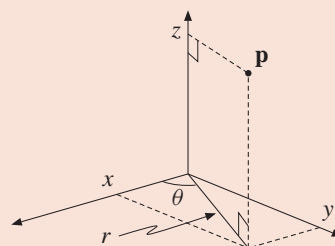
I standardkoordinatsystemet på  $\mathbf{R}^3$  angir vi et punkt  $\mathbf{p} = (x, y, z)$  ved å bruke  $x$ ,  $y$  og  $z$ . Vi skal nå se på to alternative koordinatsystemer.

### Sylinderkoordinater $r, \theta, z$

I sylinderkoordinater angir vi posisjonen til  $\mathbf{p} = (x, y, z)$  ved å oppgi polarkoordinatene til punktet  $(x, y)$  i planet, samt koordinaten  $z$ . Vi kan altså uttrykke sammenhengen med standardkoordinatene  $x, y, z$  slik:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

Merk at  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

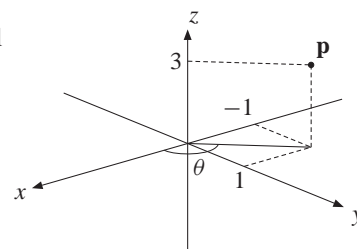


**Eksempel 1** Sylinderkoordinatene til punktet  $(x, y, z) = (-1, 1, 3)$  er

$$r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\theta = \frac{3\pi}{4}$$

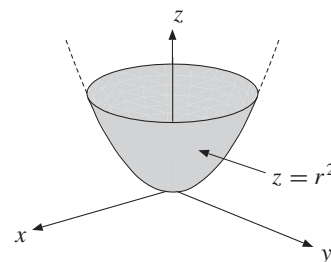
$$z = 3. \quad \blacksquare$$



**Eksempel 2** Likningen for flaten  $z = x^2 + y^2$  uttrykt i sylinderkoordinater er

$$z = r^2.$$

Denne flaten kalles en *paraboloide*, og den er vist på figuren til høyre. For å forstå hvorfor flaten ser slik ut, merk at innsetting av  $y = 0$  i likningen  $z = x^2 + y^2$  gir  $z = x^2$ . Så snittet av flaten med  $xz$ -planet er parabellen  $z = x^2$ . Snittet med  $yz$ -planet er en tilsvarende parabel.  $\blacksquare$



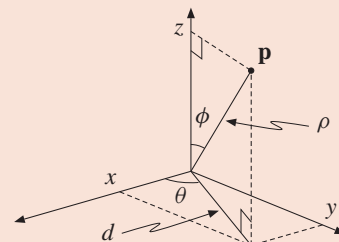
**Kulekoordinater**  $\rho, \theta, \phi$ 

Kulekoordinatene  $\rho, \theta, \phi$  til et punkt  $\mathbf{p} = (x, y, z)$  i rommet er gitt ved at  $\rho$  er avstanden fra  $\mathbf{p}$  til origo,  $\phi$  er vinkelen mellom den positive  $z$ -aksen og vektoren  $\mathbf{p}$ , og  $\theta$  er polarvinkelen til punktet  $(x, y)$  i planet. Da fås

$$\begin{cases} x = \rho \sin \phi \cos \theta \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{cases}$$

Begrunnelse: Vi får  $z = \rho \cos \phi$ , og dessuten er  $d = \rho \sin \phi$ . Så  $x = d \cos \theta$ , og  $y = d \sin \theta$ .

Merk at  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .



Vinkelen  $\phi$  ligger alltid i intervallet  $[0, \pi]$ , mens vinkelen  $\theta$  regnes med fortegn som i polarkoordinater.

**Eksempel 3** Punktet  $(x, y, z) = (0, 2, 0)$  har kulekoordinater  $\rho = 2$ ,  $\theta = \pi/2$  og  $\phi = \pi/2$ . (Tenk på figuren i boksen ovenfor.) ■

**Eksempel 4** Sfæren  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  er i kulekoordinater gitt ved den enkle likningen  $\rho = 1$ , fordi den består av alle punkter i avstand 1 fra origo. ■

### 5.3 Oppgaver

1. Finn sylinderkoordinater til punktene:

- a)  $(0, 1, 2)$    b)  $(2, 2, 1)$    c)  $(-\sqrt{3}, -1, 2)$

2. Finn standardkoordinatene  $(x, y, z)$  til punktene med følgende sylinderkoordinater:

- a)  $r = z = 2, \theta = \pi$   
b)  $r = 2, \theta = 3\pi/2, z = 0$

3. Finn likningen for disse annengradsflatene i  $\mathbf{R}^3$  i sylinderkoordinater. Skisser flatene.

- a)  $z = 4 - x^2 - y^2$    b)  $x^2 + y^2 = 4$   
c)  $y^2 + z^2 = 1$    d)  $z = x^2 - y^2$   
e)  $x + y = 0$    f)  $x + y + z = 0$

4. Finn likningen for sfæren med sentrum i origo og radius 2 i sylinderkoordinater.  $(x, y, z)$ .

5. Finn kulekoordinater til følgende punkter:

- a)  $(0, 2, 0)$    b)  $(0, 2, 2)$    c)  $(2, 0, -2)$   
d)  $(0, 0, -5)$    e)  $(0, 0, 4)$    f)  $(0, -1, \sqrt{3})$

6. Finn standardkoordinatene  $(x, y, z)$  til punktene med følgende kulekoordinater:

- a)  $\rho = 3, \theta = \pi, \phi = \pi/2$   
b)  $\rho = 1, \theta = \sqrt{2}, \phi = \pi$

7. Finn likningen for følgende flater i kulekoordinater, og skisser flatene.

- a)  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$    b)  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$   
c)  $z = x^2 + y^2$    d)  $(x - 1)^2 + z^2 = 1$

8. Skisser flaten gitt ved  $\rho = a \sin \phi$  i kulekoordinater, der  $a > 0$  er en konstant. Finn likningen for flaten i standardkoordinater

## 5.4 Omegner og åpne mengder

De fleste begrepene vi skal ta for oss i denne seksjonen er tidligere introdusert for mengden  $\mathbf{R} = \mathbf{R}^1$ . Vi skal nå generalisere disse begrepene til å kunne brukes i  $\mathbf{R}^n$  for vilkårlig  $n \geq 1$ .

### Produktet av mengder

Hvis  $A_1, \dots, A_n$  er delmengder av  $\mathbf{R}$ , definerer vi *produktet* av dem som mengden  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \subseteq \mathbf{R}^n$  definert ved

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{ (a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n \mid a_i \in A_i \text{ for hver } i \}.$$

Videre innfører vi følgende konvensjon: Hvis  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$  og  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m) \in \mathbf{R}^m$ , så betrakter vi objektet  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  som identisk med elementet  $(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m) \in \mathbf{R}^{n+m}$ . Eksempel: Hvis  $\mathbf{a} = (2, 0)$  og  $\mathbf{b} = (1, 1, 5)$ , så er  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (2, 0, 1, 1, 5)$ . Fra definisjonen av  $A \times B$  i seksjon 1.5 fås da at hvis  $A \subseteq \mathbf{R}^n$  og  $B \subseteq \mathbf{R}^m$ , så er  $A \times B \subseteq \mathbf{R}^{n+m}$ .

**Eksempel 1** Hvis  $A = [0, 3]$ ,  $B = [0, 1]$  og  $C = [0, 2]$ , så er produktet  $A \times B \times C$  den rettvinklede kassen i  $\mathbf{R}^3$  bestående av alle punkter  $(x, y, z)$  slik at  $x \in [0, 3]$ ,  $y \in [0, 1]$  og  $z \in [0, 2]$ . ■

### Kuler og rektangler

La  $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^n$ , og la  $\epsilon > 0$ . Med den **åpne kulen** med sentrum  $\mathbf{p}$  og radius  $\epsilon$  menes mengden

$$K = \{ \mathbf{q} \in \mathbf{R}^n \mid |\mathbf{q} - \mathbf{p}| < \epsilon \}$$

Så kulen  $K$  består av alle punkter som har avstand mindre enn  $\epsilon$  til  $\mathbf{p}$ . Se figur 10.0.0.

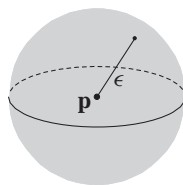
10.0.0

Tilsvarende definerer vi den **lukkede kulen** med sentrum  $\mathbf{p}$  og radius  $\epsilon$  ved å bytte “<” med “≤” i definisjonen ovenfor.

Med et **åpent rektangel** i  $\mathbf{R}^n$  menes en mengde på formen

$$R = \langle a_1, b_1 \rangle \times \dots \times \langle a_n, b_n \rangle.$$

Tilsvarende definerer vi et **lukket rektangel** ved å bytte ut de åpne intervallene  $\langle a_j, b_j \rangle$  med lukkede  $[a_j, b_j]$ . Rektangler i  $\mathbf{R}^2$  er rektangler med sider parallelle med koordinataksene, og rektangler i  $\mathbf{R}^3$  er kasser med sider parallelle med koordinatplanene. Se figur 5.4.2. Med **sentrum** i rektanget  $R$  menes punktet  $(\frac{1}{2}(a_1 + b_1), \dots, \frac{1}{2}(a_n + b_n))$ .



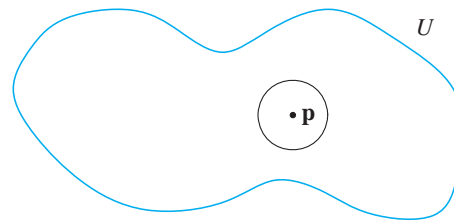
Figur 5.4.1



Figur 5.4.2 Rektangler

### Omegner. Åpne og lukkede mengder

En mengde  $U \subseteq \mathbf{R}^n$  kalles en *omegn* om punktet  $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^n$  hvis  $U$  inneholder en åpen kule med sentrum  $\mathbf{p}$ . Se figur 5.4.3.



Figur 5.4.3 Mengden  $U$  er en omegn om  $\mathbf{p}$

Et punkt  $\mathbf{p}$  kalles et *indre punkt* i en mengde  $M \subseteq \mathbf{R}^n$  hvis  $M$  er en omegn om  $\mathbf{p}$ . Mengden av indre punkter i  $M$  kalles *det indre* av  $M$ , og skrives  $M^*$ . Med *randen*  $\partial M$  til  $M$  menes mengden av punkter  $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^n$  som verken ligger i det indre av  $M$  eller i det indre av  $\mathbf{R}^n \setminus M$ . Unionen  $M \cup \partial M$  kalles *tillukningen* til  $M$ . Hvis  $M^* = M$ , kalles  $M$  *åpen*. Hvis  $\mathbf{R}^n \setminus M$  er åpen, kalles  $M$  *lukket*. Et punkt  $x \in \mathbf{R}^n$  kalles et **opphøringspunkt** for mengden  $M$  hvis alle omegner om  $x$  inneholder minst ett punkt fra  $M \setminus \{x\}$ . Hvis  $x \in M$  og det finnes en omegn om  $x$  som ikke inneholder andre punkter fra  $M$  enn  $x$  selv, kalles  $x$  **isolert** i  $M$ .



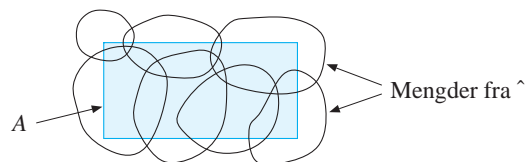
Det går an å overbevise seg om at med disse definisjonene av "åpen" og "lukket" er de "åpne" kulene og rektangelene fra forrige avsnitt virkelig åpne, og de "lukkede" kulene og rektangelene er virkelig lukkede. (Hvis du vil ha et formelt bevis, så bruk trekantulikheten fra teorem 10.0.0.)

## Begrensethet og kompakthet

La  $M$  være en delmengde av  $\mathbf{R}^n$ . Hvis der finnes et lukket rektangel  $R \subseteq \mathbf{R}^n$  slik at  $M \subseteq R$ , kalles  $M$  *begrenset*. Hvis  $M$  er både lukket og begrenset, kalles  $M$  *kompakt*.

**Eksempel 2** Mengden  $D = [0, 1] \times [0, 1)$  er en begrenset delmengde av  $\mathbf{R}^2$ . Vi kan nemlig lett finne et lukket rektangel  $R$  som inneholder den, ta f.eks.  $R = [-1, 2] \times [-1, 2]$ . Men  $D$  er ikke kompakt, siden den ikke er lukket. Derimot er  $K = [0, 1] \times [0, 1]$  både lukket og begrenset, det vil si kompakt. ■

Til slutt i denne seksjonen skal vi se på et teoretisk resultat om kompakte mengder. Vi trenger da følgende terminologi. En samling  $O$  av mengder kalles en *overdekning* av mengden  $A$  hvis hvert punkt  $\mathbf{p} \in A$  er med i en av mengdene fra  $O$ . Vi sier også at  $O$  *dekker* mengden  $A$ . Hvis alle mengdene i  $O$  er åpne, kalles  $O$  en *åpen overdekning* av  $A$ .



### Teorem 1 Kompakthetsteoremet

La  $K \subseteq \mathbf{R}^n$  være kompakt, og la  $O$  være en åpen overdekning av  $K$ . Da fins et endelig utvalg  $U_1, \dots, U_k$  av mengder fra  $O$  som også dekker mengden  $K$ .

Du finner beviset for dette teoremet i den stjernemerkeede seksjonen 5.6.

## 5.4 Oppgaver

1. Vis at  $M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0\}$  er en omegn om punktet  $(2, 2)$ . Hint: Finn en åpen kule  $U$  med sentrum  $p$  slik at  $U \subseteq M$ .
2. Vis at  $M = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x, y, z > 0\}$  er en omegn om punktet  $(1/2, 2, 1)$ .
3. Avgjør hvilke av følgende delmengder av  $\mathbf{R}^2$  som er åpne, lukkede og/eller kompakte.
  - a)  $\{(x, y) \mid y \leq 0\}$
  - b)  $\{(x, y) \mid 0 < x < 1\}$
  - c)  $\{(x, y) \mid 0 \leq x < 1\}$
  - d)  $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

## 5.5 Generelt om koordinatsystemer

I seksjon 5.1 og 5.3 studerte vi eksempler på alternative koordinatsystemer i planet og rommet. I denne seksjonen skal vi se på hva man mener med begrepet "koordinatsystem" mer generelt. Underveis skal jeg også introdusere litt ny notasjon i forbindelse med funksjoner.

For våre formål er det nok å si at en *koordinattransformasjon* i  $\mathbf{R}^n$  er en kontinuerlig funksjon

$$T; \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n.$$

Hvis  $T(u_1, \dots, u_n) = (x_1, \dots, x_n)$ , sier man at  $u_1, \dots, u_n$  er *koordinatene* til punktet  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$  i det gitte koordinatsystemet. Disse kan brukes som en angivelse av hvor  $(x_1, \dots, x_n)$  ligger.

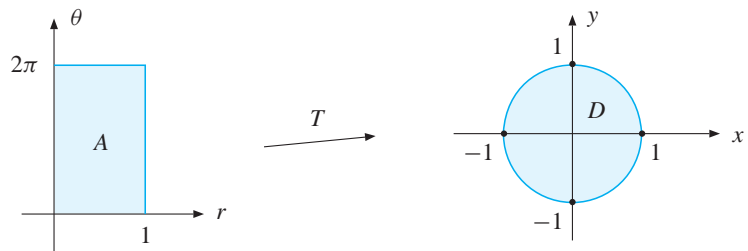
**Eksempel 1** Polarkoordinater i planet tilsvare transformasjonen  $T$  gitt ved

$$T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta),$$

med definisjonsmengden  $D_T = [0, \infty) \times (-\infty, \infty)$ . For eksempel er

$$T(1, \frac{\pi}{2}) = (1 \cdot \cos \frac{\pi}{2}, 1 \cdot \sin \frac{\pi}{2}) = (0, 1)$$

noe som tilsvare at polarkoordinatene til punktet  $(x, y) = (0, 1)$  er  $r = 1$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . Videre: Området  $A = [0, 1] \times [0, 2\pi)$  i definisjonsmengden til  $T$  tilsvare området  $D$  gitt ved  $x^2 + y^2 \leq 1$ .



Som antydnet på figuren, kan vi tenke oss at funksjonen  $T$  går fra " $r\theta$ -planet" til " $xy$ -planet". Selvsagt er begge disse "planene" egentlig lik  $\mathbf{R}^2$ , forskjellen er bare at vi skriver standardkoordinatene  $(r, \theta)$  istedenfor  $(x, y)$  i det ene av dem. Figuren ovenfor svarer til at området  $D$  kan beskrives ved  $r \in [0, 1]$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$  i polarkoordinater. ■

## Litt ny funksjonsnotasjon

Man uttrykker gjerne sammenhengen på figuren forrige side ved å si at  $T$  **avbilder** området  $A$  på området  $D$ , og man skriver

$$T(A) = D.$$

Generelt: Hvis  $f$  er en funksjon og  $A \subseteq D_f$ , definerer man  $f(A)$  som mengden av funksjonsverdier svarende til punktene i  $A$ , dvs.

$$f(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{f(x) \mid x \in A\}.$$

Vi sier også at  $f$  *avbilder*  $A$  på mengden  $f(A)$ . Merk at  $f(D_f) = V_f$ .

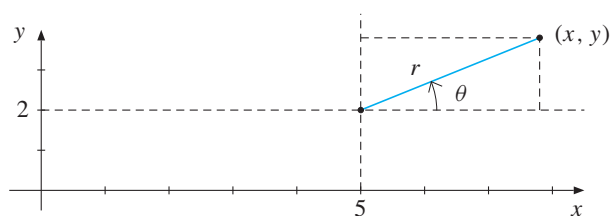
Sylinderkoordinater og kulekoordinater i  $\mathbf{R}^3$  kan oppfattes som transformasjoner  $T$  ved samme tankegang som vi brukte i eksemplet med polarkoordinater. F.eks. svarer sylinderkoordinater til

$$T(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z).$$

## Varianter av kjente koordinatsystemer

De viktigste koordinatsystemene for vårt bruk vil være de systemene vi allerede har sett på: Standardkoordinatene, polarkoordinater i planet, sylinderkoordinater og kulekoordinater i rommet. Imidlertid får man også ofte bruk for å konstruere "varianter" av disse koordinatsystemene. F.eks. kan man la noen av aksene bytte rolle, eller man kan bruke et annet punkt enn origo som "sentrum". Her er et eksempel på det siste.

**Eksempel 2** Vi kan lage et polarkoordinatsystem  $r, \theta$  med sentrum i punktet  $(5, 2)$  ved å la  $r$  være avstanden fra  $(x, y)$  til  $(5, 2)$ , og la  $\theta$  være vinkelen vist på figuren under.



Fra figuren ser vi at

$$\begin{cases} x - 5 = r \cos \theta \\ y - 2 = r \sin \theta \end{cases} \quad \text{dvs.} \quad \begin{cases} x = 5 + r \cos \theta \\ y = 2 + r \sin \theta. \quad \blacksquare \end{cases}$$



## Beskrivelser i gitte koordinatsystemer

Å finne en *beskrivelse* av et område  $D \subseteq \mathbf{R}^n$  i et oppgitt koordinatsystem  $(u_1, \dots, u_n)$  betyr å angi hvilke verdier av koordinatene  $u_1, \dots, u_n$  som tilsvarer punktene i området  $D$ . Hvis

$$T; \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$$

er transformasjonen tilhørende koordinatsystemet, er dette ensbetydende med å finne et område  $A$  i “ $(u_1, \dots, u_n)$ -rommet” slik at

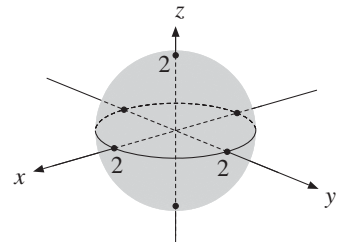
$$T(A) = D.$$

Vanligvis prøver vi å gjøre beskrivelsen *injektiv*, dersom det er praktisk: Vi prøver altså å velge  $A$  slik at det for hvert punkt i  $\mathbf{x} \in D$  finnes kun ett koordinatpunkt i  $\mathbf{u} \in A$  slik at  $T(\mathbf{u}) = \mathbf{x}$ . I mange tilfeller blir det imidlertid for sært å operere sånn, og det er ganske vanlig at “naturlige” beskrivelser ikke er injektive på *randen* av området  $A$ . Imidlertid er de vanligvis injektive når man begrenser dem til det indre av  $A$ . Eksemplet under illustrerer dette.

**Eksempel 3** La  $D \subseteq \mathbf{R}^3$  være mengden av alle  $(x, y, z)$  slik at  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ . Vi skal beskrive  $D$  i kulekoordinater. Tja,  $D$  er den massive kulen med sfæren  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  som overflate, se figur under.

I kulekoordinater kan  $D$  beskrives ved

$$\begin{cases} \rho \in [0, 2] \\ \phi \in [0, \pi] \\ \theta \in [0, 2\pi). \end{cases}$$



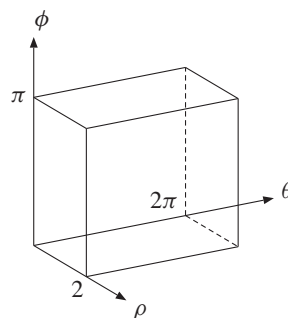
Transformasjonen  $T$  tilsvarende kulekoordinatene er

$$T(\rho, \theta, \phi) = (\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi).$$

Sammenlikner vi denne beskrivelsen med definisjonen øverst på siden, er mengden  $A$  her området i  $\rho\theta\phi$ -rommet gitt ved

$$\rho \in [0, 2], \quad \phi \in [0, \pi], \quad \text{og} \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

Området  $A$  er vist på figuren under. Merk at transformasjonen  $T$  ikke er injektiv på hele  $A$ : Alle punkter med  $\rho = 0$  sendes til  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ . Men  $T$  er injektiv på det indre av  $A$ . ■



## 5.5 Oppgaver

1. Beskriv følgende områder  $B \subseteq \mathbf{R}^2$  i polarkoordinater:

- $B = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1 \text{ og } x \leq 0\}$
- $B = \{(x, y) \mid y \leq x \text{ og } x^2 + y^2 > 4\}$

2. Beskriv følgende områder  $B \subseteq \mathbf{R}^3$  i enten sylinderkoordinater eller kulekoordinater. (Velg selv hvilket koordinatsystem du vil bruke.)

- $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \in [1, 4], z \geq 0\}$
- $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$
- $\{(x, y) \mid 0 \leq z \leq 9 - x^2 - y^2\}$

3. Finn et koordinatsystem  $u, v$  i planet slik at sirkelskiven

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 \leq 4$$

kan beskrives på formen  $u \in [a, b]$ ,  $v \in [c, d]$ , der  $a, b, c, d$  er konstante tall uavhengige av  $u, v$ .

4. La  $A$  være det kompakte området i planet begrenset av polar-kurven  $r = \theta$  for  $\theta \in [0, 2\pi]$  og den delen av  $x$ -aksen som tilsvarer  $x \in [0, 2\pi]$ . Beskriv  $A$  i polarkoordinater.

5. La  $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x - 2)^2 + y^2 \leq 4\}$ . Beskriv  $D$  i polarkoordinater.

6. For hvert av oppgavepunktene under, finn et koordinatsystem  $u, v, w$  i rommet  $\mathbf{R}^3$  slik at mengdene  $B$  definert ved de gitte standardkoordinatbetingelsene kan beskrives på formen

$$u \in [a, b] \quad v \in [c, d] \quad w \in [e, f]$$

der  $a, b, c, d, e, f$  er konstante tall uavhengige av  $u, v$  og  $w$ .

- $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 \leq 1$
- $x^2 + z^2 \leq 4$
- $y^2 + z^2 \leq 1$  og  $0 \leq x \leq 5$

7. La  $D$  være det kompakte området i planet begrenset av polar-kurven  $r = 1 - \cos \theta$ . Beskriv  $D$  i polarkoordinater.

8. For hvert naturlig tall  $n \geq 1$ , la

$$U_n = \{x \in \mathbf{R} \mid 1/n < x < 1\}$$

Vis at samlingen  $O = \{U_n \mid n \geq 1\}$  er en åpen overdekning av intervallet  $(0, 1)$ .

Vis at det ikke fins noe endelig utvalg av mengder fra  $O$  som dekker  $(0, 1)$ . Forklar sammenhengen med kompakthetsteoremet.

9. La  $R \subseteq \mathbf{R}^3$  være det lukkede området begrenset av flaten gitt ved  $\rho = 4 \sin \phi$  i kulekoordinater. Beskriv  $R$  i kulekoordinater.

## \*5.6 Bevis for kompakthetsteoremet

Jeg skal her bevise teorem 5.4.1.

### Påstand 1

Teoremet holder for lukkede intervaller  $[a, b] \subseteq \mathbf{R}$ .

### Bevis for påstand 1

Gitt en overdekning  $O$  av  $[a, b]$  bestående av åpne mengder i  $\mathbf{R}$ . Anta at

$$q = \inf \left\{ x \in [a, \infty) \mid \text{Intet endelig utvalg fra } O \text{ dekker } [a, x] \right\}$$

fins. Siden en mengde fra  $O$  må inneholde  $a$ , og dermed også  $[a, a + \delta]$  for en passende  $\delta$ , må  $q > a$ . Anta  $q \leq b$ . Velg en  $U \in O$  slik at  $q \in U$ . La  $\epsilon > 0$  være så liten at  $[q - \epsilon, q + \epsilon] \subseteq U$ , samtidig som  $q - \epsilon > a$ . Pr. def. av  $q$  fins da et endelig utvalg  $U_1, \dots, U_k$  fra  $O$  som dekker  $[a, q - \epsilon]$ . Men da dekker jo samlingen  $U_1, \dots, U_k, U$  intervallet  $[a, q + \epsilon]$ , i strid med definisjonen av  $q$ . Altså  $q > b$ , så hvis  $q$  fins holder påstanden. Men hvis  $q$  ikke fins må det skyldes at mengden den er infimum av er tom. Spesielt er ikke  $b$  med i denne mengden! Påstand 1 er vist.

### Påstand 2

Teoremet holder for lukkede rektangler  $R = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbf{R}^n$ .

### Bevis for påstand 2

Teoremet holder klart for  $R$  når  $a_j = b_j$  for alle  $j$ , for da består  $R$  av ett punkt. Anta at det holder hvis  $a_j = b_j$  for  $j > k$ . Anta så at vi har gitt en  $R$  med  $a_j = b_j$  kun for  $j > k + 1$ . Hvis vi kan vise at teoremet holder for  $R$ , følger påstand 2 ved induksjon. La  $O$  være en åpen overdekning av  $R$  bestående av åpne rektangler. Da er  $O$  en åpen overdekning av

$$R_x = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_k, b_k] \times \{x\} \times \{a_{k+2}\} \times \dots \times \{a_n\}$$

også, for hver  $x \in [a_{k+1}, b_{k+1}]$ . Ved induksjonshypotesen fins et endelig utvalg  $O_x \subseteq O$  som også dekker  $R_x$ . Men da må det (se oppgave 2) finnes en åpen omegn  $U_x$  om  $x$  i  $\mathbf{R}$  slik at mengdene i  $O_x$  tilsammen også dekker

$$S_x = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_k, b_k] \times U_x \times \{a_{k+2}\} \times \dots \times \{a_n\}$$

Samlingen  $O' = \{U_x \mid x \in [a_{k+1}, b_{k+1}]\}$  er en åpen overdekning av intervallet  $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ , og dermed fins  $x_1, \dots, x_N \in [a_{k+1}, b_{k+1}]$  slik at samlingen  $U_{x_1}, \dots, U_{x_N}$  også dekker  $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ . Men da dekker den kombinerte samlingen  $O_{x_1}, \dots, O_{x_N}$  hele  $R$ , og denne samlingen er endelig. Vi har dermed vist at enhver åpen overdekning av  $R$  bestående av rektangler inneholder et endelig

utvalg som dekker. At *enhver* åpen overdekning av  $R$  inneholder et endelig utvalg som dekker, følger direkte fra dette (se oppgave 1). Påstand 2 er vist.

Gitt påstand 2, følger teoremet lett. Hvis  $K \subseteq \mathbf{R}^n$  er kompakt, finnes et lukket rektangel  $R$  slik at  $K \subseteq R$ . La  $O$  være en åpen overdekning av  $K$ . Da er  $O$  kombinert med  $\mathbf{R}^n \setminus K$  en åpen overdekning av  $R$ . Ved påstand 2 fins et endelig utvalg  $U_1, \dots, U_N$  fra  $O$  som, muligens sammen med  $\mathbf{R}^n \setminus K$ , dekker  $R$ . Da dekkes  $K$  av  $U_1, \dots, U_N$ . ■

## 5.6 Oppgaver

**1.** Anta at mengden  $A \subseteq \mathbf{R}^n$  har den egenskap at enhver åpen overdekning av  $A$  bestående av åpne rektangler inneholder et endelig utvalg som dekker  $A$ . Vis at *enhver* åpen overdekning av  $A$  da inneholder et endelig utvalg som dekker  $A$ .

**2.** Begrunn at det er riktig som det påstås i linje 9 av beviset for påstand 2 ovenfor, at det fins  $U_x$  slik at samlingen  $O_x$  dekker  $S_x$ . (Hint: Tegn en figur i tilfellet  $n = 2, k = 1$ .)

## Blandede oppgaver til kapittel 5

**1.** For å angi posisjonen til et punkt på jordoverflaten brukes *lengdegrader*  $\alpha \in \langle -180^\circ, 180^\circ \rangle$  og *breddegrader*  $\beta \in [-90^\circ, 90^\circ]$ . Hvis vi betrakter jordoverflaten som en kule med radius  $R$ , svarer dette til å bruke et koordinatsystem som minner svært mye om kulekoordinater med  $\rho$  konstant lik  $R$ . (I virkeligheten er jorden litt flattrykt ved polene, dvs. det er riktigere å si at jordoverflaten er ellipsoide-formet. Men det ser vi bort fra her.) Nordpolen svarer til  $\beta = 90^\circ$  og Sydpolen til  $\beta = -90^\circ$  (også kalt "90° syd"). "Nullmeridianen"  $\alpha = 0^\circ$  går fra Nordpolen gjennom Greenwich utenfor London til Sydpolen, og  $\alpha$  øker vestover.

a) Legg Jorden inn som en kule i  $\mathbf{R}^3$ , med sentrum i origo, radius  $R$ ,  $z$ -aksen gjennom polene og nullmeridianen i  $xz$ -planet. Bestem standardkoordinatene  $(x, y, z)$  til et punkt på jordoverflaten uttrykt ved lengdegraden  $\alpha$  og breddegraden  $\beta$  til punktet.

b) Med *avstanden* mellom to punkter  $\mathbf{p}$  og  $\mathbf{q}$  på jordoverflaten mener man menes lengden av den korteste veien fra  $\mathbf{p}$  til  $\mathbf{q}$  langs jord-overflaten. Vis at avstanden  $d$  mellom to punkter på jordoverflaten med standardkoordinater  $(x_1, y_1, z_1)$  og  $(x_2, y_2, z_2)$  er

$$d = Rv,$$

der  $R$  er jordradien og  $v$  er vinkelen mellom vektorene  $(x_1, y_1, z_1)$  og  $(x_2, y_2, z_2)$ .

c) Bruk resultatene fra a) og b) til å lage en praktisk metode for å finne avstanden mellom to punkter på jordoverflaten når man kjenner punktenes lengde- og breddegrader.

d) Bruk metoden til å finne avstanden mellom London (breddegrad  $51.5^\circ$ , lengdegrad  $0^\circ$ ) og New York (breddegrad  $40.75^\circ$ , lengdegrad  $74^\circ$ ). Jordradien er  $R \approx 6373$  km.

# Kapittel 6

## Funksjoner av flere variable

---

*En av de som bidro til å systematisere teorien for funksjoner av flere variable på slutten av 1700-tallet, var Joseph Louis Lagrange (1736-1813). Lagrange var født og oppvokst i Italia, men arbeidet senere i Paris og Berlin. Blant annet forsket han på maksimums- og minimumsproblemer for funksjoner av flere variable. Lagrange gav også betydelige bidrag til klassisk fysikk. Lagrange-metoden i seksjon 12.10 er oppkalt etter ham. Mye av begrepsdannelsen i dette er forøvrig av langt eldre dato, for eksempel var vektorbegrepet naturligvis kjent allerede av Newton (selv om notasjonen og terminologien var annerledes).*

*Mot slutten av 1800-tallet ble teorien for partielle deriverte innlemmet i den nye, stringent oppbygde teorien som baserte seg på en presis grensedefinisjon. Først da kunne man gi presise beviser for “intuitivt opplage” resultater som for eksempel ekstremverdisetningen (teorem 6.3.1).*

---

## 6.1 Introduksjon

---

En *reell funksjon av  $n$  variable* er en funksjon  $f$  slik at  $D_f \subseteq \mathbf{R}^n$  og  $V_f \subseteq \mathbf{R}$ . Med andre ord er det en funksjon

$$f; \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$$

der  $n \geq 1$  er et helt tall. Hvis  $n > 1$ , kalles slike funksjoner for “funksjoner av flere variable”. Hvis  $n = 2$ , altså

$$f; \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$$

kan grafen til  $f$  i pene tilfeller tegnes ved å måle funksjonsverdiene til  $f$  langs en av aksene, vanligvis  $z$ -aksen. Grafen til  $f$  blir da en flate i rommet som svever over definisjonsområdet til  $f(x, y)$  i  $xy$ -planet. Man kan også skissere *nivåkurvene* til  $f$ . Med *nivåkurven i høyde  $c$*  mener man mengden av alle punkter  $(x, y) \in D_f$  slik at

$$f(x, y) = c.$$

For funksjoner  $f; \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  der  $n \geq 3$  kan vi ikke tegne grafen slik som i tilfellet to variable, fordi vi ikke har nok akser i vårt fysiske, 3-dimensjonale rom. Men vi kan likevel definere en generell analogi til begrepet nivåkurve: Hvis  $f; \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  og  $c$  er et reelt tall, så kalles mengden av punkter  $(x_1, \dots, x_n) \in D_f$  slik at

$$f(x_1, \dots, x_n) = c$$

for *nivåmengden* til  $f$  tilsvarende verdien  $c$ . Hvis  $n = 2$ , kalles altså nivåmengden for en nivåkurve. Hvis  $n = 3$  blir nivåmengdene delmengder av  $\mathbf{R}^3$ , og kalles *nivåflater*. Disse flatene er det mulig å tegne.

## 6.2 Grenser og kontinuitet

---

I denne seksjonen skal vi innføre begrepene *grense* og *kontinuitet* for funksjoner  $f; \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ . Den intuitive betydningen av disse begrepene er akkurat som i envariabeltilfellet:

- At  $f(\mathbf{x})$  går mot  $L$  som grense når  $\mathbf{x}$  går mot  $\mathbf{a}$ , betyr at  $f(\mathbf{x})$  nærmer seg  $L$  når  $\mathbf{x}$  velges stadig nærmere  $\mathbf{a}$ .

Vi må bare huske på at her er  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  og  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$  punkter i  $\mathbf{R}^n$ . Avstanden mellom  $\mathbf{x}$  og  $\mathbf{a}$  er  $|\mathbf{x} - \mathbf{a}|$ , dvs. lengden av vektoren fra  $\mathbf{a}$  til  $\mathbf{x}$ . Presis definisjon: La  $f; \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ , la  $\mathbf{a}$  være et opphopningspunkt for  $D_f$ , og la  $L \in \mathbf{R}$ . At

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = L$$

betyr, som før, at det for hver  $\epsilon > 0$  fins en  $\delta > 0$  slik at  $|f(\mathbf{x}) - L| < \epsilon$  for alle  $\mathbf{x} \in D_f \setminus \{\mathbf{a}\}$  som oppfyller  $|\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta$ .

### Definisjon 1 Kontinuitet

Funksjonen  $f; \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  kalles *kontinuerlig* i et opphopningspunkt  $\mathbf{a} \in D_f$  hvis

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}).$$

Vi regner  $f$  som kontinuerlig i eventuelle isolerte punkter i  $D_f$ .

Hvis  $f$  er kontinuerlig i alle  $\mathbf{a} \in D_f$ , kalles  $f$  *kontinuerlig*.

### Teorem 1 Grenselover for flere variable

La  $f; \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  og  $g; \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ , la  $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$ , og la  $r$  og  $s$  være reelle tall.

Hvis  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = r$  og  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = s$ , så er

$$(1) \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} [f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})] = r + s$$

$$(2) \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} [f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})] = r - s$$

$$(3) \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x}) = r \cdot s$$

$$(4) \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} = \frac{r}{s} \quad \text{hvis } s \neq 0$$

La  $g; \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ , la  $f; \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , og la  $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$ .

Anta at  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = L$ , og at  $f$  er kontinuerlig i punktet  $L$ . Da er

$$(5) \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(g(\mathbf{x})) = f(L)$$

**Bevis** Tankegangen her er så lik den vi brukte for å vise de tilsvarende lovene for funksjoner av én variabel (1.7.2) at jeg fører beviset i telegramstil. Vi bruker trekantulikheten en rekke ganger.

$$1. |f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) - (r + s)| = |f(\mathbf{x}) - r + g(\mathbf{x}) - s| \\ \leq |f(\mathbf{x}) - r| + |g(\mathbf{x}) - s| \rightarrow 0$$

$$2. |f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}) - (r - s)| = |f(\mathbf{x}) - r + (s - g(\mathbf{x}))| \\ \leq |f(\mathbf{x}) - r| + |g(\mathbf{x}) - s| \rightarrow 0$$

$$3. |f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) - rs| = |(f(\mathbf{x}) - r) \cdot (g(\mathbf{x}) - s) + r \cdot (g(\mathbf{x}) - s) + s \cdot (f(\mathbf{x}) - r)| \\ \leq |f(\mathbf{x}) - r| \cdot |g(\mathbf{x}) - s| + |r| \cdot |g(\mathbf{x}) - s| + |s| \cdot |f(\mathbf{x}) - r| \rightarrow 0$$

4. Anta først  $f(\mathbf{x}) = 1$  for alle  $\mathbf{x}$ . Da er  $r = 1$ , og

$$\left| \frac{1}{g(\mathbf{x})} - \frac{1}{s} \right| = \left| \frac{s - g(\mathbf{x})}{s \cdot g(\mathbf{x})} \right| = \frac{|s - g(\mathbf{x})|}{|s| \cdot |g(\mathbf{x})|} \rightarrow 0$$

Skriver så  $f(\mathbf{x})/g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \cdot [1/g(\mathbf{x})]$  og bruker (3).

5. Identisk med beviset for lov 5, teorem 1.7.2. ■

Merk også at hvis punktet  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$  skal nærme seg punktet

$$\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n,$$

så må (fordi  $|x_j - a_j| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{a}|$ ) hver koordinat  $x_j$  nærme seg den tilsvarende koordinaten  $a_j$ . Dette betyr at de såkalte *projeksjonsfunksjonene*  $f_j : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  gitt ved

$$f_j(x_1, \dots, x_n) = x_j$$

alle er kontinuerlige. Kombinerer vi dette med teoremet ovenfor, kan vi nå akkurat som i envariabeltilfellet konkludere med følgende, røft sagt:

#### Kontinuitet av formelfunksjoner

Hvis  $f; \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  er gitt ved en formel  $f(x_1, \dots, x_n)$  bygget opp ved at koordinatene  $x_1, \dots, x_n$  er satt inn i kontinuerlige funksjonsuttrykk som er addert, subtrahert, ganget, delt med eller satt sammen et endelig antall ganger, er  $f$  kontinuerlig i alle punkter der formelen gir mening.

## 6.3 Ekstremalpunkter

Definisjonen av begrepene **ekstremalpunkt** og *lokalt ekstremalpunkt* for funksjoner  $f; \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  er identisk med definisjonen for  $n = 1$  gitt på s. 10.0.0, bortsett fra at "omegn" nå tolkes som omegn i  $\mathbf{R}^n$ . I tilfellet  $f; \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  svarer "fjelltopper" på grafen til lokale maksimumspunkter. "Søkk" i terrenget tilsvarer lokale minimumspunkter. Men lokale/globale maks og min kan også havne på randen av  $D_f$ . Hvis du har en eiendom på fjellet, kan det f.eks. godt hende at det høyeste punktet på eiendommen din er ved gjerdet ditt, og at dette står midt i en bakke.

#### Teorem 1 Ekstremverdisetningen for flere variable

Hvis  $f; \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  er kontinuerlig og  $D_f$  er kompakt, så har funksjonen  $f$  minst ett maksimumspunkt og ett minimumspunkt.



**Bevis** La oss først vise at  $f$  er begrenset på  $D_f$ . Siden  $f$  er kontinuerlig, kan vi for hver  $\mathbf{x} \in D_f$  velge en åpen omegn  $U_{\mathbf{x}}$  om  $\mathbf{x}$  slik at

$$|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})| < 1 \quad \text{for alle } \mathbf{y} \in D_f \cap U_{\mathbf{x}}.$$

Da er  $O = \{U_{\mathbf{x}} \mid \mathbf{x} \in D_f\}$  en åpen overdekning av  $D_f$ . Ved kompakthetsteoremet fins dermed et endelig utvalg

$$U_{\mathbf{x}_1}, \dots, U_{\mathbf{x}_k}$$

fra  $O$  som også dekker  $D_f$ . Nå er  $f$  begrenset av  $f(\mathbf{x}_i) + 1$  og  $f(\mathbf{x}_i) - 1$  på  $U_{\mathbf{x}_i}$ . La  $m$  og  $M$  være den minste og største av  $f(\mathbf{x}_i)$ -ene. Da er  $f$  begrenset nedad av  $m - 1$  og oppad av  $M + 1$  på hele  $D_f$ . Resten er som beviset for teorem 1.7.5. ■

I tilfellet to variable kan denne setningen tolkes slik: Hvis du har en eiendom på fjellet som tilsvarer et kompakt område på kartet, så vil eiendommen din ha minst ett høyeste punkt og minst ett laveste punkt. Det er her viktig at du også eier selve "grenselinjene" rundt området.

## 6.4 Partielle deriverte

La  $f; \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ , og anta at vi kaller variablene  $x_1, \dots, x_n$ . Gitt at grensen fins, definerer vi den **partielle deriverte** av  $f(x_1, \dots, x_n)$  med hensyn på variabelen  $x_i$  i punktet  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in D_f$  ved

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i + h, \dots, a_n) - f(\mathbf{a})}{h}$$

Symbolet " $\partial$ " er en krøllet " $d$ ". Hvis f.eks.  $f; \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ , er de partielle deriverte av  $f(x, y)$  i punktet  $\mathbf{a} = (x, y)$  gitt ved

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

I topp-punkter og bunn-punkter for funksjonen må vi ha stigning 0 alle veier. Analogien til teorem 1.8.6 blir dermed følgende:

**Teorem 1    Metode for å finne ekstremalpunkter**

La  $f(x_1, \dots, x_n)$  være en reell funksjon av  $n$  variable, la  $\mathbf{a}$  være et punkt i det indre av  $D_f$ , og anta at alle de partielle deriverte av  $f$  eksisterer i  $\mathbf{a}$ . Hvis  $\mathbf{a}$  er et lokalt ekstremalpunkt for  $f$ , så er

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) = 0.$$

**Bevis** Vi har

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i + h, \dots, a_n) - f(\mathbf{a})}{h}$$

Anta at  $\mathbf{a}$  er et lokalt maksimum. (Minimumstilfellet er tilsvarende.) Hvis  $h > 0$  er da telleren  $\leq 0$  og nevneren positiv, dvs. brøken er  $\leq 0$ . Så  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) \leq 0$ . Hvis  $h < 0$  blir tilsvarende teller  $\leq 0$  og nevner negativ, dvs. brøken er positiv. Så  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) \geq 0$ . Totalt:  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = 0$ . ■

**Høyere ordens partielle deriverte. Notasjon**

Akkurat som for funksjoner av én variabel, er det også for funksjoner av flere variable aktuelt å derivere mer enn en gang. Men her har vi mange flere kombinasjonsmuligheter, siden vi i hvert trinn kan velge hvilken variabel vi vil derivere med hensyn på. For å vise notasjonen, tar jeg for meg funksjonen  $f(x, y) = x^2 + 3xy^3$ . Denne har følgende to første ordens partielle deriverte:  $\partial f/\partial x = 2x + 3y^3$  og  $\partial f/\partial y = 9xy^2$ . Videre har den følgende fire *annenordens partielle deriverte*:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (2x + 3y^3) = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (2x + 3y^3) = 9y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (9xy^2) = 18xy$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (9xy^2) = 9y^2$$

Merk at symbolet  $\partial/\partial x$  brukes som "operasjonen" å derivere mhp.  $x$ . Akkurat som symbolet  $d/dx$  brukt før. Tilsvarende for andre variable.

Man definerer partielle deriverte av orden 3 og høyere på helt analog måte.

Med funksjonen  $f(x, y)$  vi hadde ovenfor, fås for eksempel

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (18xy) = 18y.$$

## Likhet av miksede partielle deriverte

Til slutt i denne seksjonen skal vi se på et teoretisk poeng. I eksemplet nederst side 186 fant vi at de to “miksede” partielle deriverte, dvs. de som involverte derivasjon med hensyn på mer enn én variabel, var like:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Neste teorem viser at dette ikke var noen tilfældighet.

### **Teorem 2 Likhet av miksede annen ordens deriverte**

Hvis alle 2. ordens partielle deriverte av  $f; \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  er kontinuerlige og  $D_f$  er åpen, så er

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \quad \text{for alle } i \text{ og } j.$$

**Bevis** Siden teoremet kun involverer derivasjon med hensyn på to av variablene til  $f$ , kan vi like gjerne anta at  $f; \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ . La  $(a, b) \in D_f$ , og sett

$$G(x) = f(x, b+k) - f(x, b) \quad \text{og} \quad H(y) = f(a+h, y) - f(a, y)$$

for  $h \neq 0$  og  $k \neq 0$  tilstrekkelig små. Da kan vi definere

$$S(h, k) \stackrel{\text{def}}{=} G(a+h) - G(a) \stackrel{\text{Sjekk!}}{=} H(b+k) - H(b).$$

Ved middelverditeoremet (teorem 2.10) brukt på  $G(x)$ , fins et tall  $\hat{x}$  mellom  $a$  og  $a+h$  slik at  $G(a+h) - G(a) = G'(\hat{x}) \cdot h$ . Innsatt fås

$$S(h, k) = G'(\hat{x}) \cdot h = \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}, b+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}, b) \right] \cdot h.$$

Middelverditeoremet brukt på  $\partial f / \partial x$ , betraktet som en funksjon av  $y$  med  $x = \hat{x}$  fast, gir så at det fins et tall  $\hat{y}$  mellom  $b$  og  $b+k$  slik at

$$S(h, k) = \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\hat{x}, \hat{y}) \cdot k \right] \cdot h, \quad \text{dvs.} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{S(h, k)}{hk}.$$

Tar vi grensen  $(h, k) \rightarrow 0$  på begge sider, gir høyre likning ovenfor

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b) = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{S(h, k)}{hk}.$$

fordi annen ordens deriverte av  $f$  er kontinuerlige, og  $(\hat{x}, \hat{y}) \rightarrow (a, b)$  når  $(h, k) \rightarrow 0$ . Ved å gjøre et tilsvarende resonnement med funksjonen  $H$ , får du at  $\partial^2 f / (\partial x \partial y)(a, b)$  også er lik grensen til høyre. ■

## 6.5 Vektorfunksjoner

Dette avsnittet dreier seg om generell teori for funksjoner

$$F; \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$$

der  $n \geq 1$  og  $m \geq 1$  er hele tall, dvs. vi skal se på funksjoner som er definert på en delmengde av  $\mathbf{R}^n$  og som har funksjonsverdier i  $\mathbf{R}^m$ . Hvis  $m > 1$  kalles slike funksjoner *vektorfunksjoner*, siden funksjonsverdiene er vektorer med  $m$  komponenter. Du finner eksempler på vektorfunksjoner i seksjon 10.14 i MIP (lineærtransformasjoner) og i seksjon 5.5 (koordinattransformasjoner). Funksjoner  $f; \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  kalles i denne forbindelse ofte *skalarfunksjoner*. "Skalar" er et synonym for "tall".

### Grenser og kontinuitet

Definisjonene her er analoge til de vi tidligere har sett på. La  $F; \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ , la  $\mathbf{a}$  være et opphopningspunkt for  $D_F$ , og la  $\mathbf{L} \in \mathbf{R}^m$ . At

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} F(\mathbf{x}) = \mathbf{L}$$

betyr, som før, at det for hver  $\epsilon > 0$  fins  $\delta > 0$  slik at  $|F(\mathbf{x}) - \mathbf{L}| < \epsilon$  for alle  $\mathbf{x} \in D_F \setminus \{\mathbf{a}\}$  slik at  $|\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta$ . Funksjonen  $F$  kalles *kontinuerlig* i et punkt  $\mathbf{a} \in D_F$  hvis

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{a})$$

eller  $\mathbf{a}$  er isolert i  $D_F$ . Hvis  $F$  er kontinuerlig i alle  $\mathbf{a} \in D_F$ , kalles  $F$  *kontinuerlig*. Funksjonen  $F$  definerer  $m$  såkalte *komponentfunksjoner*  $F_i : D_F \rightarrow \mathbf{R}$  ved at  $F_i(\mathbf{x})$  er  $i$ -te komponent av vektoren  $F(\mathbf{x})$ . Da er

$$F(\mathbf{x}) = (F_1(\mathbf{x}), \dots, F_m(\mathbf{x})).$$

**Eksempel 1** Hvis  $F; \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  er gitt ved  $F(x, y) = (xy, x^2 + y^2)$ , så er komponentfunksjonene gitt ved  $F_1(x, y) = xy$  og  $F_2(x, y) = x^2 + y^2$ . ■

Teoremet under viser at vi kan finne grenseverdier for funksjonen  $F$  ved å ta grensene for hver av disse komponentfunksjonene separat.

### Teorem 1 Komponentvis beregning av grenseverdier

La  $F; \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ . Da er  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} F(\mathbf{x}) = \mathbf{L}$  hvis og bare hvis

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} F_j(\mathbf{x}) = L_j \quad \text{for alle } j = 1, \dots, m.$$

**Bevis** Anta at  $F_j \rightarrow L_j$  for alle  $j$  når  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}$ . Gitt  $\epsilon > 0$ . For hver  $j$  fins da  $\delta_j > 0$  slik at  $|F_j(\mathbf{x}) - L_j| < \epsilon/m$  for alle  $\mathbf{x} \in D_F$  slik at  $|\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta_j$ . La  $\delta$  være den minste av  $\delta_j$ -ene. Hvis  $|\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta$ , er da

$$|F(\mathbf{x}) - \mathbf{L}| = \sqrt{(F_1(\mathbf{x}) - L_1)^2 + \dots + (F_m(\mathbf{x}) - L_m)^2} < \sqrt{m \left(\frac{\epsilon}{m}\right)^2} \leq \epsilon.$$

Så  $F \rightarrow \mathbf{L}$ . Omvendt, anta at  $F \rightarrow \mathbf{L}$  når  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}$ . Gitt  $\epsilon > 0$ , velg  $\delta > 0$  slik at  $|F(\mathbf{x}) - \mathbf{L}| < \epsilon$  for alle  $\mathbf{x} \in D_F$  slik at  $|\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta$ . Men hvis  $|\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta$  er da  $|F_j(\mathbf{x}) - L_j| \leq |F(\mathbf{x}) - \mathbf{L}| < \epsilon$ , så  $F_j \rightarrow L_j$ . ■

**Eksempel 2** Hvis  $F(x, y) = (x^2 + 2y, 3xy)$ , så er

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (3,4)} F(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (3,4)} (x^2 + 2y, 3xy) = (17, 36). \quad \blacksquare$$

Ut fra forrige teorem kan vi konkludere med at en funksjon  $F; \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$  er kontinuerlig i et punkt  $\mathbf{x}$  hvis og bare hvis komponentfunksjonene til  $F$  alle er kontinuerlige i  $\mathbf{x}$ . Neste teorem er mest av teoretisk interesse.

### Teorem 2 Uniform kontinuitet

La  $F; \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ , la  $K \subseteq D_F$  være kompakt, og la  $F$  være kontinuerlig på  $K$ . For hver  $\epsilon > 0$  fins da en  $\delta > 0$  slik at

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \delta \quad \text{medfører} \quad |F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{y})| < \epsilon$$

for alle  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K$ . Vi sier at  $f$  er **uniformt kontinuerlig** på  $K$ .

**Bevis** Gitt  $\epsilon > 0$ . Ved kontinuitet fins for hver  $\mathbf{x} \in K$  en åpen kule  $U_{\mathbf{x}}$  om  $\mathbf{x}$  med radius  $\delta_{\mathbf{x}}$  slik at  $|F(\mathbf{y}) - F(\mathbf{x})| < \epsilon/3$  for alle  $\mathbf{y} \in K \cap U_{\mathbf{x}}$ . Velg for hver  $\mathbf{x}$  en åpen kule  $V_{\mathbf{x}}$  om  $\mathbf{x}$  med radius  $\delta_{\mathbf{x}}/3$ . Da er  $O = \{V_{\mathbf{x}} \mid \mathbf{x} \in K\}$

en åpen overdekning av  $K$ , så ved kompakthetsteoremet fins et endelig utvalg  $V_{\mathbf{x}_1}, \dots, V_{\mathbf{x}_m}$  fra  $O$  som dekker  $K$ . La  $\delta$  være en tredjedel av den minste av  $\delta_{\mathbf{x}_m}$ -ene. Anta  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \delta$ . Hvis  $\mathbf{x} \in V_{\mathbf{x}_i}$  og  $\mathbf{y} \in V_{\mathbf{x}_j}$ , så er

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| &= |\mathbf{x}_i - \mathbf{x} + \mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{y} - \mathbf{x}_j| \\ &\leq |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}| + |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + |\mathbf{y} - \mathbf{x}_j| < \delta + \delta + \delta = 3\delta \leq \delta_{\mathbf{x}_j}, \end{aligned}$$

dvs.  $\mathbf{x}_i \in U_{\mathbf{x}_j}$ . Det følger at  $|F(\mathbf{x}_i) - F(\mathbf{x}_j)| < \epsilon/3$ , og dermed

$$\begin{aligned} |F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{y})| &= |F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{x}_i) + F(\mathbf{x}_i) - F(\mathbf{x}_j) + F(\mathbf{x}_j) - F(\mathbf{y})| \\ &\leq |F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{x}_i)| + |F(\mathbf{x}_i) - F(\mathbf{x}_j)| + |F(\mathbf{x}_j) - F(\mathbf{y})| \\ &< \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

## Den totalderiverte

Vi husker fra kapittel 4 at hvis  $f; \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  oppfyller visse forutsetninger om deriverbarhet, så sier *Taylor's formel* med  $n = 1$  i punktet  $a$  at

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + E(x),$$

der restleddet  $E(x)$  måler feilen vi gjør hvis vi bruker Taylorpolynomet  $T_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$  som tilnærming til  $f(x)$  rundt  $a$ . Ved å bruke formelen for restleddet  $E(x) = R_1(x)$  angitt i Taylor's formel (s. 140), får vi at

$$\frac{E(x)}{|x - a|} = \frac{f''(z)}{2!} \cdot |x - a| \rightarrow 0 \quad \text{når } x \rightarrow a.$$

Dette betyr at restleddet  $E(x)$  går mot 0 forttere enn avstanden  $|x - a|$  når  $x \rightarrow a$ .

Vi har sett at de partielle deriverte av en flervariabelfunksjon på en naturlig måte er analoge til den deriverte av en envariabelfunksjon. Men kan vi få frem et tilnærmingresultat for flervariabelfunksjoner analogt til den 1. ordens Taylorformelen ovenfor? Svaret er ja, men siden hver partiellderivert kun måler endring i én retning, må vi "ta med alle sammen". Nøkkelbegrepet er:

### Definisjon 1 Jacobimatrisen

Hvis de aktuelle partielle deriverte eksisterer, definerer vi **Jacobimatrisen**  $J_F(\mathbf{a})$  til en funksjon  $F; \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$  i punktet  $\mathbf{a}$  som  $m \times n$ -matrisen

$$J_F(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{bmatrix}$$

**Eksempel 3** La  $F : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  være definert ved  $F(x, y) = (3x^2y^3, 2xy)$ .  
Da er

$$J_F(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6xy^3 & 9x^2y^2 \\ 2y & 2x \end{bmatrix}$$

For eksempel er

$$J_F(1, 2) = \begin{bmatrix} 48 & 36 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}. \blacksquare$$

Det viser seg at Jacobimatrisen kan spille en rolle som er analog til hva tallet  $f'(a)$  gjør i Taylorformelen for envariabelfunksjoner. I definisjonen under skal  $(\mathbf{x} - \mathbf{a})$  oppfattes som en søylevektor, og  $J_F(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})$  oppfattes som et matriseprodukt.

### Definisjon 2 Total deriverbarhet

Anta at Jacobimatrisen  $J_F(\mathbf{a})$  til  $F; \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$  i punktet  $\mathbf{a}$  fins. Vi sier at  $F$  er **totalt deriverbar** (eller bare *deriverbar*) i punktet  $\mathbf{a}$  hvis vi for alle  $\mathbf{x} \in D_F$  har

$$F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{a}) + J_F(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) + E(\mathbf{x}),$$

der restleddet  $E : D_F \rightarrow \mathbf{R}^m$  oppfyller  $E(\mathbf{x})/|\mathbf{x} - \mathbf{a}| \rightarrow \mathbf{0}$  når  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}$ . I så fall kalles  $J_F(\mathbf{a})$  for den *totalderiverte* av  $F$  i punktet  $\mathbf{a}$ , og vi skriver

$$J_F(\mathbf{a}) = F'(\mathbf{a}).$$

Hvis  $F$  er deriverbar i alle punkter  $\mathbf{a} \in D_F$ , kalles den kort og godt *deriverbar*. Neste teorem viser at de fleste funksjoner vi i praksis støter på er deriverbare. Først litt mer terminologi:

- En funksjon  $F; \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$  kalles *partielt deriverbar* i punktet  $\mathbf{a}$  hvis alle de 1. ordens partielle deriverte av komponentfunksjonene til  $F$  finnes i  $\mathbf{a}$ . Dette er ekvivalent med at Jacobimatrisen  $J_F(\mathbf{a})$  fins.
- Hvis alle partielle deriverte av  $F$  av orden opp til og med  $k$  fins og er kontinuerlige på en omegn om  $\mathbf{a}$ , sier man at  $F$  er av klasse  $C^k$  (eller bare " $F$  er  $C^k$ ") i punktet  $\mathbf{a}$ .
- Hvis  $F$  er partielt deriverbar på hele  $D_F$ , kalles  $F$  *partielt deriverbar*. Tilsvarende sies  $F$  å være  $C^k$  hvis den er  $C^k$  på hele  $D_F$ .

**Teorem 3** Kontinuitet, total deriverbarhet og  $C^1$ -kriteriet

La  $F; \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ , og la  $\mathbf{a}$  være et indre punkt i  $D_F$ .

1. Hvis  $F$  er totalt deriverbar i  $\mathbf{a}$ , så er  $F$  kontinuerlig i  $\mathbf{a}$ .
2. Hvis  $F$  er  $C^1$  i  $\mathbf{a}$ , så er  $F$  totalt deriverbar i  $\mathbf{a}$ .

**Bevis** (1) Siden  $F$  er totalt deriverbar i  $\mathbf{a}$ , har vi Taylorformelen

$$F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{a}) + F'(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + E(\mathbf{x}),$$

der  $E(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{0}$  når  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}$ . Men ved å ta grensen  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}$  på begge sider, får vi da direkte at  $F(\mathbf{x}) \rightarrow F(\mathbf{a})$  når  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}$ . Så (1) er vist.

(2) Definer restleddet  $E$  ved  $F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{a}) + J_F(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + E(\mathbf{x})$ , dvs.

$$E(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{a}) - J_F(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}). \quad (1)$$

Vi må vise at

$$\frac{E(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}|} \rightarrow \mathbf{0}$$

når  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}$ . Ved teorem 6.5.1 er det da nok å vise at

$$\frac{|E_i(\mathbf{x})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}|} \rightarrow 0 \quad \text{når } \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}$$

for hver  $i$ . Sett  $e = E_i$  og  $f = F_i$ . Velg en åpen rektangel  $R$  med sentrum  $\mathbf{a}$  slik at  $F$  er  $C^1$  på  $R$ . For  $\mathbf{x} \in R$  er ved (1) da

$$e(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a})(x_j - a_j).$$

Tar du normen på begge sider, deler på  $|\mathbf{x} - \mathbf{a}|$  og tar grensen, får du

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{|e(\mathbf{x})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}|} = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a})(x_j - a_j)|}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}|}$$

Her skriver vi

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) &= f(x_1, a_2, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n) \\ &\quad + f(x_1, x_2, a_3, \dots, a_n) - f(x_1, a_2, \dots, a_n) \\ &\quad + \dots + f(x_1, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_{n-1}, a_n) \end{aligned}$$

Ved middelverditeoremet (1.8.9) brukt på funksjonen

$$g(t) = f(t, a_2, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)$$



fins en  $b_1$  mellom  $a_1$  og  $x_1$  på tallinjen slik at

$$g(x_1) - g(a_1) = g'(b_1)(x_1 - a_1).$$

La  $\mathbf{c}^1 = (b_1, a_2, \dots, a_n)$ . Da er  $g'(b_1) = \partial f / \partial x_1(\mathbf{c}^1)$ , så oversettelse av forrige likning gir

$$f(x_1, a_2, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{c}^1) \cdot (x_1 - a_1)$$

Tilsvarende finner vi punkter  $\mathbf{c}^2, \dots, \mathbf{c}^n$  til hver av linjene i uttrykket for  $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})$  ovenfor, og alt i alt fås

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{c}^j)(x_j - a_j).$$

La  $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{a}$ . Innsetting i grenseuttrykket gir nå

$$\begin{aligned} \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{|e(\mathbf{x})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}|} &= \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{1}{|\mathbf{h}|} \left| \sum_{j=1}^n \left[ \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{c}^j) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a}) \right] h_j \right| \\ &\leq \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{c}^j) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a}) \right| \cdot \frac{|h_j|}{|\mathbf{h}|} = 0, \end{aligned}$$

siste overgang fordi  $|h_j| \leq |\mathbf{h}|$ , de partielle deriverte av  $f$  er kontinuerlige i  $\mathbf{a}$ , og  $\mathbf{c}^j \rightarrow \mathbf{a}$  når  $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$ . ■

### Definisjon 3 Lineærtillnærming

Hvis  $F; \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$  er totalt deriverbar i punktet  $\mathbf{a}$ , definerer vi *lineærtillnærmingen* til  $F$  i punktet  $\mathbf{a}$  som funksjonen  $L: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$  gitt ved

$$L(\mathbf{x}) = F(\mathbf{a}) + F'(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}).$$

Fra definisjonen av total deriverbarhet kombinert med teorem 6.5.3 følger at lineærtillnærmingen  $L(\mathbf{x})$  vil være en "god" tillnærming til den gitte funksjonen  $F; \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$  i nærheten av punktet  $\mathbf{a}$ . Neste teorem beskriver nærmere hvordan man kan finne lineærtillnærmingen til skalarfunksjoner.

### Teorem 4 Lineærtillnærming av skalarfunksjoner

Anta at  $f; \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  er totalt deriverbar i punktet  $\mathbf{a}$ . Da er lineærtillnærmingen  $L(\mathbf{x})$  til  $f(\mathbf{x})$  i dette punktet gitt ved

$$L(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}) \cdot (x_1 - a_1) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \cdot (x_n - a_n).$$

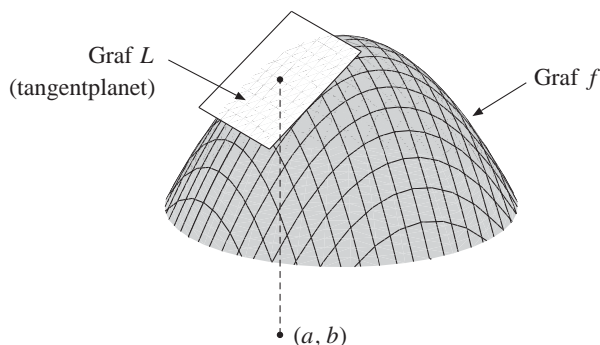
**Bevis** Jacobimatrisen til  $f$  er en  $(1 \times n)$ -matrise, og lineærtilnærmingen blir

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{a}) + F'(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \\ &= f(\mathbf{a}) + \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}) \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \right] \cdot \begin{bmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{bmatrix} \\ &= f(\mathbf{a}) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}) \cdot (x_1 - a_1) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \cdot (x_n - a_n). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Figuren under viser en illustrasjon i tilfellet to variable, dvs.  $f; \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ . Ved teorem 10.0.0 er lineærtilnærmingen til  $f$  i et punkt  $(a, b)$  da

$$L(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \cdot (x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \cdot (y - b).$$

Hvis  $f$  er deriverbar i punktet  $(a, b)$ , vet vi at restleddet til  $L(x, y)$  går mot 0 forttere enn avstanden fra  $\mathbf{x}$  til  $\mathbf{a}$  når  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}$ . Tolket geometrisk, betyr dette at grafen til  $L$ , som er et plan, ligger “inntil” grafen til  $f$  over  $(a, b)$ . Grafen til  $L$  kalles *tangentplanet* til  $f$  i punktet  $(a, b)$ . Figur:



## 6.5 Oppgaver

**1. Unikhetssegenskap for Jacobimatrisen.** La  $F : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$  være en funksjon, la  $\mathbf{a}$  være et punkt i det indre av  $D_F$ , og anta at  $A$  er en  $m \times n$ -matrise med den egenskap at

$$F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{a}) + A \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) + E(\mathbf{x}),$$

der  $E$  oppfyller

$$\frac{E(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}|} \rightarrow \mathbf{0} \quad \text{når } \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}.$$

a) Vis at hvis  $\mathbf{x} = (a_1, \dots, a_j + h, \dots, a_n)$ , så er

$$F_i(a_1, \dots, a_j + h, \dots, a_n) - F_i(\mathbf{a})$$

$$= A_{ij} \cdot h + E_i(\mathbf{x})$$

for hver  $i$  og  $j$ .

b) Vis at  $F$  er partielt deriverbar i  $\mathbf{a}$ , og at

$$A = J_F(\mathbf{a}).$$

2. Et "middelverditeorem". La  $f; \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  være partielt deriverbar på rektangelen  $R$ , og la

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \text{ og } \mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$$

ligge i  $R$ . Ved å se på beviset for teorem 12.5, skriv ned et bevis for at det fins punkter  $\mathbf{c}^j \in R$  for  $1 \leq j \leq n$  slik at

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{c}^j)(x_j - a_j).$$

3. Anta at  $F; \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$  er partielt deriverbar på rektangelen  $R$ , og at  $K$  er et reelt tall slik at

$$\left| \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right| < K$$

for alle  $i, j$  og  $\mathbf{x} \in R$ . Vis, ved å bruke oppgave 5 på hver komponent  $F_i$ , at for alle  $\mathbf{x}$  og  $\mathbf{a}$  i  $R$  gjelder da

$$|F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{a})| \leq nmK \cdot |\mathbf{x} - \mathbf{a}|.$$

4. Vis ut fra oppgave 6 at hvis  $F: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$  er en inverterbar lineærtransformasjon, så fins reelle konstanter  $m$  og  $M$  slik at vi for alle  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$  har

$$m \cdot |\mathbf{x}| \leq |F(\mathbf{x})| \leq M \cdot |\mathbf{x}|.$$

5. Anta at  $F; \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$  er deriverbar i  $\mathbf{a}$ . Skriv

$$F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{a}) = F'(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + E(\mathbf{x}),$$

og bruk dette til å vise at det fins en omegn  $U$  om  $\mathbf{a}$  og et reelt tall  $M$  slik at hvis  $\mathbf{x} \in D_F \cap U$ , så er

$$|F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{a})| \leq M \cdot |\mathbf{x} - \mathbf{a}|.$$

Hint: Trekantulikheten, og deretter oppgave 7.

## 6.6 Kjernerregelen. Inverse funksjoner

Vi skal nå se at kjernerregelen for derivasjon av envariabelfunksjoner har en direkte generalisering til funksjoner  $f; \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ .

### Teorem 1 Kjernerregelen

La  $U; \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$  og  $G; \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^p$  være slik at  $V_U \subseteq D_G$ .

Hvis  $U$  er deriverbar i  $\mathbf{a}$  og  $G$  er deriverbar i  $U(\mathbf{a})$ , så er sammen-setningen  $F; \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^p$  definert ved  $F(\mathbf{x}) = G(U(\mathbf{x}))$  for alle  $\mathbf{x} \in D_U$  også deriverbar i  $\mathbf{a}$ , og Jacobimatrixene oppfyller

$$F'(\mathbf{a}) = G'(U(\mathbf{a})) \cdot U'(\mathbf{a})$$

**Bevis** Siden  $U$  er deriverbar i  $\mathbf{a}$  og  $G$  er deriverbar i  $U(\mathbf{a})$ , har vi følgende Taylorformler for  $G$  og  $U$  (jfr. definisjon 6.5.2):

$$U(\mathbf{x}) = U(\mathbf{a}) + U'(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + E_U(\mathbf{x})$$

$$G(U(\mathbf{x})) = G(U(\mathbf{a})) + G'(U(\mathbf{a}))(U(\mathbf{x}) - U(\mathbf{a})) + E_G(U(\mathbf{x}))$$

for alle  $\mathbf{x} \in D_U$ . Bruker du at  $F(\mathbf{x}) = G(U(\mathbf{x}))$  og  $F(\mathbf{a}) = G(U(\mathbf{a}))$  og setter den første Taylorformelen inn for  $U(\mathbf{x})$  i den andre, får du

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}) &= F(\mathbf{a}) + G'(U(\mathbf{a})) \cdot \left[ U'(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + E_U(\mathbf{x}) \right] + E_G(U(\mathbf{x})) \\ &= F(\mathbf{a}) + G'(U(\mathbf{a})) \cdot U'(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) + E(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

der  $E(\mathbf{x}) = G'(U(\mathbf{a})) \cdot E_U(\mathbf{x}) + E_G(U(\mathbf{x}))$ . Ved oppgave 6.5.1 gjenstår det nå bare å vise at  $E(\mathbf{x})/|\mathbf{x} - \mathbf{a}| \rightarrow \mathbf{0}$  når  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}$ . Vi får

$$\frac{E(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}|} = G'(U(\mathbf{a})) \cdot \frac{E_U(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}|} + \frac{|U(\mathbf{x}) - U(\mathbf{a})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}|} \cdot \frac{E_G(U(\mathbf{x}))}{|U(\mathbf{x}) - U(\mathbf{a})|}$$

gitt at  $U(\mathbf{x}) \neq U(\mathbf{a})$ . Hvis  $U(\mathbf{x}) = U(\mathbf{a})$ , lar vi være å utvide leddet lengst til høyre med  $U(\mathbf{x}) - U(\mathbf{a})$ . Vel. Første ledd går mot 0 fordi

$$\frac{E_U(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}|} \rightarrow \mathbf{0}$$

og lineærtransformasjonen gitt ved matrisen  $G'(U(\mathbf{a}))$  er kontinuerlig. I andre ledd går faktoren til høyre mot 0, fordi  $G$  er deriverbar i punktet  $U(\mathbf{a})$ . Ved oppgave 6.5.3 er dessuten faktoren  $|U(\mathbf{x}) - U(\mathbf{a})|/|\mathbf{x} - \mathbf{a}|$  begrenset når  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}$ . Altså går hele høyre ledd mot 0. Når  $U(\mathbf{x}) = U(\mathbf{a})$  er  $E_G(U(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$ , og høyre ledd er 0 i utgangspunktet. ■

## Inverse funksjoner

Definisjonen av begrepet *invers funksjon* gitt i seksjon 10.0.0 gjelder for alle funksjoner. En funksjon  $F : D_f \rightarrow V_f$  har en invers  $F^{-1} : V_f \rightarrow D_f$  hvis og bare hvis  $F$  er injektiv. Vi skal nå se at også vår tidligere regel for derivasjon av inverse funksjoner (teorem 1.8.13) har en perfekt analogi for funksjoner

$$F; \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m.$$

Anta at vi har gitt en slik funksjon, og at  $F$  er deriverbar og injektiv. Da har  $F$  en invers funksjon  $F^{-1}$ , og

$$F^{-1}(F(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$$

for alle  $\mathbf{x} \in D_F$ . Hvis vi antar at  $F^{-1}$  er deriverbar, gir derivasjon på begge sider

$$(F^{-1})'(F(\mathbf{x})) \cdot F'(\mathbf{x}) = I,$$

der  $I$  er identitetsmatrisen. Her brukte jeg kjerneregelen på venstre side, og at funksjonen  $H(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$  har derivert lik  $I$ . Hvis  $\det(F'(\mathbf{x})) \neq 0$ , gir multiplikasjon med  $[F'(\mathbf{x})]^{-1}$  fra høyre på begge sider nå

$$(F^{-1})'(F(\mathbf{x})) = [F'(\mathbf{x})]^{-1}$$

Dette er formelen i *inversfunksjons-teoremet*, som vi nå skal kikke på. I utledningen vår her *antok* vi blant annet at den inverse funksjonen  $F^{-1}$  eksisterte, og at den var deriverbar. Å utlede formelen uten disse antakelsene, er adskillig vanskeligere.

Litt ny terminologi som vi trenger for å formulere teoremet: Hvis  $f : D_f \rightarrow A$  er en vilkårlig funksjon og  $V \subseteq D_f$ , så kalles man funksjonen

$$f : V \rightarrow A$$

som fås fra  $f$  ved å erstatte  $D_f$  med  $V$  for restriksjonen av  $f$  til  $V$ .

### Teorem 2 Inversfunksjons-teoremet

La  $F : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  være  $C^1$  i  $\mathbf{a}$ , og anta at

$$\det F'(\mathbf{a}) \neq 0.$$

Da fins åpne omegner  $V$  om  $\mathbf{a}$  og  $W$  om  $F(\mathbf{a})$  slik at restriksjonen

$$F : V \rightarrow W$$

har en  $C^1$  invers  $F^{-1} : W \rightarrow V$ . Videre oppfyller Jacobimatrissene

$$(F^{-1})'(F(\mathbf{x})) = [F'(\mathbf{x})]^{-1} \quad \text{for alle } \mathbf{x} \in V.$$

Beviset for dette teoremet finner du i appendixet bakerst i boken.

## 6.6 Oppgaver

1. La  $U : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$  ved

$$U(x, y, z) = (x^4yz, xyz),$$

og la  $G : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  ved  $G(u, v) = (u^2v^2, 3uv^2)$ .

- Finn Jacobimatrissen til  $U$  i punktet  $(1, 1, 1)$ , og Jacobimatrissen til  $G$  i punktet  $U(1, 1, 1)$ .
- La  $F : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$  være sammensetningen av  $U$  og  $G$ , altså  $F(\mathbf{x}) = G(U(\mathbf{x}))$ . Bruk kjernerregelen til å finne Jacobimatrissen til  $F$  i punktet  $(1, 1, 1)$ .

2. La  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  være deriverbar på en omegn  $U$  om  $\mathbf{a}$ . Definer  $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  ved

$$g(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{x})$$

for alle  $t$  slik at  $\mathbf{a} + t\mathbf{x} \in U$ . Vis at  $g$  er deriverbar, med

$$g'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a} + t\mathbf{x}) \cdot x_i.$$

3. Anta at alle de 1. ordens partielle deriverte av funksjonen  $f$  i oppgave 2 også er deriverbare på mengden  $U$ . Vis at da er

$$g''(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a} + t\mathbf{x}) \cdot x_i \cdot x_j.$$

4. En fet flue flyr i et rom med varierende temperatur  $T(x, y, z)$ . Fluens posisjon ved tid  $t$  er  $(x(t), y(t), z(t))$ . La  $W(t)$  være temperaturen i punktet fluen befinner seg, som funksjon av  $t$ .

- Forklar hvorfor vi kan skrive endringsraten til  $W(t)$  slik: (vi antar deriverbarhet)

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial T}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}.$$

- Anta at ved tidspunkt  $t_0$  er fluen i punktet  $(5, 3, 4)$  og beveger seg slik at  $x'(t_0) = 5$ ,  $y'(t_0) = 2$  og  $z'(t_0) = 0$ . Hvis  $T(x, y, z) = xyz^2$ , hva er  $dW/dt(t_0)$ ?

## 6.7 Kurver

Vi skal nå gi en generell definisjon av *kurver* i  $\mathbf{R}^n$ .

### Definisjon 1 Kurver og kurveparametriseringer

En **kurve-parametrisering** er en funksjon

$$\mathbf{r}; \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n.$$

Verdimengden  $C$  til  $\mathbf{r}$  kalles en **kurve** i  $\mathbf{R}^n$ . Vi sier at funksjonen  $\mathbf{r}$  er en *parametrisering av kurven*  $C$ .

For hver aktuell  $t$  kan vi tenke oss vektoren  $\mathbf{r}(t)$  avsatt med startpunkt i origo. Når variabelen  $t$ , som kalles *parameteren* til  $\mathbf{r}$ , varierer, beskriver spissen til vektoren en kurve i  $\mathbf{R}^n$ .

### Definisjon 2 Rette linjer og retningsvektorer

La  $\mathbf{p}_0$  være et punkt i  $\mathbf{R}^n$ , og la  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  være en vektor i  $\mathbf{R}^n$ . Kurven  $L \subseteq \mathbf{R}^n$  parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}$$

for alle  $t \in \mathbf{R}$ , kalles da en **rett linje** (eller bare en *linje*) i  $\mathbf{R}^n$ . Vektoren  $\mathbf{v}$  kalles en **retningsvektor** for  $L$ . Merk at  $L$  går gjennom punktet  $\mathbf{p}_0$ .

Det er lett å sjekke at denne definisjonen av linje stemmer med vår gamle i tilfellet  $\mathbf{R}^2$ : Hvis  $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0)$  og  $\mathbf{v} = (a, b)$ , så ligger punktet  $(x, y)$  på linjen fra boksen hvis og bare hvis  $(x, y) = (x_0, y_0) + t(a, b)$ . Hvis  $a \neq 0$ , git dette  $y - y_0 = (b/a)(x - x_0)$ . Tilfellet  $a = 0$  gir en vertikal linje.

### Definisjon 3 Hastighetsvektor

Med *hastighetsvektoren* til en kurveparametrisering

$$\mathbf{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$$

i et punkt  $t \in D_r$  menes vektoren

$$\mathbf{r}'(t) \stackrel{\text{def}}{=} (x_1'(t), x_2'(t), \dots, x_n'(t))$$

hvis den fins. Lengden  $|\mathbf{r}'(t)|$  kalles *farten* til parametriseringen i  $t$ .

Hvis vi plasserer hastighetsvektoren  $\mathbf{r}'(t)$  slik at den starter i punktet  $\mathbf{r}(t)$ , vil  $\mathbf{r}'(t)$  peke den veien kurven beveger seg akkurat i dette punktet.

#### Definisjon 4 Glatte kurveparametriseringer

En kurveparametrisering  $\mathbf{r}(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]$  sies å være *glatt* i punktet  $t$  hvis den er  $C^1$  og injektiv på en omegn om  $t$ , og Jacobimatrisen

$$\mathbf{r}'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix} = (x_1'(t), \dots, x_n'(t))$$

har rang 1, dvs.  $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ . Hvis  $\mathbf{r}$  er *glatt* i alle punkter i sitt definisjonsområde, kalles den kort og godt *glatt*.

Vi kan så definere hva det vil si at en *kurve* er *glatt*.

#### Definisjon 5 Glatte kurver

En kurve  $C \subseteq \mathbf{R}^n$  kalles *glatt* i et punkt  $\mathbf{a} \in C$  hvis det fins en parametrisering  $\mathbf{r}$  av  $C$  og en  $t \in \mathbf{R}$  slik at  $\mathbf{r}$  er *glatt* i punktet  $t$ , og  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a}$ . Hvis kurven  $C$  er *glatt* i alle sine punkter, kalles den *glatt*.

I punkter der en kurve er *glatt*, kan vi definere begrepet *tangentlinje*.

#### Definisjon 6 Tangentlinjer

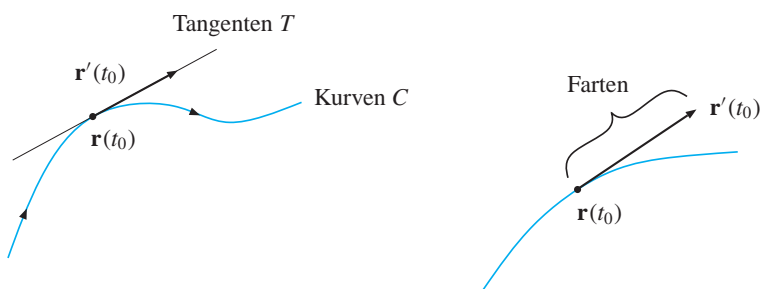
La  $\mathbf{r}(t)$  være en parametrisering av en kurve  $C$ , og anta at  $\mathbf{r}$  er *glatt* i punktet  $t$ . Med *tangentlinjen* til  $\mathbf{r}$  i punktet  $t_0$  menes den rette linjen  $T$  parametrisert for alle  $t \in \mathbf{R}$  ved

$$\mathbf{L}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \mathbf{r}'(t_0) \cdot (t - t_0).$$

Fra definisjon 10.0.0 ser vi at parametriseringen  $\mathbf{L}$  rett og slett er lineærtilnærmingen til  $\mathbf{r}$  i punktet  $t$ . Ved deriverbarhet (definisjon 6.5.2) går feilen til  $\mathbf{L}(t)$  mot 0 fortere enn avstanden  $t - t_0$  når  $t \rightarrow t_0$ , dvs.

$$\mathbf{r}(t) \approx \mathbf{L}(t)$$

når  $t$  er nær  $t_0$ . Dette betyr at verd mengden til  $\mathbf{L}$ , som er tangenten  $T$ , ligger "inntil" kurven til  $\mathbf{r}$  rundt punktet  $\mathbf{r}(t_0)$ . Se figuren øverst neste side.



Merk at hastighetsvektoren

$$\mathbf{r}'(t_0)$$

er retningsvektor for  $T$ . Generelt kalles alle vektorer  $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$  som er parallelle med vektoren  $\mathbf{r}'(t_0)$  for *tangentvektorer* til kurven  $C$  i punktet  $\mathbf{r}(t_0)$ . En **enhetstangentvektor** er en tangentvektor med lengde 1.

## Stykkevis glatthet

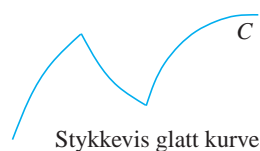
En kontinuerlig kurveparametrisering

$$\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$$

kalles **stykkevis glatt** hvis

- det finnes en delmengde  $U \subseteq [a, b]$  slik at  $\mathbf{r}$  er glatt og injektiv på  $U$ ,
- komponentene til  $\mathbf{r}'$  er begrensede på  $U$ , og
- komplementet til  $U$  i  $[a, b]$  består av et endelig antall punkter.

En kurve  $C \subseteq \mathbf{R}^n$  kalles **stykkevis glatt** hvis den er verdimgenden til stykkevis glatt kurveparametrisering. En typisk stykkevis glatt kurve er vist på figuren under. Poenget er at kurven kan ha et endelig antall knekk.





## 6.8 Differensialgeometri for kurver

*Differensialgeometri* er et område i matematikken der man bruker teknikker fra matematisk analyse, såsom grenseoverganger og derivasjon, til å studere geometriske objekter. I denne seksjonen skal vi utvikle litt differensialgeometri for kurver. Blant begrepene vi skal ta for oss er *krumning* av en kurve. Men først et resultat om derivasjon. Merk at regel (4) og (5) er analoge til vår tidligere produktregel for derivasjon.

### Teorem 1 Derivasjonsregler for kurver

La  $\mathbf{u}(t)$  og  $\mathbf{v}(t)$  være kurveparametriseringer i  $\mathbf{R}^n$ , og  $h(t)$  en vanlig derivert skalarfunksjon  $h: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ . La  $c$  være en konstant. Hvis  $u$  og  $v$  er partielt deriverbare i punktet  $t$ , gjelder

1.  $[\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)]' = \mathbf{u}'(t) + \mathbf{v}'(t)$
2.  $[c\mathbf{u}(t)]' = c\mathbf{u}'(t)$
3.  $[h(t)\mathbf{u}(t)]' = h'(t)\mathbf{u}(t) + h(t)\mathbf{u}'(t)$
4.  $[\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)]' = \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t)$
5.  $[\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)]' = \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}'(t)$

**Bevis** For enkelthets skyld antar vi at  $\mathbf{u}$  og  $\mathbf{v}$  er kurver i planet  $\mathbf{R}^2$ . Beviset er akkurat det samme i høyere dimensjoner. Vi skriver

$$\mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_2(t)) \quad \text{og} \quad \mathbf{v}(t) = (v_1(t), v_2(t)).$$

Regel (4) kan nå bevises slik:

$$\begin{aligned} [\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)]' &= [u_1(t)v_1(t) + u_2(t)v_2(t)]' \\ &= [u_1'(t)v_1(t) + u_1(t)v_1'(t)] + [u_2'(t)v_2(t) + u_2(t)v_2'(t)] \\ &= \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t). \end{aligned}$$

Her brukte jeg den vanlige produktregelen for skalarfunksjoner, som vi allerede vet at gjelder. De øvrige reglene vises på tilsvarende måte. ■

### Akselerasjon og enhetsnormal

La oss tenke oss at vi er gitt en kurveparametrisering  $\mathbf{r}: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$ . Vi skal definere endel nye begreper knyttet til en slik parametrisering, og vi underforstår i resten av seksjonen at parametriseringen er såpass "glatt og fin" at de størrelsene som inngår i definisjonene eksisterer. I forbindelse med det vi nå skal

gjøre, er det lurt å tenke ren "fysikk". Tenk deg at et lite massepunkt beveger seg i rommet ved å følge kurveparametriseringen  $\mathbf{r}(t)$ . *Hastighetsvektoren* til en kurveparametrisering skrives ofte  $\mathbf{v}(t)$ . Lengden av  $\mathbf{v}(t)$  kalles som nevnt *farten*, og skrives gjerne  $v(t)$ . Altså

$$v(t) = |\mathbf{v}(t)| = |\mathbf{r}'(t)|.$$

Parametriseringen  $\mathbf{r}(t)$  definerer også en *enhetstangentvektor*  $\mathbf{T}(t)$  og en **akselerasjonsvektor**  $\mathbf{a}(t)$  ved

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{v}(t)}{|\mathbf{v}(t)|} \quad \text{og} \quad \mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t).$$

Vektoren  $\mathbf{T}(t)$  har lengde 1 og peker samme vei som  $\mathbf{v}(t)$ . Akselerasjonsvektoren  $\mathbf{a}(t)$  skrives også  $\mathbf{r}''(t)$ , fordi den fås ved å derivere  $\mathbf{r}(t)$  to ganger. Vektoren  $\mathbf{a}(t)$  beskriver endringen i hastigheten  $\mathbf{v}(t)$ , både med retning og størrelse.

**Eksempel 1** Vi legger koordinatsystemet slik at Jorden ligger med sentrum i origo i  $\mathbf{R}^3$ . Anta at posisjonen til en viss satelitt som funksjon av tiden  $t$  (timer) er

$$\mathbf{r}(t) = (R \cos t, R \sin t, 0),$$

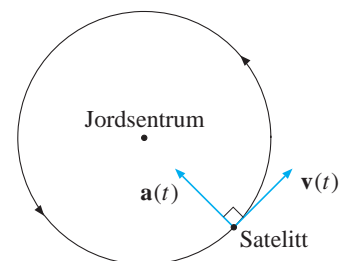
der  $R > 0$  er konstant. Dette betyr at satelittens bane er en sirkel i  $xy$ -planet med radius  $R$ . Satelitten bruker  $2\pi \approx 6.3$  timer pr. omløp om Jorden. Hastighetsvektoren og akselerasjonsvektoren til satelitten blir

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= (-R \sin t, R \cos t, 0) \\ \mathbf{a}(t) &= (-R \cos t, -R \sin t, 0). \end{aligned}$$

Vi får

$$\mathbf{a}(t) = -R \cdot (\cos t, \sin t, 0) = -R \cdot \mathbf{r}(t).$$

Dette betyr at akselerasjonen  $\mathbf{a}$  hele tiden er rettet direkte inn mot origo, altså Jordens sentrum. Vi har  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = 0$ , dvs. hastigheten og akselerasjonen står vinkelrett på hverandre. Se figuren til høyre. ■

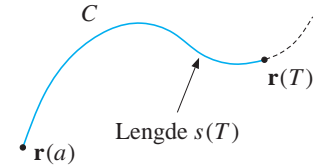


## Buelengde

Gitt en kurveparametrisering  $\mathbf{r}(t)$  av en kurve  $C$ . Buelengden  $s(t)$  av  $C$  fra et valgt startpunkt  $\mathbf{r}(a)$  til punktet  $\mathbf{r}(T)$  er definert ved

$$s(T) = \int_a^T v(t) dt.$$

Denne definisjonen er den eneste naturlige, rett og slett fordi den oppfyller  $s(a) = 0$  og  $s'(t) = v(t)$ , jfr. fundamentalteoremet.



**Eksempel 2** Spiralkurven i eksempel 10.0.0 var parametrisert ved

$$\mathbf{r} = (\cos t, \sin t, t). \quad (1)$$

Hastighetsvektoren er her  $\mathbf{r}'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$ . Farten blir

$$v(t) = |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}.$$

Buelengden fra startpunktet  $\mathbf{r}(0)$  til punktet  $\mathbf{r}(t)$  blir dermed

$$s(T) = \int_0^T v(t) dt = \int_0^T \sqrt{2} dt = \left[ \sqrt{2} \cdot t \right]_0^T = \sqrt{2} \cdot T.$$

Spesielt er lengden av den første runden på spiralen  $s(2\pi) = 2\sqrt{2}\pi$ . ■

Gitt en parametrisering  $\mathbf{r}(t)$  av en kurve  $C$ . Vi kan da lage en alternativ parametrisering av  $C$  ved å bruke buelengden  $s$  fra et gitt startpunkt som parameter. Dette kalles å parametrisere  $C$  ved buelengde. I eksempel 2 fant vi at  $s = \sqrt{2} \cdot T$  i punktet  $t = T$ , så  $t = s/\sqrt{2}$ . Innsatt i (1) fås

$$\mathbf{u}(s) = \left( \cos(s/\sqrt{2}), \sin(s/\sqrt{2}), s/\sqrt{2} \right).$$

Dette er parametriseringen av spiralen ved buelengde, gitt at vi bruker punktet  $\mathbf{r}(0) = (1, 0, 0)$  som startpunkt.

## Krumning

La oss igjen ta utgangspunkt i en parametrisering  $\mathbf{r}(t)$  av en kurve  $C$ . Siden enhetstangenten  $\mathbf{T}$  definert av  $\mathbf{r}$  har lengde 1, har vi

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{T} = 1$$

langs hele kurven vår. Derivasjon av denne likningen med hensyn på buelengden  $s$  som parameter, gir ved regel (4) i teorem 6.8.1

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{ds} = 0, \quad \text{dvs.} \quad 2 \cdot \frac{d\mathbf{T}}{ds} \cdot \mathbf{T} = 0.$$

Så vektoren

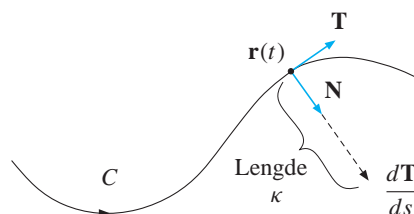
$$\frac{d\mathbf{T}}{ds}$$

står vinkelrett på  $\mathbf{T}$ . Denne vektoren forteller hvordan enhetstangentvektoren til kurven endrer seg, som funksjon av buelengden bortover kurven. Siden enhetstangentvektoren hele veien har lengde 1, er det bare *retningen* som kan endres. Slike endringer må ha med at kurven “krummer” å gjøre. Inspirert av dette definerer vi *krumningen*  $\kappa$  til kurven som lengden av denne vektoren, og **hovednormalen**  $\mathbf{N}$  som enhetsvektoren parallell med den. Kjernerregelen gir oss da:

$$\kappa(t) \stackrel{\text{def}}{=} \left| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right| = \left| \frac{d\mathbf{T}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} \right| = \frac{1}{v(t)} \cdot \left| \frac{d\mathbf{T}}{dt} \right| \quad (2)$$

$$\mathbf{N}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\kappa(t)} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{1}{\kappa(t)} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\kappa(t)v(t)} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{dt} \quad (3)$$

Vektoren  $\mathbf{N}(t)$  har lengde 1, står vinkelrett på  $\mathbf{T}(t)$  og peker den veien  $C$  intuitivt sett “krummer”. Figur:



I praksis kan vi velge oss en hvilken som helst passende parametrisering  $\mathbf{r}(t)$ , og så regne ut krumningen  $\kappa$  og hovednormalen  $\mathbf{N}$  ut fra uttrykkene lengst til høyre i (2) og (3). Men merk at siden både krumningen og hovednormalen i utgangspunktet er definert ut fra begrepene *buelengde* og *enhetstangentvektor*, er de uavhengige av hvilken parametrisering vi bruker. Vi kan altså snakke om krumning og hovednormal for selve kurven  $C$ .

**Eksempel 3** Vi skal finne krumningen til en sirkel med radius  $R$ . Vi legger sirkelen i  $xy$ -planet med sentrum i origo, og parametriserer den ved

$$\mathbf{r}(t) = (R \cos t, R \sin t, 0).$$

Dette gir  $\mathbf{v}(t) = (-R \sin t, R \cos t, 0)$ , og  $v(t) = |\mathbf{v}| = R$ . Ergo er

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{v}(t)}{v(t)} = (-\sin t, \cos t, 0).$$

Så ved (1) er

$$\kappa(t) = \frac{1}{v(t)} \cdot \left| \frac{d\mathbf{T}}{dt} \right| = \frac{1}{R} \cdot |(-\cos t, -\sin t, 0)| = \frac{1}{R} \cdot 1 = \frac{1}{R}. \quad \blacksquare$$

Derivasjon av likningen  $\mathbf{v}(t) = v(t)\mathbf{T}(t)$  med hensyn på  $t$  gir ved regel (3) i teorem 12.99

$$\mathbf{a}(t) = v'(t)\mathbf{T}(t) + v(t)\mathbf{T}'(t) = v'(t)\mathbf{T}(t) + \kappa(t) \cdot (v(t))^2\mathbf{N}(t),$$

der jeg brukte (3) i siste overgang. Vi har her fått uttrykt akselerasjonen  $\mathbf{a}(t)$  ved  $\mathbf{T}$  og  $\mathbf{N}$ . Inspirert av dette definerer vi **tangentialakselerasjonen**  $a_T(t)$  og **normalakselerasjonen**  $a_N(t)$  for  $\mathbf{r}$  i punktet  $t$  ved

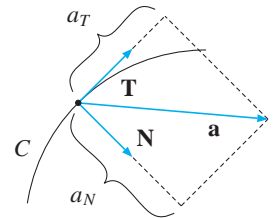
$$a_T(t) = v'(t) \qquad a_N(t) = \kappa(t) \cdot (v(t))^2$$

Vi har da

$$\mathbf{a} = a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N}.$$

Se figur til høyre. Løsning med hensyn på  $\mathbf{N}$  gir oss en alternativ formel for hovednormalen:

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{a} - a_T\mathbf{T}}{a_N}$$



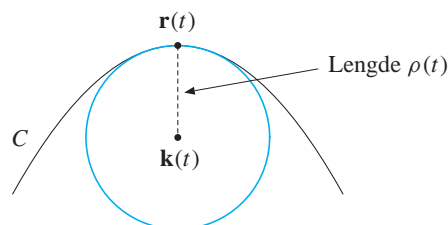
I eksempel 3 så vi at en sirkel med radius  $\rho$  har krumning  $\kappa = 1/\rho$ . Inspirert av det definerer vi **krumningsradien**  $\rho(t)$  til en vilkårlig kurve  $C$  i punktet  $t$  ved

$$\rho(t) = \frac{1}{\kappa(t)}.$$

Videre definerer vi **krumningscenteret**  $\mathbf{k}(t)$  i punktet  $t$  ved

$$\mathbf{k}(t) = \mathbf{r}(t) + \rho(t) \cdot \mathbf{N}(t).$$

Hvis  $C$  er en kurve i planet, kalles sirkelen med sentrum i  $\mathbf{k}(t)$  og radius  $\rho(t)$  for den *osculerende sirkelen* til kurven  $C$  i punktet  $t$ . Denne sirkelen tangerer  $C$  i punktet  $t$  og har samme krumning som  $C$  har akkurat der. Figur:



## 6.8 Oppgaver

1. La  $\mathbf{r}(t)$  være en deriverbar parametrisering i  $\mathbf{R}^3$  som er slik at

$$\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t) = R^2$$

for alle  $t$ , der  $R > 0$  er et konstant tall. Gi en geometrisk tolkning av hvordan parametriseringen beveger seg, og vis at

$$\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}(t) = 0.$$

2. La  $\mathbf{r}(t)$  være en deriverbar parametrisering i  $\mathbf{R}^3$  som er slik at hastigheten  $v(t)$  er konstant for alle  $t$ . Vis at da er

$$\mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0.$$

3. Betrakt kurven  $C \subseteq \mathbf{R}^3$  parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t) \quad \text{for } t \in [0, 2\pi].$$

- Skisser kurven. Finn hastighetsvektoren til  $\mathbf{r}$ . Hva er farten i punktet  $t = \pi$ ?
  - Finn enhetstangentvektoren til  $C$  definert av  $\mathbf{r}$  i punktet  $t = \pi$ .
  - Finn akselerasjonsvektoren til  $\mathbf{r}$ . Hva blir akselerasjonsvektoren for  $t = \pi$ ?
  - Finn krumning, krumningsradius og hovednormal til kurven  $C$  i punktet  $t = \pi$ .
  - Bestem tangentialakselerasjonen og normalakselerasjonen til  $\mathbf{r}$  i punktet  $t = \pi$ .
4. La  $C \subseteq \mathbf{R}^3$  være kurven parametrisert ved  $\mathbf{r}(t) = (t, 2t, 3t)$  for  $t \in [0, 5]$ . Parametriser  $C$  ved buelengde, med startpunkt  $(0, 0, 0)$ .

5. Gitt en kurve  $C \subseteq \mathbf{R}^3$  med parametrisering  $\mathbf{r}$ . Vis, ved å regne ut vektorproduktet av likningen

$$\mathbf{v} = v\mathbf{T}$$

med likningen  $\mathbf{a} = a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N}$ , at krumningen til kurven kan regnes ut ved formelen

$$\kappa = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{(v(t))^3}.$$

6. Gitt en kurve  $C \subseteq \mathbf{R}^2$  med parametrisering  $\mathbf{r} = (x(t), y(t))$ . Bruk resultatet fra oppgave 5 til å vise at krumningen til kurven kan regnes ut ved formelen

$$\kappa = \frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{(v(t))^3}$$

Hvordan blir denne formelen hvis  $x'(t) = 1$ ? Bruk resultatet til å lage en formel for krumningen til en graf  $y = f(x)$  i planet, der  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  er en deriverbar funksjon.

7. La  $C$  være ellipsen i planet gitt ved likningen

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1.$$

- Skisser ellipsen  $C$ , og finn en parametrisering av den.
- Regn ut krumningen, hovednormal og krumningsradius til  $C$  i punktet  $(0, 2)$ .
- Finn krumningssenteret til ellipsen i punktet  $(0, 2)$ , og bestem så likningen for den osculerende sirkelen i punktet. Tegn inn denne sirkelen på figuren fra a).

## 6.9 Flater

Teorien for *flater* er analog til teorien for kurver.

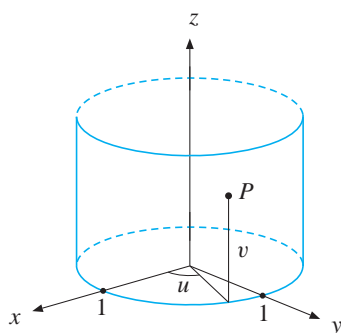
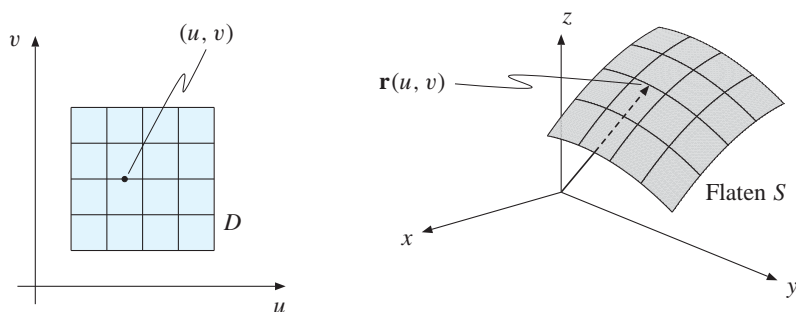
### Definisjon 1 Flater og flateparametriseringer

En *flate-parametrisering* er en funksjon

$$\mathbf{r}; \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^n.$$

Verdimengden  $S$  til  $\mathbf{r}$  kalles en **flate** i  $\mathbf{R}^n$ , og  $\mathbf{r}$  er en *parametrisering av flaten*  $S$ . Definisjonsområdet til  $\mathbf{r}$  kalles *parameterområdet* til  $\mathbf{r}$ .

Illustrasjon: For hvert punkt  $(u, v)$  kan vi tenke oss vektoren  $\mathbf{r}(u, v)$  avsatt med startpunkt i origo. Når parameterne  $u$  og  $v$  varierer gjennom området  $D$  i  $uv$ -planet, sveiper spissen til vektoren ut en flate i  $\mathbf{R}^n$ . På figurene under er dette vist for en flate i  $\mathbf{R}^3$ .



Figur 6.9.3

**Eksempel 1** Finn en parametrisering av sylindringen  $x^2 + y^2 = 1$  i  $\mathbf{R}^3$ .

**Løsning** Først tegner vi en figur. Deretter må vi finne en naturlig måte å angi hvor et gitt punkt  $P$  på sylindringen ligger, dvs. finne et naturlig "kart" på sylindringen. Jeg synes det er naturlig å bruke polarvinkelen  $\theta$  i  $xy$ -planet, samt høyden  $z$  opp til  $P$ . Se figur 6.9.3. Jeg setter derfor  $u = \theta$  og  $v = z$ . Vi må så uttrykke koordinatene  $(x, y, z)$  til  $P$  ved  $u$  og  $v$ . Dette tilsvarer å bruke sylindrikoordinater med  $r = 1$ , så

$$\begin{cases} x = \cos u \\ y = \sin u \\ z = v. \end{cases}$$

Parametriseringen er altså  $\mathbf{r}(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$ . For å dekke sylindringen én gang, velger vi parameterområdet  $D$  gitt ved  $u \in [0, 2\pi)$ ,  $v \in \mathbf{R}$ . ■

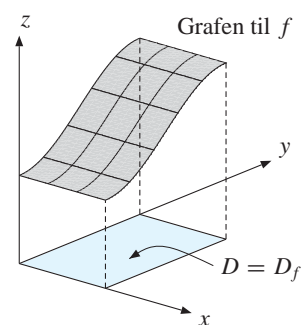
**Eksempel 2** Hvis  $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  er en funksjon av to variable, er grafen til  $f$  en flate i  $\mathbf{R}^3$ .

Vi kan parametrisere den ved å sette

$$\mathbf{r}(u, v) = (u, v, f(u, v))$$

for  $(u, v) \in D_f$ . Så parameterområdet er her  $D = D_f$ . Setter vi  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ , kan parametriseringen skrives

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v) \end{cases} \quad \text{for } (u, v) \in D_f. \quad \blacksquare$$



### Definisjon 2 Plan i $\mathbf{R}^n$

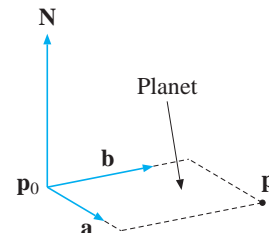
La  $\mathbf{p}_0$  være et punkt i  $\mathbf{R}^n$ , og la  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  være to lineært uavhengige vektorer i  $\mathbf{R}^n$ . Flaten  $P \subseteq \mathbf{R}^n$  parametrisert ved

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{p}_0 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$$

for alle  $(u, v) \in \mathbf{R}^2$ , kalles da et **plan** i  $\mathbf{R}^n$ . Merk at  $P$  inneholder  $\mathbf{p}_0$ .

La oss sjekke at denne definisjonen av plan stemmer med vår gamle fra kapittel 10.0.0 i tilfellet  $\mathbf{R}^3$ : En normal til planet i boksen over blir  $\mathbf{N} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ .

Et punkt  $\mathbf{p}$  ligger i  $P$  hvis og bare hvis  $\mathbf{p} - \mathbf{p}_0 = u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$ , dvs. at  $\mathbf{p} - \mathbf{p}_0$  er en lineærkombinasjon av  $\mathbf{a}$  og  $\mathbf{b}$ . Dette er igjen ekvivalent med at vektoren  $\mathbf{p} - \mathbf{p}_0$  står vinkelrett på  $\mathbf{N}$ .



**Eksempel 3** Betrakt planet  $H \subseteq \mathbf{R}^3$  definert ved parametriseringen  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ , der

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ -1 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{dvs.} \quad \begin{cases} x = 2 + 5u + 3v \\ y = 3 - 7u + 4v \\ z = 9 - u. \end{cases}$$

Her er  $\mathbf{p}_0 = (2, 3, 9)$ ,  $\mathbf{a} = (5, -7, -1)$  og  $\mathbf{b} = (3, 4, 0)$ . For å få likningen til  $H$ , regner vi først ut normalvektoren  $\mathbf{N} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = (4, -3, 41)$  til planet. Med  $(x_0, y_0, z_0) = (2, 3, 9)$  som fast punkt blir (se side 10.0.0) likningen  $4(x - 2) - 3(y - 3) + 41(z - 9) = 0$ , dvs.  $4x - 3y + 41z = 368$ .  $\blacksquare$



**Definisjon 3 Hastighetsvektorer**

Med *hastighetsvektorene* til en flateparametrisering

$$\mathbf{r}(u, v) = (x_1(u, v), \dots, x_n(u, v))$$

i et punkt  $(u, v) \in D_r$  menes de to vektorene

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} \\ \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial u} \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial v} \\ \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial v} \end{bmatrix}$$

hvis disse fins. De partiellderiverte i vektorene skal regnes ut i  $(u, v)$ .

Hastighetsvektorene til en flateparametrisering forteller hvor fort parameterpunktet beveger seg som funksjon av hver parameter, når den andre parameteren holdes fast. Et eksempel viser hvordan det fungerer.

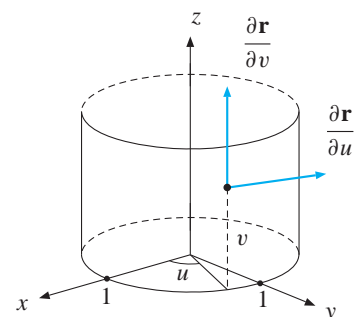
**Eksempel 4** Parametriseringen av sylindringen i eksempel 1 var

$$\mathbf{r}(u, v) = (\cos u, \sin u, v).$$

Hastighetsvektorene blir dermed (jeg skriver dem horisontalt)

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = (-\sin u, \cos u, 0) \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (0, 0, 1)$$

Disse to vektorene er illustrert på figuren til høyre. På figuren er vektorene tegnet inn i et typisk punkt  $(u, v)$ . Vektoren  $\partial \mathbf{r} / \partial u$  peker horisontalt, fordi dette er den veien parameterpunktet flytter seg som funksjon av  $u$ , når  $v$  (som angir høyden) holdes fast. Vektoren  $\partial \mathbf{r} / \partial v$  peker rett oppover, fordi dette er den veien parameterpunktet flytter seg når  $u$  (som angir vinkelen) holdes fast. Merk ellers at i dette eksemplet har begge hastighetsvektorene lengde 1, og de står vinkelrett på hverandre. Slik er det ikke alltid. ■



## Glatthet. Tangentflater

Definisjonen av hva det vil si at en flate er *glatt* i et punkt er analog til den tilsvarende definisjonen for kurver. For at en parametrisering ikke skal "stoppe opp" eller trykke sammen bildet av parameterområdet, må vi kreve at hastighetsvektorene begge er ulik null, og at de ikke er parallelle (dvs. at de "spriker"). Dette er det samme som å si at vektorene er lineært uavhengige. Vi kan formulere definisjonen slik:

### Definisjon 4    Glatte flateparametriseringer

En flateparametrisering  $\mathbf{r}(u, v) = (x_1(u, v), \dots, x_n(u, v))$  kalles *glatt* i punktet  $(u, v) \in \mathbf{R}$  hvis den er  $C^1$  og injektiv på en omegn om  $(u, v)$ , og Jacobimatrisen

$$\mathbf{r}'(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_1}{\partial v} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial u} & \frac{\partial x_n}{\partial v} \end{bmatrix}$$

har rang 2. Ved teorem 10.0.0 er kravet om rang 2 ekvivalent med at søylene

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v) \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v)$$

fra Jacobimatrisen, altså hastighetsvektorene til parametriseringen, er *lineært uavhengige* i punktet  $(u, v)$ .

### Eksempel 5

 La oss sjekke om parametriseringen

$$\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = (\cos u, \sin u, v)$$

av sylinderen i eksempel 1 er *glatt*. Parametriseringen er klart  $C^1$  og injektiv. Vi regnet ut hastighetsvektorene i eksempel 4. En kjapp måte å sjekke lineær avhengighet for vektorer i  $\mathbf{R}^3$ , er å regne ut kryssproduktet. To vektorer i  $\mathbf{R}^3$  er lineært uavhengige hvis og bare hvis kryssproduktet av dem ikke er lik nullvektoren. Vi prøver:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ -\sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\cos u, \sin u, 0).$$

Lengden av denne vektoren er  $\sqrt{\sin^2 u + \cos^2 u + 0} = 1$  for alle  $(u, v)$ , så vi vet at vektoren ikke er  $\mathbf{0}$ . Ergo er de to hastighetsvektorene lineært uavhengige, og parametriseringen er *glatt*. ■

**Definisjon 5 Glatte flater**

En flate  $S \subseteq \mathbf{R}^n$  kalles *glatt* i punktet  $\mathbf{a} \in S$  hvis det fins en parametrisering  $\mathbf{r}$  av  $S$  og et punkt  $(u, v)$  slik at  $\mathbf{r}$  er glatt i  $(u, v)$ , og  $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{a}$ . Hvis  $S$  er glatt i alle sine punkter, kalles den *glatt*.

I punkter der en flate er glatt, kan vi definere begrepet *tangentplan*.

**Definisjon 6 Tangentflater**

La  $\mathbf{r}(u, v)$  være en parametrisering av en flate  $S$ , og anta at  $\mathbf{r}$  er glatt i punktet  $(u_0, v_0)$ . Med *tangentplanet* til  $r$  i punktet  $(u_0, v_0)$  menes flaten  $T$  parametrisert for alle  $(u, v) \in \mathbf{R}^2$  ved

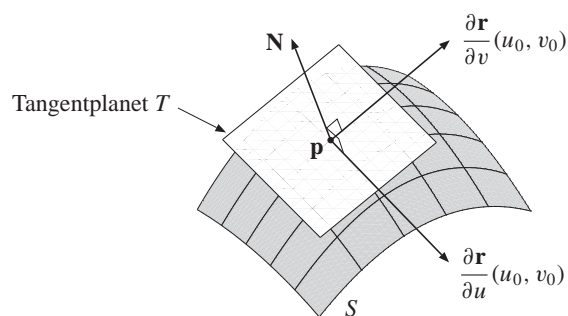
$$\mathbf{L}(u, v) = \mathbf{r}(u_0, v_0) + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0) \cdot (u - u_0) + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0) \cdot (v - v_0).$$

Fra definisjon 10.0.0 ser vi at parametriseringen  $\mathbf{L}$  er lineærtilnærmingen til  $\mathbf{r}$  i punktet  $(u_0, v_0)$ . Ved deriverbarhet går feilen til  $\mathbf{L}(u, v)$  mot 0 forttere enn avstanden fra  $(u, v)$  til  $(u_0, v_0)$  når  $(u, v) \rightarrow (u_0, v_0)$ , dvs.  $\mathbf{L}(u, v) \approx \mathbf{r}(u, v)$  når  $(u, v)$  er nær  $(u_0, v_0)$ . Dette betyr at verdimgden til  $\mathbf{L}$ , som er tangentplanet  $T$ , ligger “inntil” flaten  $S$  rundt  $(u_0, v_0)$ .

For flater i  $\mathbf{R}^3$  kan vi trekke mer geometri ut av dette. Parametriseringen  $\mathbf{L}$  av tangentplanet er slik at hastighetsvektorene til  $\mathbf{r}$  ligger i  $T$ . Ergo er vektoren

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$$

en normalvektor til  $T$ . Vektoren  $\mathbf{N}$  kalles *normalvektoren* til flaten  $S$  i punktet  $\mathbf{p} = \mathbf{r}(u_0, v_0)$  definert av parametriseringen  $\mathbf{r}$ . Figur:

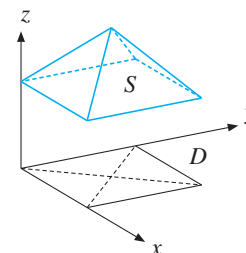


Generelt kalles alle vektorer  $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$  som står normalt på tangentplanet  $T$  for normalvektorer til flaten  $S$  i punktet  $\mathbf{r}(u_0, v_0)$ . En *enhets-normalvektor* er en normalvektor med lengde 1.

## Stykkevis glatthet

En typisk stykkevis glatt flate ser ut som om den har et endelig antall "bretter", slik som det "svevende pyramidetaket" på figuren under.

Presis definisjon: En kontinuerlig flateparametrisering  $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbf{R}^n$  kalles *stykkevis glatt* hvis det fins en begrenset delmengde  $U \subseteq D$  slik at  $\mathbf{r}$  er glatt og injektiv på  $U$ , alle partielle deriverte av komponentene til  $\mathbf{r}$  er begrensede på  $U$ , og komplementet  $D \setminus U$  er inneholdt i unionen av endelig mange stykkevis glatte kurver i  $\mathbf{R}^2$ . (Disse kurvene er stiplet på figuren til høyre.) En flate  $S \subseteq \mathbf{R}^3$  kalles stykkevis glatt hvis den er verdimgden til en stykkevis glatt flateparametrisering.



## 6.9 Oppgaver

I oppgavene 1–7 skal du finne en parametrisering av den gitte flaten  $S \subseteq \mathbf{R}^3$ .

**1.**  $S$  er den delen av paraboloiden  $z = 1 - x^2 - y^2$  som oppfyller  $z \geq 0$ .

**2.**  $S$  er sfæren  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ .

**3.**  $S$  er mengden av punkter  $(x, y, z)$  slik at vi har  $x + 3y - 5z = 1$  og  $x^2 + y^2 \leq 4$ .

**4.**  $S$  består av de punktene  $(x, y, z)$  på flaten  $y = 2 + x^2 + z^2$  som oppfyller  $x^2 + z^2 \leq 1$ .

**5.**  $S$  er mengden bestående av de punktene på sylindringen  $x^2 + 4z^2 = 1$  som oppfyller  $y \in [-1, 1]$ .

**6.**  $S$  er mengden av punkter  $(x, y, z)$  slik at vi har  $x = \sqrt{y^2 + z^2}$  og  $|y| \leq 1, |z| \leq 1$ .

**7.**  $S$  er flaten bestående av de punktene på sylindringen  $x^2 + y^2 - 2y = 0$  som oppfyller  $-1 \leq z \leq 0$ .

**8.** Gitt parametriseringen  $\mathbf{r}$  i eksempel 6.9.4. Regn ut normalvektoren  $\mathbf{N} = (\partial\mathbf{r}/\partial u) \times (\partial\mathbf{r}/\partial v)$  definert av parametriseringen

$\mathbf{r}$ . Finn en parametrisering av tangentplanet til flaten  $S$  i punktet  $(1, 0, 1)$ . Vis at  $S$  er glatt overalt.

**9.** La  $S \subseteq \mathbf{R}^3$  være grafen til en deriverbar funksjon  $f; \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ . Parametriser  $S$  ved  $x = u, y = v$  og  $z = f(u, v)$ , for  $(u, v) \in D_f$ . Finn normalvektoren  $\mathbf{N}$  definert av denne parametriseringen i punktet  $(a, b, f(a, b)) \in S$ .

**10.** La  $f; \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  være en deriverbar funksjon, og la  $(a, b)$  være et indre punkt i  $D_f$ . Vis at tangentplanet til  $f$  slik dette ble definert s. 194 er det samme som tangentplanet til grafen til  $f$  i punktet  $(a, b, f(a, b))$  når grafen betraktes som en flate.

**11.** Vis at verdimgden til parametriseringen gitt ved  $\mathbf{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u, v)$  er en glatt flate i  $\mathbf{R}^4$ .

**12.** La  $\mathbf{r}$  være parametriseringen fra eksempel 6.9.4.

- Begrunn at  $\mathbf{s}(t) = \mathbf{r}(t, 2)$  parametriserer snittkurven mellom flaten  $S$  og planet  $z = 2$ .
- Begrunn at  $\mathbf{h}(t) = \mathbf{r}(\pi/4, t)$  parametriserer snittkurven mellom  $S$  og planet  $x = y$ .
- Finn  $\partial\mathbf{r}/\partial u(\pi/4, 2)$  og  $\partial\mathbf{r}/\partial v(\pi/4, 2)$ , samt  $\mathbf{s}'(\pi/4)$  og  $\mathbf{h}'(2)$ . Hva ser du? Forklar sammenhengen, og illustrer på en figur.

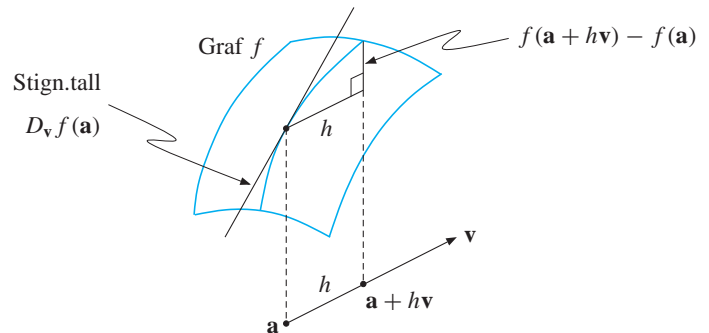
## 6.10 Gradienter og retningsderiverte

### Definisjon 1 Retningsderiverte

La  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ , la  $\mathbf{a}$  være i det indre av  $D_f$ , og la  $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$  være en vektor av lengde 1. Den *retningsderiverte* av  $f$  i retning  $\mathbf{v}$  ut fra  $\mathbf{a}$  er

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{h}$$

Den retningsderiverte  $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a})$  måler hvor raskt grafen til  $f$  stiger eller synker når vi beveger oss ut fra  $\mathbf{a}$  i retningen gitt av  $\mathbf{v}$ . Se figuren under. Fra definisjonen følger at den partielle deriverte  $\partial f / \partial x_i$  av  $f$  er det samme som den retningsderiverte av  $f$  i retningen bestemt av standardbasisvektoren  $\mathbf{v} = \epsilon_i$ .



### Definisjon 2 Gradienten

Anta at  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  er partielt deriverbar i  $\mathbf{a}$ . Med **gradienten** til funksjonen  $f$  i punktet  $\mathbf{a}$  mener man vektoren  $\nabla f(\mathbf{a})$  definert ved

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \right]$$

Merk at gradienten  $\nabla f(\mathbf{a})$  er skrevet horisontalt med komma mellom komponentene, dvs. den defineres som en *vektor*. Alternativt kan vi skrive  $\nabla f(\mathbf{a})$  som en søylevektor, husk konvensjonen innført side 10.0.0. Gradienten er altså ikke samme objekt som Jacobimatrisen  $J_f(\mathbf{a})$ , som er en  $(1 \times n)$ -matrise med de samme komponentene som  $\nabla f(\mathbf{a})$ .

**Teorem 1 Retningsderiverte og gradienter**

Hvis  $f; \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  er  $C^1$  i punktet  $\mathbf{a}$ , så er

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v} = |\nabla f(\mathbf{a})| \cos \theta$$

for alle vektorer  $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$  med lengde 1, der  $\theta$  er vinkelen mellom vektoren  $\mathbf{v}$  og gradienten  $\nabla f(\mathbf{a})$ .

**Bevis** Definer  $g; \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  ved  $g(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{v})$  på et lite intervall om 0. Da er

$$g'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{h} = D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}).$$

Men ved å sette  $\mathbf{h}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{v}$  fås  $g(t) = f(\mathbf{h}(t))$ , og kjerneregelen gir da

$$g'(0) = f'(\mathbf{h}(0)) \cdot \mathbf{h}'(0) = f'(\mathbf{a})\mathbf{h}'(0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

Når man regner ut matriseproduktet lengst til høyre, får man samme svar som ved skalarproduktet  $\nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v}$ . Altså  $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v}$ . Resten følger ved den generelle formelen  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \cos \theta$  for skalarproduktet av to vektorer som danner en vinkel  $\theta$ , husk at  $|\mathbf{v}| = 1$  i vårt tilfelle. ■

Merk at  $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a})$  ifølge teorem 1 blir størst når  $\mathbf{v}$  og  $\nabla f(\mathbf{a})$  har samme retning, dette tilsvarer nemlig  $\cos \theta = 1$ . Med andre ord:

$\nabla f(\mathbf{a})$  peker den veien funksjonsverdien til  $f$  øker raskest ut fra  $\mathbf{a}$ .

Neste teorem sier, røft sagt, at  $\nabla f$  står vinkelrett på nivåmengdene. Dette er intuitivt sett rimelig, fordi bevegelse parallelt med nivåmengden vil gi tilnærmet null endring i funksjonsverdien. Og vi vet jo allerede at gradienten peker den veien funksjonen øker raskest.

**Teorem 2 Gradienter og nivåmengder**

La  $f; \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  være  $C^1$ , og la  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$  være en  $C^1$  kurveparametrisering slik at  $f(\mathbf{r}(t)) = \alpha$  for alle  $t$ , der  $\alpha$  er et gitt tall. Da er

$$\nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0 \quad \text{for alle } t \in \langle a, b \rangle.$$

**Bevis** Skriv  $\mathbf{r}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ , og la  $g : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbf{R}$  være definert ved

$$g(t) = f(\mathbf{r}(t)).$$

Da er  $g(t) = \alpha$  for alle  $t$ , så

$$g'(t) = 0$$

for alle  $t$ . Men på den annen side gir kjerneregelen

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{dx_n}{dt} = \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t).$$

Settes de to uttrykkene for  $g'(t)$  lik hverandre, faller resultatet ut. ■

Tolkning: At  $f(\mathbf{r}(t)) = \alpha$  for alle  $t$ , betyr at  $\mathbf{r}(t)$  alltid ligger i *samme nivå-mengde* for  $f$ . Ifølge teoremet vil da gradientvektoren  $\nabla f(\mathbf{r}(t))$  stå vinkelrett på hastighetsvektoren  $\mathbf{r}'(t)$  til kurven. Dette er nettopp en presis måte å uttrykke at gradienten står vinkelrett på nivåmengden.

## 6.10 Oppgaver

1. I denne oppgaven skal vi se studere polarkoordinater  $r, \theta$  i planet  $\mathbf{R}^2$ . Vi har

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos \theta = x/r \\ \sin \theta = y/r \end{cases}$$

De to vektorene

$$\epsilon_r = (\cos \theta, \sin \theta) \quad \text{og} \quad \epsilon_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta)$$

kalles *enhetsbasisvektorene i polarkoordinater*.

a) Vis at  $\epsilon_r$  og  $\epsilon_\theta$  begge har lengde 1, og at de står vinkelrett på hverandre. Forklar hvordan vektorene peker hvis de settes slik at de starter i punktet med polarkoordinater  $r, \theta$ .

b) La  $f(x, y)$  være en skalarfunksjon av to variable som kan uttrykkes  $f(x, y) = \hat{f}(r, \theta)$  i polarkoordinater. Vis at hvis de partielle deriverte fins, så er

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos \theta \cdot \frac{\partial \hat{f}}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \cdot \frac{\partial \hat{f}}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sin \theta \cdot \frac{\partial \hat{f}}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \cdot \frac{\partial \hat{f}}{\partial \theta}$$

(Forslag: For å finne  $\partial \theta / \partial x$ , kan du først finne  $\partial(\cos \theta) / \partial x$ , og så bruke at ved kjernereglen er  $\partial(\cos \theta) / \partial x = -\sin \theta \cdot$

$\partial \theta / \partial x$ .)

c) Vis at gradienten til  $f$  kan uttrykkes i polar-koordinater ved

$$\nabla f = \frac{\partial \hat{f}}{\partial r} \epsilon_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{f}}{\partial \theta} \epsilon_\theta.$$

2. Med kulekoordinater  $\rho, \theta, \phi$  i rommet har vi

$$\begin{cases} x = \rho \sin \phi \cos \theta \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \tan \theta = y/x \\ \cos \phi = z/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \end{cases}$$

a) Vektorene

$$\begin{cases} \epsilon_\rho = (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi) \\ \epsilon_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta, 0) \\ \epsilon_\phi = (\cos \phi \cos \theta, \cos \phi \sin \theta, -\sin \phi) \end{cases}$$

kalles *enhetsbasisen i kulekoordinater*. Vis at de er ortogonale og har lengde 1. Forklar hvordan de peker når startpunktet har kulekoordinater  $\rho, \theta, \phi$ .

b) Vis ved liknende teknikk som i oppgave 8 at hvis  $f(x, y, z) = \hat{f}(\rho, \theta, \phi)$  er en skalarfunksjon, så kan  $\nabla f$  uttrykkes ved

$$\nabla f = \frac{\partial \hat{f}}{\partial \rho} \epsilon_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{f}}{\partial \theta} \epsilon_\theta + \frac{1}{\rho \sin \phi} \frac{\partial \hat{f}}{\partial \phi} \epsilon_\phi.$$

## 6.11 Implisitt definerte funksjoner

La  $F; \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  være en funksjon av to variable, og la  $\alpha$  være et reelt tall. Mengden  $M$  av alle punkter  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$  slik at

$$F(x, y) = \alpha$$

kalles da en *nivåkurve* for  $F$ , jfr. seksjon 12.1. I denne seksjonen skal vi se på et teorem som sikrer at nivåkurven "lokalt" kan oppfattes som grafen til en funksjon  $y = y(x)$  eller  $x = x(y)$ . Hvis for eksempel

$$F(x, y) = x^2 + y^2,$$

blir nivåkurven  $F(x, y) = \alpha$  sirkelen gitt ved

$$x^2 + y^2 = \alpha.$$

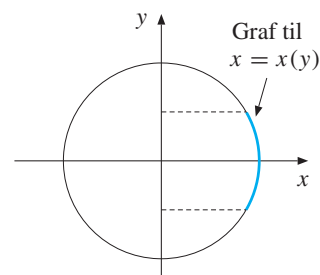
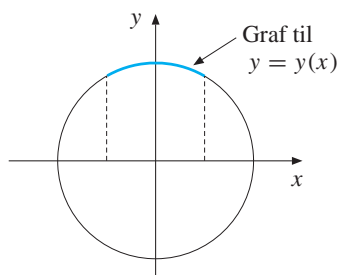
Løser vi mhp.  $y$ , får vi  $y = \pm\sqrt{\alpha - x^2}$ . Begrenser vi oss til øvre halvdel av sirkelen, får vi den entydige løsningen  $y = \sqrt{\alpha - x^2}$ . Her har vi fått skrevet  $y$  som en funksjon

$$y = y(x) = \sqrt{\alpha - x^2}$$

av  $x$ . Vi sier at likningen  $x^2 + y^2 = \alpha$  definerer  $y$  *implisitt* som funksjon av  $x$ , når vi begrenser oss til øvre halvdel av sirkelen. Tilsvarende på nedre halvdel, funksjonsuttrykket blir da  $y = -\sqrt{\alpha - x^2}$ . Ved å løse mhp.  $x$  isteden, kan vi videre si at  $x^2 + y^2 = \alpha$  definerer  $x$  implisitt som funksjon av  $y$  ved

$$x = x(y) = \sqrt{\alpha - y^2}$$

på høyre halvdel av sirkelen, og ved  $x = x(y) = -\sqrt{\alpha - y^2}$  på venstre. På en omegn rundt hvert punkt på sirkelen (dvs. "lokalt") kan vi altså oppfatte sirkelen *enten* som grafen til en funksjon  $y = y(x)$ , *eller* som grafen til en funksjon  $x = x(y)$ , eller begge deler. Se figurer under.

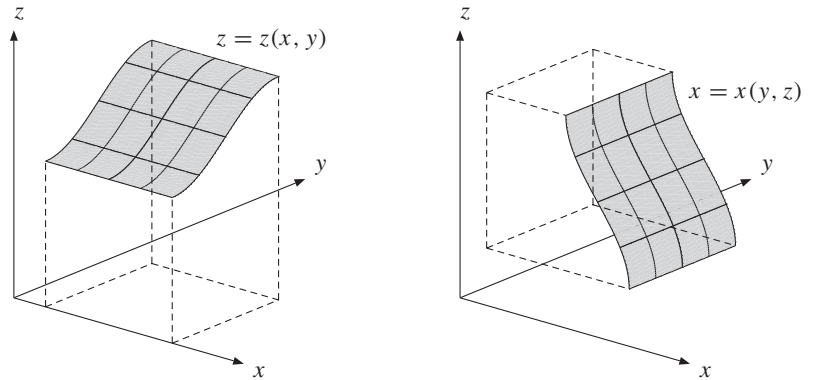




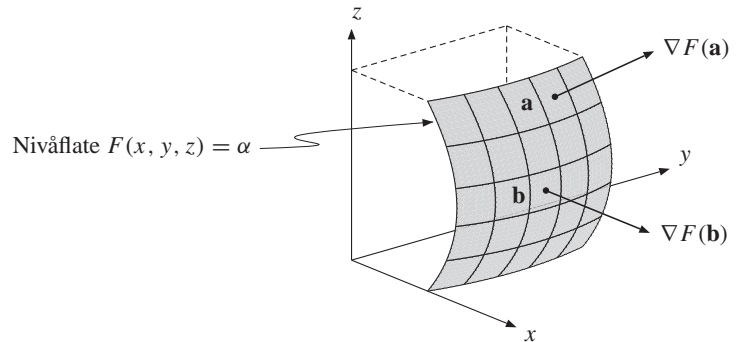
Tilsvarende effekter opptrer for skalarfunksjoner av flere enn to variable. Hvis  $F : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$  er en funksjon av tre variable, vil nivåmengden

$$F(x, y, z) = \alpha$$

typisk være en flate i rommet som lokalt rundt hvert punkt kan oppfattes som grafen til en funksjon  $z = z(x, y)$ , eller  $x = x(y, z)$  eller  $y = y(x, z)$ .



Fra disse figurene er det også mulig å lese ut et generelt kriterium for når en gitt nivåflate  $F(x, y, z) = \alpha$  kan oppfattes som en graf på denne måten. Vi vet fra før at gradienten  $\nabla F$  står vinkelrett på nivåflaten. Dermed: Hvis  $z$ -komponenten til  $\nabla F$  ikke er 0 i et punkt **a**, vet vi at flaten ikke er “vertikal” i  $z$ -retning akkurat i dette punktet. Og dermed kan flaten oppfattes som grafen til en funksjon  $z = z(x, y)$  rundt punktet. Dette er illustrert på figuren under. I punktet **a** er  $z$ -komponenten til  $\nabla F$  ikke 0, mens  $z$ -komponenten til  $\nabla F$  er 0 i punktet **b**.



Tilsvarende: Hvis  $y$ -komponenten til  $\nabla F$  ikke er 0 i et gitt punkt, vet vi at flaten ikke er “vertikal” i  $y$ -retning akkurat i dette punktet. Dermed kan flaten oppfattes som grafen til en funksjon  $y = y(x, z)$  rundt punktet.

Gradientkriteriet vi kom frem til på forrige side viser seg å holde helt generelt, uansett hvor mange variable funksjonen  $F$  har. Neste teorem presiserer resultatet.

### **Teorem 1 Implisittfunksjons-teoremet**

La  $F; \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ . Anta at  $F(\mathbf{a}) = \alpha$ , at  $F$  er  $C^1$  i punktet  $\mathbf{a}$ , og at

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(\mathbf{a}) \neq 0.$$

Da fins en omegn  $V \subseteq \mathbf{R}^{n-1}$  om  $(a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_n)$  og en omegn  $W \subseteq \mathbf{R}$  om  $\alpha$  slik at likningen

$$F(x_1, \dots, x_n) = \alpha$$

definerer koordinaten  $x_j$  implisitt som en funksjon

$$x_j = x_j(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)$$

fra  $V$  til  $W$ . Presist sagt: For hver  $(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) \in V$  fins en unik  $x_j \in W$  slik at  $F(x_1, \dots, x_n) = \alpha$ . Denne unike  $x_j$ -en definerer vi som funksjonsverdien  $x_j(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)$ .

Funksjonen  $x_j : V \rightarrow W$  definert på denne måten er  $C^1$  på  $V$ .

**Bevis** Beviset går på samme måte i alle tilfeller, så for å forenkle notasjonen ser vi på det typiske tilfellet

$$F : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R},$$

med  $\partial F / \partial x_3(\mathbf{a}) \neq 0$ . Definer  $G : D_f \rightarrow \mathbf{R}^4$  ved

$$G(\mathbf{x}) = (x_1, x_2, F(\mathbf{x}), x_4).$$

Da er

$$\det G'(\mathbf{a}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial F}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \frac{\partial F}{\partial x_3}(\mathbf{a}) & \frac{\partial F}{\partial x_4}(\mathbf{a}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\partial F}{\partial x_3}(\mathbf{a}) \neq 0.$$

Så ved inversfunksjons-teoremet fins åpne rektangler  $V_0$  om  $G(\mathbf{a})$  og  $W_0$  om  $\mathbf{a}$  slik at  $G$  har en  $C^1$  invers  $G^{-1} : V_0 \rightarrow W_0$ . Her må  $G^{-1}$  være på formen  $G^{-1}(\mathbf{x}) = (x_1, x_2, h(\mathbf{x}), x_4)$  der  $h : V_0 \rightarrow \mathbf{R}$  er  $C^1$ , siden  $G$  selv er på

tilsvarende form. Hvis  $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in W_0$ , gjelder nå

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha &\iff G(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, \alpha, x_4) \\ &\iff (x_1, x_2, x_3, x_4) = G^{-1}(x_1, x_2, \alpha, x_4) \\ &\iff x_3 = h(x_1, x_2, \alpha, x_4), \end{aligned}$$

så vi kan sette  $x_3(x_1, x_2, x_4) = h(x_1, x_2, \alpha, x_4)$ . Hvis  $V_0 = I_1 \times I_2 \times I_3 \times I_4$  og  $W_0 = J_1 \times J_2 \times J_3 \times J_4$ , lar vi  $V = I_1 \times I_2 \times I_4$  og  $W = J_3$ . ■

Siden teoremet sikrer at funksjoner definert implisitt på denne måten er  $C^1$ , kan vi partiellderivere dem ved å bruke likningen  $F(x_1, \dots, x_n) = \alpha$  direkte. Vi har følgende røffe leveregel:

**Implisitt derivasjon** Hvis likningen  $F(x_1, \dots, x_n) = \alpha$  definerer koordinaten  $x_j$  implisitt som en funksjon

$$x_j = x_j(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)$$

så finner du de partielle deriverte av funksjonen  $x_j$  ved å derivere begge sider i likningen

$$F(x_1, \dots, x_n) = \alpha$$

og bruke kjernereglen når  $x_j$  forekommer.

Betingelsen  $\partial F / \partial x_j \neq 0$  fra teoremet behøver vi ikke tenke på, for den er ekvivalent med at nevneren blir  $\neq 0$  når vi løser mhp. de aktuelle deriverte. (Dette er det lett å overbevise seg om, se eksemplene.) Med andre ord: Får vi et meningsfylt svar, er forutsetningen for metoden automatisk oppfylt.

**Eksempel 1** La funksjonen  $y = y(x)$  være definert implisitt ved at

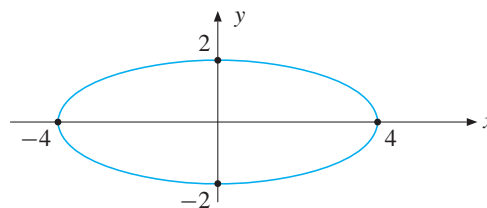
$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$

for  $x \in (-4, 4)$ , der vi velger  $y(x) > 0$  for alle  $x$  for å få  $y(x)$  entydig definert. Finn

$$\frac{dy}{dx}$$

i punktet  $x = \sqrt{8}$ .

**Løsning** Kurven gitt ved  $x^2/16 + y^2/4 = 1$  er en ellipse, og den ser slik ut:



Hvis vi lar

$$F(x, y) = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4},$$

så kan likningen

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 \tag{1}$$

for ellipsen skrives  $F(x, y) = \alpha$ , der  $\alpha = 1$ . Ergo kan vi bruke teoremet og metodikken vår. Derivasjon mhp.  $x$  på begge sider i likningen (1) gir

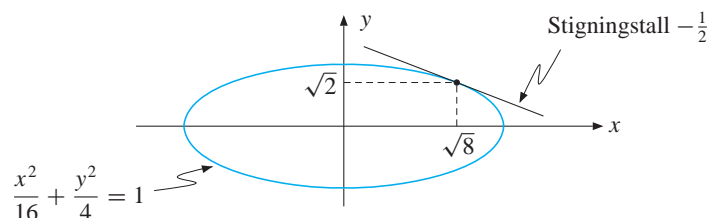
$$\frac{1}{16} \cdot 2x + \frac{1}{4} \cdot 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

Her brukte jeg at  $y$  oppfattes som en funksjon av  $x$ , altså  $y = y(x)$ . Løser vi med hensyn på  $dy/dx$ , får vi

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{4y}$$

Her har vi funnet den deriverte uttrykt ved *både*  $x$  og  $y$ . Dette er typisk for implisitt derivasjon, og det svarer til at funksjonen  $y = y(x)$  ikke er entydig definert ved likningen  $F(x, y) = 1$  alene. Vi skulle ha den deriverte i punktet  $x = \sqrt{8}$ , og må da finne ut hvilken  $y$  dette svarer til. Innsetting av  $x = \sqrt{8}$  i likningen (1) gir  $y = \sqrt{2}$ , gitt at vi krever  $y \geq 0$ . Vi får så

$$\frac{dy}{dx}(\sqrt{8}, \sqrt{2}) = -1/2. \quad \blacksquare$$



**Eksempel 2** Anta at funksjonen  $x = x(y, z)$  er definert implisitt ved at

$$x^3 y^2 z^2 = 2xz, \quad (1)$$

samt eventuelt noen tilleggsbetingelser for å sikre entydighet. For å få dette til å stemme med mønsteret i teoremet, kan vi la

$$F(x, y, z) = x^3 y^2 z^2 - 2xz.$$

Likningen (1) kan da skrives  $F(x, y, z) = 0$ .

Partiell derivasjon mhp.  $z$  på begge sider av (1) gir

$$3x^2 \frac{\partial x}{\partial z} \cdot y^2 z^2 + x^3 y^2 \cdot 2z = 2 \frac{\partial x}{\partial z} z + 2x \cdot 1.$$

Løser du dette med hensyn på  $\partial x / \partial z$ , får du

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{2x - 2x^3 y^2 z}{3x^2 y^2 z^2 - 2z}.$$

Tilsvarende kan man finne  $\partial x / \partial y$ . ■

Vi avslutter denne seksjonen med å gi et bevis for **Lagrangemetoden** (teorem MIP 12.8.1).

### **Teorem 2 Lagrange-metoden**

La  $f; \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  og  $g; \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  være  $C^1$ , og anta at  $\nabla g(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$ . Hvis  $\mathbf{a}$  er et ekstremalpunkt for  $f$  under bibetingelsen  $g(x_1, \dots, x_n) = 0$ , så fins et reelt tall  $\lambda$  slik at

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \lambda \cdot \nabla g(\mathbf{a})$$

**Bevis** Siden  $\nabla g(\mathbf{a}) \neq 0$ , er  $\partial g / \partial x_j(\mathbf{a}) \neq 0$  for minst en  $j$ . Vi antar  $\partial g / \partial x_n(\mathbf{a}) \neq 0$ , de andre tilfellene behandles tilsvarende. Vi skriver  $\hat{\mathbf{a}} = (a_1, \dots, a_{n-1})$ . Ved implisittfunksjons-teoremet 6.11.1 fins en omegn  $U$  om  $\hat{\mathbf{a}} \in \mathbf{R}^{n-1}$  og en  $C^1$  funksjon  $h : U \rightarrow \mathbf{R}$  slik at

$$g(\mathbf{x}, h(\mathbf{x})) = 0$$

for alle  $\mathbf{x} \in U$ , og  $h(\hat{\mathbf{a}}) = a_n$ . Betrakt den sammensatte funksjonen  $\phi : U \rightarrow \mathbf{R}$  gitt ved

$$\phi(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, h(\mathbf{x})).$$

Da må  $\hat{\mathbf{a}}$  være et ekstremalpunkt for  $\phi$ , så alle de partielle deriverte av  $\phi$  må være 0. Kjernerregelen gir da, for  $1 \leq j \leq n-1$ ,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_j}(\hat{\mathbf{a}}) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a}) + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \cdot \frac{\partial h}{\partial x_j}(\hat{\mathbf{a}}) = 0. \quad (1)$$

På den annen side, definer  $\psi : U \rightarrow \mathbf{R}$  ved  $\psi(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}, h(\mathbf{x}))$ . Da er  $\psi(\mathbf{x}) = 0$  for alle  $\mathbf{x} \in U$ , så de partielle deriverte av  $\psi$  må også være 0. Kjernerregelen gir da

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_j}(\hat{\mathbf{a}}) = \frac{\partial g}{\partial x_j}(\mathbf{a}) + \frac{\partial g}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \cdot \frac{\partial h}{\partial x_j}(\hat{\mathbf{a}}) = 0 \quad (2)$$

for  $1 \leq j \leq n-1$ . Innsetting av (2) i likning (1) gir

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a}) = \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial x_j}(\mathbf{a}), \quad \text{der} \quad \lambda \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial f / \partial x_n(\mathbf{a})}{\partial g / \partial x_n(\mathbf{a})}$$

for  $j \leq n-1$ . Men denne likningen holder jo opplagt også for  $j = n$ . ■

## 6.11 Oppgaver

**1.** En intuitiv forklaring av implisitt-funksjons-teoremet. La  $F(x, y, z)$  være en deriverbar skalarfunksjon av tre variable. Vi vet fra teorem 6.10.2 at gradienten  $\nabla F$  står vinkelrett på nivåflaten  $F(x, y, z) = c$ .

- Bruk dette til å forklare intuitivt hvorfor kriteriet for at likningen  $F(x, y, z) = c$  skal definere  $z$  som en funksjon  $z = z(x, y)$  rundt et gitt punkt  $\mathbf{p}$  er at  $\partial F / \partial z(\mathbf{p}) \neq 0$ .
- Forklar tilsvarende at kriteriene for at likningen  $F(x, y, z) = c$  skal definere funksjoner  $x = x(y, z)$  og  $y = y(x, z)$ .

**2.** Begrunn at likningen

$$x^2 y^3 = \sin(\pi x / 2)$$

definerer  $y$  implisitt som en funksjon  $y = f(x)$  for  $x$  i en omegn om  $x = 1$ , med  $f(1) = 1$ . Finn den deriverte av  $f$  uttrykt ved  $x$  og  $y$ . Hva blir  $f'(1)$ ? Finn likningen for tangentlinjen til grafen til  $f$  i punktet  $(1, 1)$ .

**3.** La  $S \subseteq \mathbf{R}^3$  være mengden av punkter  $(x, y, z)$  slik at  $y^2 z^3 + x z^2 = 2xz$ .

- Begrunn at  $S$  kan oppfattes som grafen til en funksjon  $z = f(x, y)$  lokalt rundt punktet  $(2, 0, 2)$ .
- Finn  $\partial f / \partial x(2, 0)$ , der  $f$  er funksjonen fra a).

**4.** La  $F : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$  være funksjonen gitt ved

$$F(x, y, z) = x^3 y z^3 + z^5.$$

- Finn gradienten til  $F$ .
- Vis at likningen  $F(x, y, z) = 17150$  definerer  $z$  som en funksjon  $z = f(x, y)$  i en omegn om  $(1, 1)$ , med  $f(1, 1) = 7$ . Finn  $\partial f / \partial x$  og  $\partial f / \partial y$  uttrykt ved  $x, y$  og  $z$ .
- Anta nå at du er på skitur i et terreng med form som grafen  $z = f(x, y)$ . Du står ved turisthytten "Den 7. himmel", som ligger i punktet  $(1, 1, 7)$ . I hvilken retning skal du gå for å brattest mulig nedoverbakke?

## Blandede oppgaver til kapittel 6

**1.** I oppgave 6.10.1 fant vi de partielle deriverte  $\partial f / \partial x$  og  $\partial f / \partial y$  av en funksjon  $f(x, y) = \hat{f}(r, \theta)$  uttrykt ved de "polar"-deriverte  $\partial \hat{f} / \partial r$  og  $\partial \hat{f} / \partial \theta$ . Vis at

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \iff \frac{\partial \hat{f}}{\partial r} = \frac{\partial \hat{f}}{\partial \theta} = 0.$$

og sylindervektorbasen.

Bruk dette til å finne stasjonære punkter for funksjonen  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  gitt ved  $f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$ .

**2.** Vis at det gjelder resultater helt analoge til oppgave 5 for kule-

# Kapittel 7

## Integrasjon av funksjoner med flere variable

---

*Dette kapitlet bygger på kapitlene 1–3, 5 og samt MIP-kapitlene 1–7, 10 og 12.*

---

## 7.1 Teori for multiple integraler

La  $f; \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  være en funksjon av  $n$  variable, og la  $D \subseteq D_f$  være et begrenset område i  $\mathbf{R}^n$  der  $f$  er begrenset. I denne seksjonen skal vi definere et tall som kalles *integralet* av  $f$  over området  $D$ , og som skrives

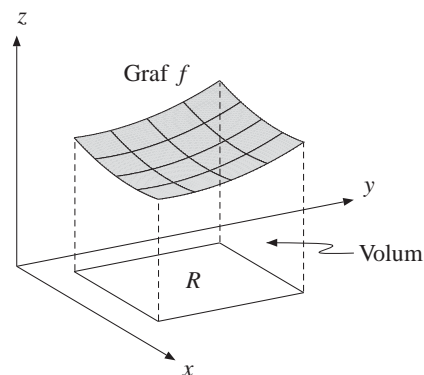
$$\int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \quad (1)$$

Hvis  $n = 2$  kalles dette for et **dobbelintegral**, og hvis  $n = 3$  kalles det et **trippelintegral**. Generelt kalles slike integraler for **multiple integraler**.

Vi skal begynne med å se på tilfellet  $n = 2$ . I slutten av seksjonen skal jeg beskrive hvilke endringer som må gjøres for at teorien skal gjelde for generell  $n$ , disse endringene er bare småting.

### Dobbelintegraler over rektangler

I tilfellet  $n = 2$  vil integrasjonsområdet  $D$  være en delmengde av planet. Integralet (1) vil da kunne tolkes geometrisk som *volumet under grafen til  $f$  på  $D$*  i tilfellet at  $f$  er positiv. Se figur under. Dette er en perfekt analogi til situasjonen for funksjoner av én variabel, der vi finner arealer under grafer.



Vi skal begynne med å se på det tilfellet som er vist på figuren ovenfor, nemlig at integrasjonsområdet  $D$  er et lukket rektangel  $A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$  i planet. Med *arealet*  $v(A)$  av et slikt rektangel menes

$$v(A) = (a_1 - b_1) \cdot (a_2 - b_2).$$

Arealet av et åpent rektangel defineres tilsvarende. Det virker sært å bruke bokstaven  $v$  for å betegne areal, men jeg har gjort det for å få symbolene til å passe med den generelle formalismen for  $n$ -dimensjonale integraler. Se senere.



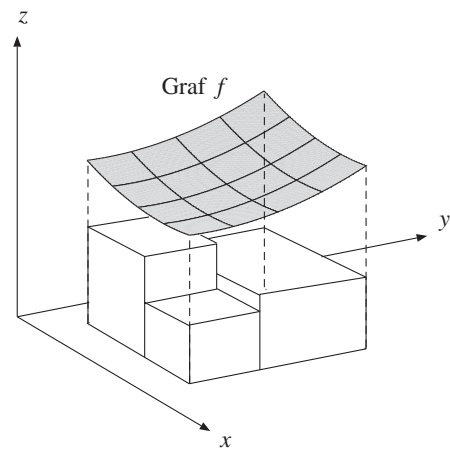
Med en **partisjon**  $P$  av et lukket rektangel  $D$  i  $\mathbf{R}^2$  menes en endelig samling  $P = \{A_1, \dots, A_n\}$  av lukkede rektangler som til sammen utgjør hele  $D$ , og som snitter hverandre kun langs randen. Rektanglene  $A_1, \dots, A_n$  kalles *delrektanglene* til partisjonen  $P$ . La  $f; \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  være en funksjon slik  $D \subseteq D_f$ , og anta at  $f$  er begrenset på  $R$ . Med en **nedresum** for  $f$  på  $D$  basert på partisjonen  $P$  menes en sum på formen

$$S = c_1 v(A_1) + c_2 v(A_2) + \dots + c_m v(A_m),$$

der  $c_i \leq f(\mathbf{x})$  for alle  $x \in A_i$ . Med en **øvresum** for  $f$  på  $D$  basert på partisjonen  $P$  menes akkurat det samme, bortsett fra at vi istedet krever  $c_i \geq f(\mathbf{x})$ . Med et **utvalg** for partisjonen  $P$  menes en samling  $U$  av punkter  $\mathbf{x}_i^*$  slik at  $\mathbf{x}_i^*$  ligger i delrektanglet  $A_i$  for hver  $1 \leq i \leq m$ , og med **Riemannsummen** for  $f$  på basert på partisjonen  $P$  og utvalget  $U$  menes

$$R = f(\mathbf{x}_1^*)v(A_1) + f(\mathbf{x}_2^*)v(A_2) + \dots + f(\mathbf{x}_m^*)v(A_m).$$

Figuren under illustrer begrepet nedresum. Leddene i nedresummen tilsvarer “klossene” som ligger under grafen. Øvresummer ser tilsvarende ut, bortsett fra at klossene da vil ligge med sine toppflater over grafen i alle punkter. For Riemannsummer vil toppflatene skjære gjennom grafen, fordi høyden til klossene i dette tilfelle gis av en funksjonsverdi i rektanglet som utgjør bunnflaten i klossen.



Med *maskevidden*  $m(R)$  til en Riemannsum i planet menes den største avstanden som forekommer blant to punkter i samme delrektangel for  $R$ . Definisjonen av integrerbarhet blir nå helt analog til definisjon fra seksjon 3.2:

**Definisjon 1 Integrerbarhet**

La funksjonen  $f$  være begrenset på rektanglet  $D \subseteq \mathbf{R}^2$ . At  $f$  er *integrerbar* på  $D$  betyr at det fins et tall  $I$  slik at følgende betingelse holder:

For hver  $\epsilon > 0$  fins  $\delta > 0$  slik at hvis  $R$  er en Riemannsum for  $f$  på  $D$  med maskevidde mindre enn  $\epsilon$ , så er  $|R - I| < \delta$ .

Hvis  $f$  er integrerbar på  $D$ , kalles tallet  $I$  fra denne definisjonen for **integralet** av  $f$  på  $D$ .

Fortsatt i full analogi med teorien fra seksjon 3.2 definerer vi **nedreintegralet** av  $f$  på  $D$  ved å sette

$$\int_D f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \sup\{S \mid S \text{ er en nedresum for } f \text{ på } D\}.$$

Videre definerer vi **øvreintegralet** ved

$$\overline{\int}_D f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \inf\{S \mid S \text{ er en øvresum for } f \text{ på } D\}.$$

Som for det vanlige integralet, definerer vi både nedre- og øvreintegralene til å være 0 hvis  $a = b$ , og til å skifte fortegn hvis  $a$  og  $b$  byttes slik at  $b < a$ . Som i envariabeltilfellet vil nedreintegralet og øvreintegralet *alltid* eksistere, gitt at  $f$  er begrenset. Hvis  $f$  er integrerbar, blir de lik det vanlige integralet, se teoremet under. Beviset for dette er helt analogt til beviset for teorem 1.9.1, og utelates her.

**Teorem 1 Nedreintegral, øvreintegral og integrerbarhet**

La  $f$  være begrenset på området  $D \subseteq \mathbf{R}^2$ . Da har vi:

1. Hvis  $f$  er integrerbar på  $D$  med integral  $I$ , så er både nedreintegralet og øvreintegralet av  $f$  på  $D$  lik  $I$ .
2. Hvis nedreintegralet og øvreintegralet av  $f$  på  $D$  er like, så er  $f$  integrerbar på  $D$  med integral lik denne felles verdien. .

**Dobbelintegraler over generelle områder**

Integraldefinisjonen gitt ovenfor gjelder kun når integrasjonsområdet  $D$  er et lukket rektangel. Vi kan imidlertid generalisere den til en vilkårlig begrenset delmengde av  $\mathbf{R}^2$  ved å følge følgende lille triks. Hvis  $f; \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  er en funksjon og  $D$  er en delmengde av  $D_f$ , så kan vi definere funksjonen  $f_D: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  ved

$$f_D(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{hvis } (x, y) \in D \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Funksjonen  $f_D$  er altså lik  $f$  på mengden  $D$  og lik 0 utenfor denne mengden. Nå kan vi sette opp følgende:

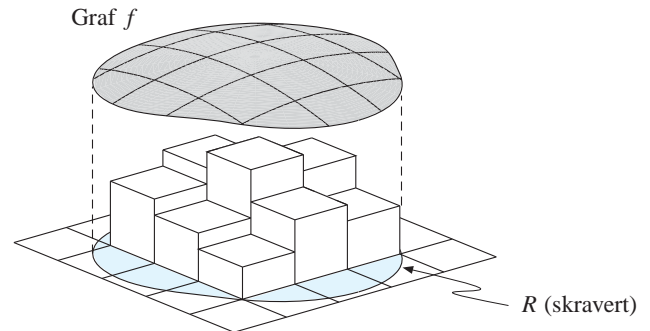
### Definisjon 2 Integraler over generelle områder

La  $f; \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  være begrenset på en begrenset mengde  $D \subseteq D_f$ . Vi definerer da

$$\int_D f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_E f_D(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

der  $E$  er et lukket rektangel som inneholder  $D$ . At  $f$  er integrerbar på  $D$  betyr per definisjon at  $f_D$  er integrerbar på rektanget  $E$ .

Denne definisjonen er illustrert på figuren under. Figuren viser utsnittet av grafen til  $f$  som svarer til integrasjonsområdet  $D$ . Den utvidede funksjonen  $f_D$  følger denne grafen over  $D$ , men hopper så ned til 0 utenfor. På figuren er også antydnet et rektangel  $E$  som inneholder  $D$  og en partisjon av dette. I tillegg er tegnet inn hvordan en nedresum for funksjonen  $f_D$  på  $E$  vil kunne ta seg ut. Siden  $f_D = 0$  utenfor  $D$ , må leddene i nedresummen være null eller negative hvis delrektanget stikker utenfor  $D$ . På figuren er alle slike ledd i nedresummen null.



For at definisjonen ovenfor skal gi mening, må man overbevise seg om at den ikke avhenger av hvilket rektangel  $E$  man velger. Siden  $f_D = 0$  utenfor  $D$ , er dette relativt greit, se oppgave 7.1.2. Det følger så at hvis  $D$  og  $B$  er vilkårlige begrensede mengder i  $\mathbf{R}^2$  slik at  $D \subseteq B$ , funksjonen  $f$  er begrenset på  $B$  og  $f = 0$  utenfor  $D$ , så er integralene av  $f$  på  $D$  og  $B$  like. Grunnen er at de utvidede funksjonene  $f_D$  og  $f_B$  i dette tilfellet vil bli like på hele  $\mathbf{R}^2$ .

## Mengder med innhold 0. Integrerbarhet

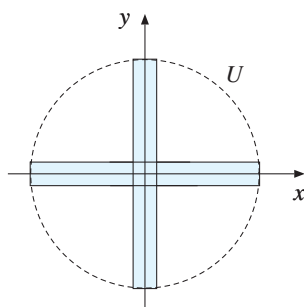
Vi skal se på spørsmålet om hvilke funksjoner som er integrerbare. I envariabelteorien klarte vi oss med et resultat som sa at hvis en funksjon er kontinuerlig på et lukket intervall, så er den integrerbar der. I tovariabeltilfellet er imidlertid situasjonen litt mer komplisert. Vi har *definert* integraler over et generelt område  $D$  ved å bruke funksjonen  $f_D$ , som er lik  $f$  på  $D$  og lik 0 utenfor  $D$ . Denne funksjonen vil typisk være *diskontinuerlig* langs hele randen til  $D$ . Akkurat der hopper den jo ned fra  $f$  til 0. Hvis vi skal være sikre på at funksjonen  $f_D$  er integrerbar, holder det altså ikke med et resultat som sier at kontinuerlige funksjoner er integrerbare. For at teorien vår skal henge sammen, må funksjoner av typen  $f_D$  også tas inn i varmen. Nøkkelen blir å kreve at området  $D$  har en noenlunde “pen” rand, slik at mengden punkter der  $f_D$  eventuelt er diskontinuerlig ikke blir for stor; vi skal kreve her det som kalles **innhold 0**. Vi skal nå definere dette begrepet og bake det inn i teorien.

Intuitivt sett er en delmengde av planet med innhold 0 en delmengde som har “null areal”. Typiske eksempler er linjestykker, glatte kurvebiter, endelige punktmengder og unioner av et endelig antall slike mengder. Den presise definisjonen er slik:

### Definisjon 3 Mengder med innhold 0

En mengde  $V \subseteq \mathbf{R}^2$  sies å ha *innhold 0* hvis det for hver  $\epsilon > 0$  fins en endelig samling  $D_1, \dots, D_m$  av åpne rektangler i  $\mathbf{R}^2$  med samlet volum mindre enn  $\epsilon$ , slik at

$$V \subseteq R_1 \cup \dots \cup R_m.$$



Figur 7.1.1

En mengde med innhold 0 er altså en mengde som kan dekket av åpne rektangler med vilkårlig lite totalvolum. Typiske eksempler på mengder som *ikke* har innhold 0, er mengder  $U \subseteq \mathbf{R}^2$  som har *indre punkter*. For hvert indre punkt  $\mathbf{p}$  inneholder disse et rektangel med sentrum  $\mathbf{p}$ . Dette rektanget vil ha et visst volum  $A > 0$ , og dermed kan  $U$  umulig dekket av rektangler med samlet volum mindre enn  $A$ .

**Eksempel 1** La  $U \subseteq \mathbf{R}^2$  være den åpne sirkelskiven med sentrum origo og radius 1, dvs.

$$U = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}.$$

Se figur 7.1.1. La  $V$  være mengden av alle  $(x, y) \in U$  slik at  $x = 0$  eller  $y = 0$ . Da er  $V$  en mengde med innhold 0, for  $V$  kan dekket av de to rektanglene  $[-t, t] \times [-1, 1]$  og  $[-1, 1] \times [-t, t]$  for  $t > 0$ . Totalarealet av disse er  $8t$ , som kan fås mindre enn enhver  $\epsilon > 0$  ved å velge  $t$  liten nok. ■

**Eksempel 2** I dette noe teoretiske eksemplet skal jeg bevise at hvis

$$\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^2$$

er en kontinuerlig kurveparametrisering slik at komponentene til  $\mathbf{r}'$  fins og er begrensede på  $(a, b)$ , så er bildekurven  $C$  til  $\mathbf{r}$  en delmengde av planet med innhold 0. Dette er intuitivt rimelig, se figur 7.1.2.

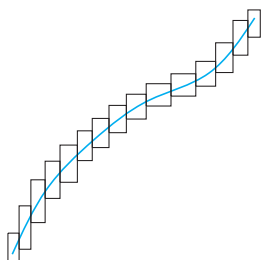
La  $\mathbf{r} = (x(t), y(t))$ . Ved forutsetningen om begrensethet fins et tall  $M$  slik at  $|x'(t)| < M$  og  $|y'(t)| < M$  for alle  $t \in (a, b)$ . Del opp  $[a, b]$  i  $N$  like lange delintervaller  $I_1, \dots, I_N$ . Hvert slikt intervall har lengde  $(b-a)/N$ . La  $t_j$  være midtpunktet i  $I_j$ . Hvis  $t \in I_j$ , gir middelverdisetningen

$$|x(t) - x(t_j)| < M \cdot |t - t_j| \leq M \cdot \frac{b-a}{N},$$

og tilsvarende  $|y(t) - y(t_j)| \leq M(b-a)/N$ . Så  $\mathbf{r}(I_j)$  er inneholdt i et åpent kvadrat med sidekanter  $2M(b-a)/N$  i planet. Summen av arealene til disse  $N$  kvadratene blir

$$N \cdot \left[ \frac{2M(b-a)}{N} \right]^2 = \frac{4M^2(b-a)^2}{N},$$

som kan fås mindre enn en gitt  $\epsilon > 0$  ved å velge  $N$  stor nok. ■



Figur 7.1.2

#### Definisjon 4 Generiske delmengder

Med en *generisk* delmengde av en mengde  $U \subseteq \mathbf{R}^2$  menes en mengde  $B \subseteq U$  slik at komplementet  $U \setminus B$  er har innhold 0.

En generisk delmengde av  $U$  er en delmengde av  $U$  som er nesten hele  $U$ , det som mangler er en mengde med innhold 0. Noen eksempler:

- Den åpne sirkelskiven i planet  $\mathbf{R}^2$  gitt ved  $x^2 + y^2 < 1$  er en generisk delmengde av den lukkede skiven  $x^2 + y^2 \leq 1$ . Grunnen er at randen, som er sirkelen  $x^2 + y^2 = 1$ , har innhold 0. (Den kan parametriseres som en kurve, jmfør eksempel 2.)
- Det indre av et lukket rektangel i  $\mathbf{R}^2$  er en generisk delmengde av boksen, siden boksens sideflater har innhold 0. Det siste kan vises ved å dekke sideflatene med aksebokser som har vilkårlig liten valgt tykkelse  $\delta > 0$ .

Merk også at hvis du har en endelig samling mengder med innhold 0, så vil også unionen av disse ha innhold 0. Hvis du har en endelig samling generiske delmengder av en gitt mengde  $D$ , så vil også snittet av de generiske delmengdene være en generisk delmengde av  $D$ . Du blir bedt om å bevise disse tingene i oppgave 7.1.7.

Vi skal nå se hvilken betydning mengder med innhold 0 har i integrasjonsteorien. Neste teorem sikrer oss at de funksjonene vi vanligvis støter på i praksis, vil være integrerbare over de typiske integrasjonsområdene. Som du ser, kreves det ikke at funksjonen er kontinuerlig på *hele* integrasjonsområdet. Det holder at den er kontinuerlig på en generisk delmengde.

### **Teorem 2 Integrerbarhet og generiske delmengder**

Anta at  $U \subseteq \mathbf{R}^2$  er en begrenset mengde med rand som har innhold 0. Hvis  $f; \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  er begrenset på  $U$  og kontinuerlig på en generisk delmengde av  $U$ , er  $f$  integrerbar på  $U$ .

**\*Bevis** Vi kan umiddelbart redusere dette til et spørsmål om den utvidede funksjonen  $f_U$  på et lukket rektangel  $D$  som inneholder  $U$ . Siden randen til  $U$  har innhold 0, og unionen av to mengder med innhold 0 har innhold 0, vil  $f_U$  være kontinuerlig på en generisk delmengde av  $D$ . Dermed holder det å bevise teoremet i tilfellet at mengden  $U$  er et lukket rektangel. Ved å øke størrelsen på rektanget  $U$ , kan vi også oppnå at  $f$  er kontinuerlig og lik 0 i alle punkter på randen til  $U$ . Vi antar heretter begge disse tingene.

Velg en mengde  $Z$  med innhold 0 slik at  $f$  er kontinuerlig på komplementet  $U \setminus Z$ . Siden  $f$  er begrenset på  $U$ , fins  $K > 0$  slik at  $|f(\mathbf{x})| < K$  på  $U$ . La  $\epsilon > 0$  være gitt. Siden  $Z$  har innhold 0, kan vi lage en nedresum

$$S_- = \sum_{i=1}^m c_i v(A_i)$$

for  $f$  på  $U$  slik at unionen  $A_1 \cup \dots \cup A_k$  har samlet volum mindre enn  $\epsilon$  og inneholder  $Z$  i sitt indre. Videre definerer vi

$$c_i = \begin{cases} -K & \text{for } 1 \leq i \leq k \\ \inf\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in A_i\} & \text{for } k < i \leq m \end{cases}$$

Mengden  $E = U \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_k)^*$  er lukket og begrenset, og  $f$  er kontinuerlig på  $E$ . Ved uniform kontinuitet (6.5.2) fins  $\delta > 0$  slik at  $|f(\mathbf{a}) - f(\mathbf{b})| < \epsilon$  når  $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| < \delta$ , for alle  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in E$ . Uten å endre verdien til  $S_-$  kan vi forfine oppdelingen slik at det for hver  $i > k$  gjelder at hvis  $\mathbf{a}$  og  $\mathbf{b}$  ligger i  $A_i$ , så er  $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| < \delta$ .

La  $S_+ = \sum_{i=1}^m d_i \Delta A_i$  være øvresummen for  $f$  på  $U$  gitt ved de samme delrektanglene som  $S_-$ , men der  $-K$  erstattes med  $K$  og  $\inf$  erstattes med  $\sup$  i definisjonen av  $d_i$ . La  $M$  være arealet av  $U$ . Vi har  $d_i - c_i \leq \epsilon$  for  $k < i \leq m$ , så

$$\begin{aligned} S_+ - S_- &= \sum_{i=1}^m (d_i - c_i) \Delta A_i < \sum_{i=1}^k (2K) \cdot \Delta A_i + \sum_{i=k+1}^m \epsilon \cdot \Delta A_i \\ &= 2K \cdot \sum_{i=1}^k \Delta A_i + \epsilon \sum_{i=k+1}^m \Delta A_i < 2K \cdot \epsilon + \epsilon \cdot M. \end{aligned}$$

Siden  $\epsilon > 0$  var vilkårlig, viser dette at vi for hvert tall  $t > 0$  kan finne en øvresum  $S_+$  og en nedresum  $S_-$  for  $f$  på  $U$  slik at  $S_+ - S_- < t$ . Teoremet følger nå fra teorem 7.1.1. ■

### Teorem 3 Generelle integralegenskaper

1. *Integrasjon ledd for ledd.* La  $U \subseteq \mathbf{R}^2$  være begrenset, og la  $f$  og  $g$  være integrerbare på  $U$ . Da er funksjonen  $f + g$  integrerbar på  $U$ , og

$$\int_U [f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})] d\mathbf{x} = \int_U f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_U g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

2. *Sette utenfor konstanter.* La  $U \subseteq \mathbf{R}^2$  være begrenset, la  $f$  være integrerbar på  $U$ , og la  $a \in \mathbf{R}$ . Da er funksjonen  $a \cdot f$  integrerbar på  $U$ , og

$$\int_U a \cdot f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = a \cdot \int_U f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

3. *Oppdelingsprinsippet.* Hvis  $U, V \subseteq \mathbf{R}^2$  er disjunkte og  $f$  er integrerbar på  $U$  og  $V$ , så er  $f$  integrerbar på  $U \cup V$  også, og

$$\int_{U \cup V} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_U f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_V f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

4. *Integrerbarhet på generisk delmengde gir integrerbarhet.* Anta at  $U$  er begrenset, og at  $B \subseteq U$  er generisk. Hvis  $f$  er integrerbar på  $B$  og begrenset på  $U$ , så er  $f$  integrerbar på  $U$  også, og

$$\int_U f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_B f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

**Bevis** (1) Her lønner det seg å bruke Riemannsummer. En vilkårlig Riemannsum  $R$  for  $f + g$  på  $U$  kan skrives

$$R = \sum_{i=1}^m [f(\mathbf{x}_i^*) + g(\mathbf{x}_i^*)]v(A_i) = \sum_{i=1}^m f(\mathbf{x}_i^*)v(A_i) + \sum_{i=1}^m g(\mathbf{x}_i^*)v(A_i),$$

dvs. den kan splittes i Riemannsummer  $R_f$  for  $f$  og  $R_g$  for  $g$  med den samme partisjonen, slik at  $R = R_f + R_g$ . La  $I_f$  og  $I_g$  være integralene til  $f$  og  $g$  på  $U$ . Siden  $f$  og  $g$  er integrerbare på  $U$ , vet vi fra teorem 10.0.0 at det for hver  $\epsilon > 0$  fins en  $\delta > 0$  slik at hvis  $m(R) < \delta$ , så er både  $|R_f - I_f|$  og  $|R_g - I_g|$  mindre enn  $\epsilon/2$ . La  $I = I_f + I_g$ . Da er

$$|R - I| = |R_f - I_f + R_g - I_g| \leq |R_f - I_f| + |R_g - I_g| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Siden  $\epsilon > 0$  var vilkårlig, følger det fra teorem 10.0.0 at  $f + g$  er integrerbar på  $D$  med integral  $I = I_f + I_g$ .

(2) Samme idé som i sted. En vilkårlig Riemannsum  $R$  for funksjonen  $af$  på  $U$  kan skrives

$$R = \sum_{i=1}^m a \cdot f(\mathbf{x}_i^*) v(A_i) = a \cdot \sum_{i=1}^m f(\mathbf{x}_i^*) v(A_i),$$

dvs. den kan skrives som  $a$  ganget med en Riemannsum  $R_f$  for  $f$  med den samme partisjonen. La  $I$  være integralet til  $f$  på  $U$ . Siden  $f$  er integrerbar på  $U$ , vet vi fra teorem 10.0.0 at det for hver  $\epsilon > 0$  fins en  $\delta > 0$  slik at hvis  $m(R) < \delta$ , så er  $|R_f - I_f| < \epsilon/|a|$ . La  $I = a \cdot I_f$ . Da er

$$|R - I| = |aR_f - aI_f| = |a| \cdot |R_f - I_f| < |a| \cdot \frac{\epsilon}{|a|} = \epsilon.$$

Siden  $\epsilon > 0$  var vilkårlig, følger det fra teorem 10.0.0 at  $af$  er integrerbar på  $D$  med integral  $aI$ .

(3) Definer funksjonene  $u$  og  $v$  på  $U \cup V$  ved

$$u(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{hvis } x \in U \\ 0 & \text{hvis } x \in V \end{cases} \quad v(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } x \in U \\ f(\mathbf{x}) & \text{hvis } x \in V \end{cases}$$

Da er  $u$  og  $v$  integrerbare på  $U \cup V$ , jamfør diskusjonen etter definisjon definisjon 7.1.2. Vi har  $f(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) + v(\mathbf{x})$  på  $U \cup V$ . Ved (1) er da  $f(\mathbf{x})$  integrerbar på  $U \cup V$ , og

$$\int_{U \cup V} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{U \cup V} u(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{U \cup V} v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

Men siden  $u(\mathbf{x}) = 0$  på  $V$  og  $v(\mathbf{x}) = 0$  på  $U$ , er de to integralene til høyre her lik de to til høyre i teoremet.

(4) Vi har  $U = B \cup (U \setminus B)$ . Siden komplementet  $U \setminus B$  har innhold 0, er  $f$  opplagt integrerbar der (integralet er 0). Bruk så punkt (3). ■

Ut fra punkt (4) i dette teoremet innfører vi følgende prinsipp:

**Generiskprinsippet** Anta at  $f$  kun er definert på en generisk delmengde  $G \subseteq U$ , og ikke på hele  $U$ . Hvis  $f$  er integrerbar på  $G$ , definerer vi

$$\int_U f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \stackrel{\text{def}}{=} \int_G f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$



Dette prinsippet gjør at vi kan snakke om integralet til en funksjon på en mengde  $U$  selv om  $f$  bare er definert på en generisk delmengde av  $U$ . Dette er praktisk, fordi det gjør at vi slipper å liste opp kjedelige ekstraforutsetninger i endel situasjoner. Kombinerer vi prinsippet med egenskap (4) i teoremet, kan vi litt uformelt konkludere med følgende: *I forbindelse med multiple integraler kan man se bort fra alle mengder med innhold 0*. Om du legger til eller trekker fra en tynn mengde i integrasjonsområdet ditt, spiller ingen rolle.

## Generell teori for multiple integraler

Teorien i denne seksjonen kan med små modifikasjoner gjennomføres for integraler i  $\mathbf{R}^n$  generelt. I stedet for å bruke rektangler i  $\mathbf{R}^2$  til partisjonene, bruker vi lukkede rektangler

$$A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

fra  $\mathbf{R}^n$ . Volumet av et slikt rektangel er per definisjon

$$v(A) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n).$$

Volumet av et åpent rektangel defineres tilsvarende. Hvis  $n = 2$  blir volumet det samme som *areal*, og hvis  $n = 1$  blir det *lengde*. Resten av teorien blir nøyaktig som før, bortsett fra at vi må bytte ut  $\mathbf{R}^2$  med  $\mathbf{R}^n$  og ordet “areal” med “volum” på de naturlige stedene. En delmengde av  $\mathbf{R}^n$  har *innhold 0* hvis den kan dekket av rektangler i  $\mathbf{R}^n$  som har vilkårlig lite totalvolum, jamfør definisjon 7.1.3 i  $\mathbf{R}^n$ -versjon. Eksempler på delmengder av  $\mathbf{R}^3$  med innhold 0 er begrensede utsnitt av plan, flater og linjer.

Jeg vil i fortsettelsen referere til teoremene og definisjonene fra denne seksjonene som om de var formulert for  $\mathbf{R}^n$  med generell  $n$ .

### 7.1 Oppgaver

**1.** Avgjør om hver av disse mengdene er delmengder av planet  $\mathbf{R}^2$  med innhold 0.

a)  $\{(x, y) \mid x \leq 1\}$                       b)  $\{(x, y) \mid y = 2, x \in [1, 5]\}$

**2.** Vis at mengden  $V \subseteq \mathbf{R}^3$  bestående av alle  $(x, y, z)$  slik at  $z = 0$ ,  $x \in [-1, 1]$  og  $y \in [-1, 1]$  har innhold 0 i  $\mathbf{R}^3$ .

**3.** Forklar hvorfor definisjon 7.1.2 ikke avhenger av hvilket rektangel  $E$  man betrakter.

**4.** Vis at hvis  $U$  og  $V$  er mengder i  $\mathbf{R}^n$  med innhold 0, så har også  $U \cup V$  og  $U \cap V$  innhold 0.

**5.** La  $R \subseteq \mathbf{R}^n$  være en begrenset mengde, og la skalarfunksjonene  $f$  og  $g$  være integrerbare på  $R$ . Vis at hvis  $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x})$  for alle

$\mathbf{x} \in R$ , så er

$$\int_R f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \leq \int_R g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

**6.** La  $R \subseteq \mathbf{R}^n$  være begrenset, og la  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  være kontinuertlig på  $R$ . Vis at

$$\left| \int_R f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right| \leq \int_R |f(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x}.$$

**7.** Vis at hvis  $U_1, \dots, U_k$  er en endelig samling mengder i  $\mathbf{R}^n$  med innhold 0, så har også unionen av dem innhold 0. Vis også at hvis  $U_1, \dots, U_k$  er en samling generiske delmengder av en gitt mengde  $M$ , så er også snittet av dem en generisk delmengde av  $M$ .

## 7.2 Dobbelintegraler

Hvis  $f; \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  er en funksjon av to variable og  $R$  er et område i planet, kalles integraler på formen  $\int_R f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$  for *dobbelintegraler*. De skrives vanligvis

$$\iint_R f(x, y) dA.$$

Som nevnt i begynnelsen av forrige seksjon, kan dette dobbelintegralet pr. definisjon tolkes som *volumet under grafen til  $f$*  i tilfellet at  $f$  er ikke-negativ på  $R$ . Se figurene side 224 og 227. Vi skal nå se på et resultat som setter oss i stand til å regne ut mange dobbelintegraler.

### **Teorem 1 Dobbelintegraler i standardkoordinater, versjon I**

Anta at  $R \subseteq \mathbf{R}^2$  er begrenset og kan beskrives som mengden av alle  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$  slik at

$$x \in [a, b] \quad \text{og} \quad y \in [c(x), d(x)],$$

der  $a$  og  $b$  er faste tall mens intervallgrensene  $c(x)$  og  $d(x)$  tillates å variere med  $x \in [a, b]$ . Hvis  $f(x, y)$  er integrerbar på  $R$ , gjelder

$$\iint_R f(x, y) da = \int_a^b \left[ \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy \right] dx.$$

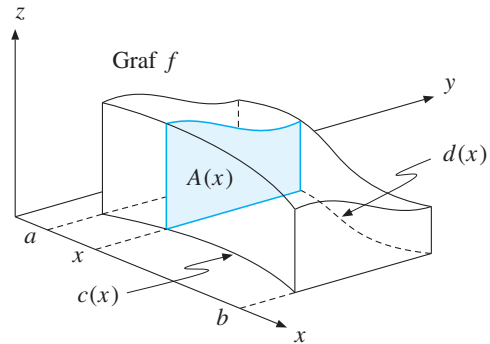
Integralet til høyre kalles et *iterert* integral. Betydningen er at først skal  $f(x, y)$  integres med hensyn på  $y$ , med  $x$  behandlet som en konstant. Deretter skal resultatet integreres med hensyn på  $x$ .

**Begrunnelse** Vi skal her nøye oss med en intuitiv begrunnelse. Et formelt bevis blir gitt i seksjon 7.6. For enkelhets skyld antar vi at  $f(x, y)$  er positiv. La  $A(x)$  være arealet av tverrsnittet til området under grafen i punktet  $x$ , vinkelrett på  $x$ -aksen. Se på figuren øverst neste side. Ved tverrsnittmetoden (seksjon 10.0.0) er volumet under grafen til  $f$  da

$$V = \int_a^b A(x) dx.$$

Men nå er jo

$$A(x) = \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy,$$



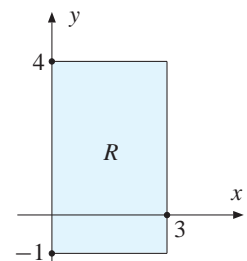
der  $x$  behandles som en konstant i integrasjonen. Altså

$$V = \int_a^b \left[ \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy \right] dx. \quad \blacksquare$$

Teorem 1 sier at vi kan regne ut dobbelintegralet ved å gjøre to vanlige envariabelintegrasjoner etter hverandre. Eksemplet under viser hvordan det fungerer. Først må vi ha en *beskrivelse* av integrasjonsområdet.

**Eksempel 1** Regn ut  $\iint_R (4x^2y + 2xy) dA$ ,  
der  $R$  er gitt ved  $x \in [0, 3]$ ,  $y \in [-1, 4]$ .

**Løsning** Integrasjonsområdet er vist på figuren til høyre. Vi har oppgitt en fiks ferdig beskrivelse av  $R$  i standardkoordinatene  $x, y$ . Teorem 1 gir oss



$$\begin{aligned} \iint_R (4x^2y + 2xy) dA &= \int_0^3 \left[ \int_{-1}^4 (4x^2y + 2xy) dy \right] dx \\ &= \int_0^3 \left[ 2x^2y^2 + xy^2 \right]_{y=-1}^{y=4} dx = \int_0^3 \left[ (32x^2 + 16x) - (2x^2 + x) \right] dx \\ &= \int_0^3 \left[ 30x^2 + 15x \right] dx = \left[ 10x^3 + \frac{15}{2}x^2 \right]_0^3 = \underline{\underline{\frac{675}{2}}} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Merk det som skjedde i 2. overgang: Jeg antideriverte uttrykket med hensyn på  $y$ , og behandlet  $x$  som en konstant.

Nå til en versjon av forrige teorem der rollene til  $x$  og  $y$  er byttet om. Dette begrunnes på helt analog måte som forrige teorem.

### **Teorem 2** Dobbelintegraler i standardkoordinater, versjon II

Anta at  $R \subseteq \mathbf{R}^2$  er begrenset og kan beskrives som mengden av alle  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$  slik at

$$y \in [a, b] \quad \text{og} \quad x \in [c(y), d(y)],$$

der  $a$  og  $b$  er faste tall mens intervallgrensene  $c(y)$  og  $d(y)$  tillates å variere med  $y \in [a, b]$ . Hvis  $f(x, y)$  er integrerbar på  $R$ , gjelder

$$\iint_R f(x, y) \, da = \int_a^b \left[ \int_{c(y)}^{d(y)} f(x, y) \, dx \right] dy.$$

**Eksempel 2** Regn ut  $\iint_R y^2 \, dA$ ,

der  $R$  er det kompakte området i  $\mathbf{R}^2$  begrenset av kurvene  $x = -y^2$ ,  $x = 4 - y^2$ ,  $y = 2$  og  $y = -2$ .

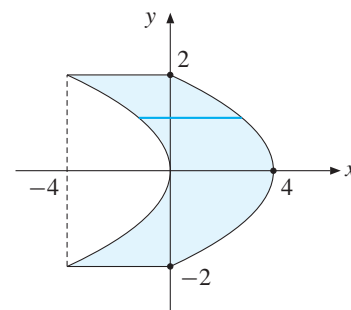
**Løsning** Integrasjonsområdet er vist på figuren til høyre.

Dette området kan beskrives ved

$$y \in [-2, 2], \quad x \in [-y^2, 4 - y^2]$$

i standardkoordinatene  $x, y$ .

Tankegang: For at punktet  $(x, y)$  skal havne innenfor  $R$ , må for det første  $y \in [-2, 2]$ . Etter at  $y$  er valgt, må så  $x$  velges slik at  $x \in [-y^2, 4 - y^2]$ . Se den horisontale streken på figuren. Så teorem 2 gir oss



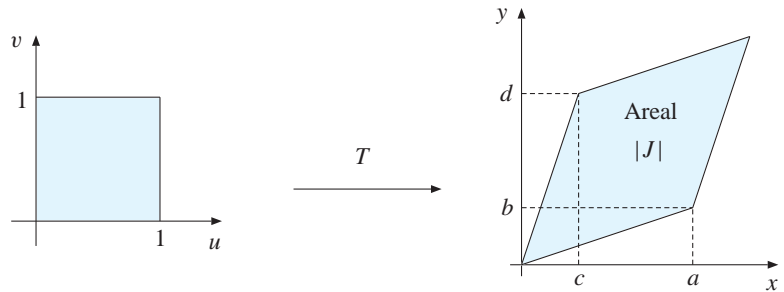
$$\begin{aligned} \iint_R y^2 \, dA &= \int_{-2}^2 \left[ \int_{-y^2}^{4-y^2} y^2 \, dx \right] dy = \int_{-2}^2 \left[ xy^2 \right]_{x=-y^2}^{x=4-y^2} dy \\ &= \int_{-2}^2 \left[ (4 - y^2)y^2 - (-y^2)y^2 \right] dx = \int_{-2}^2 4y^2 \, dy = \underline{\underline{\frac{64}{3}}} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

## Variabelskifte

Hittil har vi kun brukt standardkoordinatene  $x$  og  $y$  når vi har regnet ut integralet av  $f$  over områder  $R$ . Vi skal nå se at vi også kan bruke andre koordinatsystemer  $u, v$ . Et problem som oppstår da, er at koordinatene  $u, v$  kan *forstørre* eller *forminske* bildet. Graden av forstørrelse eller forminskning viser seg å måles av den såkalte **Jacobideterminanten**  $J$  til koordinatsystemet. For å komme frem til uttrykket for  $J$ , la oss se på det enkle eksemplet

$$\begin{cases} x = au + cv \\ y = bu + dv \end{cases} \quad (1)$$

der  $a, b, c, d$  er konstante tall. "Enhetskvadratet" i  $uv$ -planet tilsvarer da det skraverte parallelogrammet i  $xy$ -planet på figuren under.



Siden enhetskvadratet i  $uv$ -planet har areal 1, vil arealet  $A$  av dette parallelogrammet gi oss forstørrelsesfaktoren til koordinatsystemet  $u, v$ . Ved vektorproduktet får vi at arealet av parallelogrammet blir

$$A = \|(a, b, 0) \times (c, d, 0)\| = \|(0, 0, ad - bc)\| = |ad - bc|$$

(to vertikale streker fordi vi skal ha absoluttverdien av lengden til vektorproduktet). Med andre ord er arealet av parallelogrammet lik absoluttverdien av determinanten

$$J = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

som er den omtalte Jacobideterminanten til koordinatsystemet. Ved å sammenlikne med (1) ser vi at

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Dette er det generelle uttrykket for Jacobideterminanten til et koordinatsystem  $u, v$  i planet. I eksemplet vårt var Jacobideterminanten  $J$  uavhengig av punktet  $(u, v)$ , fordi alle de partielle deriverte var konstante. I det generelle tilfellet varierer  $J$  med  $u$  og  $v$ , og fungerer da som en "lokal" forstørrelsesfaktor på hvert sted. Når vi regner ut integraler ved å bruke  $u, v$  som koordinater, er det derfor

rimelig å gjette at vi må gange med absoluttverdien  $|J|$  av Jacobideterminanten i integralet for å kompensere. Denne gjettingen viser seg å klaffe, og vi ender dermed opp med den generelle oppskriften nedenfor når det gjelder beregning av dobbelintegraler. Oppskriften inkluderer standardkoordinatene  $x = u$  og  $y = v$  som et spesialtilfelle, fordi  $J = 1$  i dette tilfellet. Her og nå skal vi ikke begrunne oppskriften formelt, vi nøyer oss med de intuitive utledningene ovenfor. Formelle begrunnelser: Se seksjon 7.6.

### Hvordan beregne dobbelintegraler

Gitt et dobbelintegral  $\iint_R f(x, y) \, dA$  over et område  $R$  i planet.

1. Få oversikt over integrasjonsområdet  $R$ . Tegn figur!
2. Velg et koordinatsystem  $u, v$  slik at  $R$  kan beskrives på formen

$$u \in [a, b] \quad v \in [c(u), d(u)]$$

eventuelt med åpne intervallgrenser noen steder. Ofte blir grensene konstante. Skriv opp  $x$  og  $y$  uttrykt ved  $u, v$ . Går alt galt, så del  $R$  opp og bruk oppdelingsprinsippet 7.1.3 (3).

3. Regn ut *Jacobideterminanten* til koordinatsystemet  $u, v$ :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \quad (\text{uttrykt ved } u \text{ og } v)$$

4. Dobbeltintegralet er nå lik

$$\int_a^b \left[ \int_{c(u)}^{d(u)} f(T(u, v)) \cdot |J| \, dv \right] du,$$

der  $f(T(u, v))$  betyr at man skal sette  $(u, v)$ -uttrykkene for  $x$  og  $y$  inn i funksjonsuttrykket til  $f$ . Hvis noen integrasjonsgrenser er funksjoner, må de avhengige grensene settes innerst, som vist. Er alle grensene konstante, spiller rekkefølgen ingen rolle.

Forutsetningen for oppskriften er at  $f$  er kontinuerlig, at  $J \neq 0$  på området  $D$  i  $uv$ -planet som tilsvarer beskrivelsen av  $R$ , og at transformasjonen som uttrykker  $x$  og  $y$  ved  $u$  og  $v$  er injektiv og  $C^1$  på  $D$ . I praktiske eksempler er dette typisk oppfylt enten på *hele*  $D$  og  $R$  eller på *generiske delmengder* av dem. Siden mengder med innhold 0 kan droppes fra integrasjonsområdene uten at integralene påvirkes, kan metoden brukes også i den siste typen tilfeller.

**Eksempel 3** Regn ut  $\iint_R 15x^2y \, dA$ ,

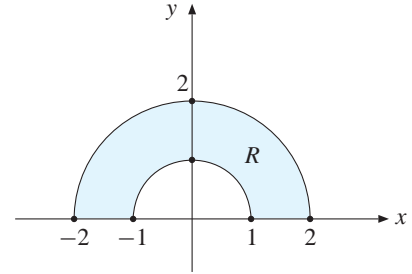
der  $R$  det lukkede området i  $\mathbf{R}^2$  begrenset av sirkelen  $x^2 + y^2 = 4$ , sirkelen  $x^2 + y^2 = 1$  og  $x$ -aksen.

**Løsning** Integrasjonsområdet er vist på figuren til høyre. Dette området lar seg enklest beskrive i polarkoordinater  $r, \theta$ :

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

Vi får beskrivelsen

$$\theta \in [0, \pi], \quad r \in [1, 2].$$



Jacobideterminanten er

$$\begin{aligned} J &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \cos^2 \theta - (-r \sin^2 \theta) \\ &= r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r. \end{aligned}$$

Vi har  $J = 0$  kun hvis  $r = 0$ , dvs. kun i origo. Ergo er  $J \neq 0$  på hele  $R$ . Integralet blir dermed (Nest siste overgang: Substituer  $u = \cos \theta$ )

$$\begin{aligned} \iint_R 15x^2y \, dA &= \int_0^\pi \left[ \int_1^2 15(r \cos \theta)^2 (r \sin \theta) \cdot r \, dr \right] d\theta \\ &= \int_0^\pi \left[ \int_1^2 15 \cos^2 \theta \sin \theta \cdot r^4 \, dr \right] d\theta \\ &= \int_0^\pi \left[ 3 \cos^2 \theta \sin \theta \cdot r^5 \right]_{r=1}^{r=2} d\theta \\ &= \int_0^\pi (96 \cos^2 \theta \sin \theta - 3 \cos^2 \theta \sin \theta) \, d\theta \\ &= \int_0^\pi 93 \cos^2 \theta \sin \theta \, d\theta = \left[ -31 \cos^3 \theta \right]_0^\pi = \underline{\underline{62}} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

*Bemerkning.* Når du heretter regner ut dobbelintegraler ved hjelp av polarkoordinater, kan du bare ta for gitt at  $J = r$ . Det er ikke nødvendig å finne opp kruttet på nytt hver gang. Tilsvarende gjelder for sylinderkoordinater og kulekoordinater i trippelintegraler, se neste seksjon.

**Definisjon 1 Areal og masse i planet**

La  $R \subseteq \mathbf{R}^2$  være en begrenset mengde.

1. Hvis funksjonen  $f(x, y) = 1$  er integrerbar på  $R$ , definerer vi *arealet* av  $R$  som

$$A = \iint_R 1 \, dA$$

2. Anta at en tynn plate med varierende massetetthet  $f(x, y)$  (målt i kg pr. arealenhet) ligger på  $R$ . Hvis funksjonen  $f$  er integrerbar på  $R$ , definerer vi *massen*  $M$  til platen (målt i kg) ved

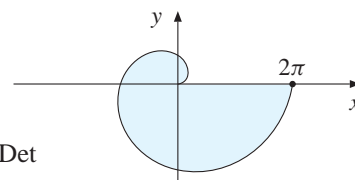
$$M = \iint_R f(x, y) \, dA.$$

Forklaring: Hvis vi tolker integralet under punkt 1 som et volum, er det volumet av et legeme med grunnflate  $R$  og høyde 1. For et slikt legeme er volumet lik arealet av grunnflaten, så dette stemmer. Videre stemmer arealdefinisjonen med vår gamle definisjon i tilfellet at  $R$  er området under grafen til en ikke-negativ funksjon  $f; \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  på et intervall  $[a, b]$ . For  $R$  kan da beskrives ved  $x \in [a, b]$ ,  $y \in [0, f(x)]$  (se figur s. 10.0.0), så

$$A = \iint_R 1 \, dA = \int_a^b \left[ \int_0^{f(x)} 1 \, dy \right] dx = \int_a^b [y]_0^{f(x)} dx = \int_a^b f(x) \, dx.$$

Når det gjelder definisjonen av masse, så observer først at hvis  $f$  er konstant, blir massen  $M$  lik tettheten  $f$  ganget med arealet. Som seg hør og bør. Hvis  $f$  varierer, vil en nedresum for funksjonen  $f$  på  $R$  intuitivt sett representere en nedre tilnærming til massen av platen. Vi kan få denne tilnærmingen så god vi vil ved å ta med tilstrekkelig mange delrektangler i summen. Dermed er det naturlig å *definere* massen  $M$  av platen som minste øvre grense for disse tilnærmingene, dvs. som integralet.

**Eksempel 4** Finn arealet av det lukkede området i  $\mathbf{R}^2$  begrenset av polar-kurven  $r = \theta$  for  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  og den positive delen av  $x$ -aksen.



**Løsning** Området  $R$  er vist til høyre. Det kan beskrives i polarkoordinater ved  $\theta \in [0, 2\pi]$ ,  $r \in [0, \theta]$ .



Siden vi bruker polarkoordinater, er  $J = r$ . Her er  $J = 0$  for  $r = 0$ . Men dette er ikke noe problem, fordi mengdene tilsvarende  $r = 0$  i  $r\theta$ -planet og  $xy$ -planet begge har innhold 0; de er henholdsvis et linjestykke og punktet origo. Vi kan derfor bruke oppskriften vår, og vi får

$$\begin{aligned} A &= \iint_R 1 \, dA = \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^\theta 1 \cdot r \, dr \right] d\theta = \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{2} r^2 \right]_{r=0}^{r=\theta} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \theta^2 d\theta = \left[ \frac{1}{6} \theta^3 \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{6} (2\pi)^3 = \underline{\underline{\frac{4}{3} \pi^3}} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

## 7.2 Oppgaver

1. Finn  $\int \int_R xy \, dA$ , der  $R \subseteq \mathbf{R}^2$  er området gitt ved kravene  $x \in [0, 2]$ ,  $y \in [1, 3]$ .
2. Finn  $\int \int_R \sqrt{y} \cos x \, dA$ , der  $R \subseteq \mathbf{R}^2$  er gitt ved kravene  $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ ,  $y \in [0, 4]$ .
3. Finn  $\int \int_R (x + y^2) \, dA$ , der  $R \subseteq \mathbf{R}^2$  er området gitt ved  $x \in [0, 2]$ ,  $y \in [0, x^2]$ . Skisser  $R$ .
4. Finn  $\int \int_R (x + \sqrt{y}) \, dA$ , der  $R \subseteq \mathbf{R}^2$  er gitt ved  $y \in [0, 1]$ ,  $x \in [-y, y]$ . Skisser  $R$ .

I hver av oppgavene 5–10 er gitt et område  $R \subseteq \mathbf{R}^2$  og en funksjon  $f(x, y)$  definert på  $R$ . Du skal

- a) Skissere  $R$ , og finne en beskrivelse av  $R$ .
  - b) Finne  $\int \int_R f(x, y) \, dA$ .
5.  $R$  er det kompakte området avgrenset av linjene  $y = 2x$ ,  $x = 1$  og  $y = 0$ . La  $f(x, y) = xy^2$ .
  6.  $R$  er det kompakte området avgrenset av kurven  $y = x^2 - 4$  og  $x$ -aksen. La  $f(x, y) = x^2(1 - y)$ .
  7.  $R$  er det kompakte området avgrenset av kurvene  $x = 4 - y^2$  og  $x = 3y$ . La  $f(x, y) = xy$ .
  8.  $R$  er området gitt ved  $x^2 + y^2 \leq 4$ . La  $f(x, y) = x^2$ .
  9.  $R$  er det lukkede området begrenset av polarkurven  $r = 2 - \cos \theta$ , linjen  $y = x$  og  $x$ -aksen, for  $x \geq 0$ . La  $f(x, y) = 1$ .
  10.  $R$  er det lukkede området begrenset av kurvene  $x = 2(1 - y^2)$  og  $x = 1 - y^2$ . La  $f(x, y) = xy^4$ .
  11. Finn arealet innenfor en sirkel med radius  $R$ .

12. Finn arealet av det kompakte området  $R \subseteq \mathbf{R}^2$  begrenset av polarkurven  $r = \sqrt{1 - \cos \theta}$ .
13. Finn arealet av området  $R \subseteq \mathbf{R}^2$  gitt ved  $(x/a)^2 + (y/b)^2 \leq 1$ , der  $a$  og  $b$  er konstanter. Hint: Bruk koordinater  $x = au$ ,  $y = bv$ .
14. La  $R \subseteq \mathbf{R}^2$  være gitt ved  $x^2 + y^2 \leq 1$  og  $x^2 + (y - 1)^2 \leq 1$ . Finn arealet av  $R$ .
15. La  $S$  være en tynn, sirkelformet plate med radius 10 cm. Massetettheten til  $S$  øker utover mot kanten av  $S$ , slik: Hvis  $\mathbf{p}$  er et punkt på  $S$ , så er massetettheten  $\mu(\mathbf{p})$  i punktet  $\mathbf{p}$  gitt ved  $\mu(\mathbf{p}) = kd$ , der  $d$  er avstanden til skivens sentrum og  $k > 0$  er en konstant. Finn massen til  $S$ .

16. Finn integralet av  $f(x, y) = e^{-y^2}$  over det lukkede området  $R \subseteq \mathbf{R}^2$  begrenset av de tre linjene  $x = 0$ ,  $y = 1$  og  $y = x$ .

I oppgavene 17–20 skal du finne volumet av legemet begrenset oppad av grafen  $z = f(x, y)$ , ned-ad av  $xy$ -planet, og sideveis av de gitte betingelser på  $x$  og  $y$ .

17.  $z = 1 + x^2 + y$ ,  $y = 0$ ,  $y = x$ ,  $x = 1$
18.  $z = y^2$ ,  $x = y^2 - 4$ ,  $x = 0$
19.  $z = 1 - x^2 - y^2$ ,  $x^2 + y^2 \leq 1$
20.  $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ ,  $x^2 + y^2 \leq 1$ .
21. *Arealet innenfor polarkurver.* Vis at hvis regionen  $R \subseteq \mathbf{R}^2$  er beskrevet i polarkoordinater ved  $\theta \in [a, b]$ ,  $r \in [0, f(\theta)]$ , så er arealet av  $R$

$$A = \int_a^b \frac{1}{2} \left[ f(\theta) \right]^2 d\theta.$$

22. Bruk resultatet fra oppgave 21 til å løse oppgavene 11 og 12.

## 7.3 Trippelintegraler

Hvis  $f; \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$  er en funksjon av tre variable, kalles integraler på formen  $\int_R f(\mathbf{x})d\mathbf{x}$  for *trippelintegraler*. De skrives vanligvis

$$\iiint_R f(x, y, z) dV.$$

Et trippelintegral av en gitt positiv funksjon kan ikke tolkes direkte som et volum i  $\mathbf{R}^3$ . Selve integrasjonsområdet  $R$  er jo nå tredimensjonalt! Imidlertid har vi følgende tolkninger:

### Definisjon 1 Volum og masse i rommet

La  $R \subseteq \mathbf{R}^3$  være en begrenset mengde.

1. Hvis den konstante funksjonen  $f(x, y, z) = 1$  er integrerbar på  $R$ , definerer vi *volumet*  $V$  av  $R$  som

$$V = \iiint_R 1 dV$$

2. Anta at et legeme med varierende massetetthet  $f(x, y, z)$  (målt i kg pr. volumenhet) har form som  $R$ . Hvis funksjonen  $f$  er integrerbar på  $R$ , definerer vi *massen*  $M$  til legemet (målt i kg) ved

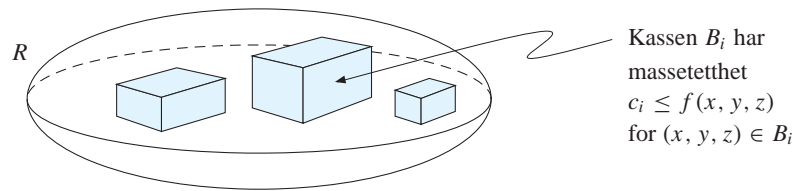
$$M = \iiint_R f(x, y, z) dV.$$

La oss se på definisjonen av masse først. Tenk deg at du har et legeme  $R$  i rommet med varierende massetetthet  $f(x, y, z)$ , som for eksempel legemet  $R$  vist på figuren øverst neste side. En nedresum

$$S = c_1 v(B_1) + c_2 v(B_2) + \cdots + c_m v(B_m)$$

for  $f(x, y, z)$  på  $R$  vil da intuitivt kunne tolkes som en *nedre tilnærming* til massen  $M$  av  $R$ . Hvert rektangel  $B_i$  representerer en rettvinklet boks i rommet med volum  $v(B_i)$  og massetetthet lik  $c_i$  (målt i f.eks.  $\text{kg/m}^3$ ), der

$$c_i \leq f(x, y, z)$$



for alle  $(x, y, z)$  i kassen. Vi kan få tilnærmingen så god vi vil ved å gjøre boksene mindre og ta med flere av dem. Dermed er det naturlig å *definere* massen  $M$  av legemet som minste øvre grense for disse tilnærmingene, det vil si som integralet.

Ideen er den samme når det gjelder definisjonen av volum. Vi kan lage en nedresum for den konstante funksjonen  $f(x, y, z) = 1$  ved å velge  $c_i = 1$  for alle  $i$ . En slik nedresum kan da tokes som summen av volumene til rettvinklede kasser inneholdt i  $R$ , jamfør figuren øverst på siden. Dette gir en nedre tilnærming til volumet av  $R$ . Vi definerer volumet  $V$  som minste øvre grense for disse tilnærmingene, dvs. som integralet av funksjonen 1 på  $R$ .

Det gjenstår å sjekke at den nye volumdefinisjonen forrige side stemmer med vår volumtolkning fra forrige seksjon i tilfellet at  $R$  er området under grafen til en funksjon av to variable. Når vi har gjennomgått den generelle metodikken for beregning av trippelintegraler (se neste side), blir imidlertid dette helt analogt til den tilsvarende regningen vi gjorde for arealdefinisjonen på side 240. Se oppgave 7.8.1.

## Beregning av trippelintegraler

Dette er analogt til dobbelintegraler. Den generelle oppskriften for beregning av “typiske” trippelintegraler over et område  $R$  i rommet er vist på neste side. Disse integralene kan regnes ut ved å gjøre *tre* envariabelintegrasjoner etter hverandre. Også her kan vi bruke et annet koordinatsystem  $uvw$  enn standardkoordinatene. Hvis  $D$  er området i  $uvw$ -rommet som tilsvarer  $R$ , kan vi tilbakeføre integralet til et integral over  $D$  i  $uvw$ -rommet. Igjen får vi en Jacobideterminant  $J$  som representerer forstørrelsen.

Forutsetningen for oppskriften er, analogt med tidligere, at  $f$  er kontinuertlig, at  $J \neq 0$  på området  $D$  i  $uvw$ -rommet som tilsvarer  $R$ , og at transformasjonen som uttrykker  $x, y, z$  ved  $u, v, w$  er injektiv og  $C^1$  på  $D$ . I praksis er dette typisk oppfylt enten på *hele*  $D$  og  $R$  eller på *generiske delmengder* av dem. Siden mengder med innhold 0 kan droppes fra integrasjonsområdene uten at integralene påvirkes, kan metoden brukes også i den siste typen tilfeller.

**Hvordan beregne trippelintegraler**

Gitt et integral  $\iiint_R f(x, y, z) dV$  over et område  $R$  i rommet.

1. Få oversikt over integrasjonsområdet  $R$ . Tegn figur!
2. Velg et koordinatsystem  $u, v, w$  slik at du kan finne en beskrivelse av  $R$  på formen

$$u \in [a, b] \quad v \in [c(u), d(u)] \quad w \in [r(u, v), s(u, v)]$$

eventuelt med åpne intervallgrenser noen steder. Er du heldig, blir alle grensene konstante. Skriv opp  $x, y, z$  som funksjoner av  $u, v, w$ . Går alt galt, så del  $R$  opp og bruk teorem 7.1.3 (3).

3. Regn ut *Jacobideterminanten* til koordinatsystemet  $u, v, w$ :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \quad (\text{uttrykt ved } u, v \text{ og } w)$$

4. Trippelintegralet er nå lik

$$\int_a^b \left[ \int_{c(u)}^{d(u)} \left[ \int_{r(u,v)}^{s(u,v)} f(T(u, v, w)) \cdot |J| dw \right] dv \right] du,$$

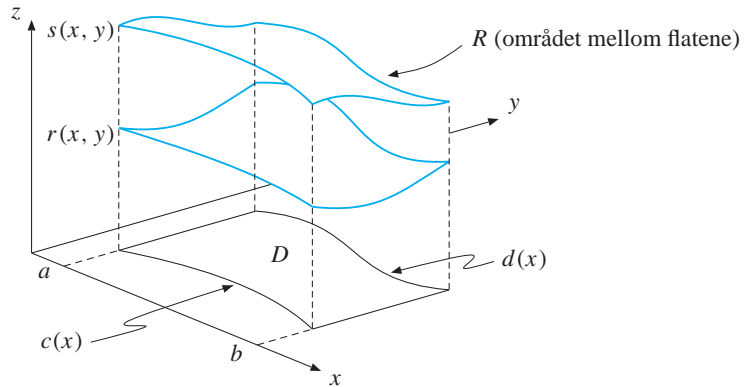
der  $f(T(u, v, w))$  betyr at man skal sette  $(u, v, w)$ -uttrykkene for  $x, y$  og  $z$  inn i funksjonsuttrykket til  $f$ . Er ikke alle integrasjonsgrensene konstante, må de mest avhengige grensene settes innerst. Er alle grensene konstante, er rekkefølgen uvesentlig.

Vi skal her nøye oss med en intuitiv begrunnelse for denne oppskriften. Formell begrunnelse: Se seksjon 7.6. For å forstå hvordan envariabel-integrasjonene kommer inn i bildet ser vi på volumberegning, jamfør definisjon 7.3.1. Anta at vi skal finne volumet av et område  $R$  gitt ved

$$z \in [r(x, y), s(x, y)] \quad \text{for} \quad (x, y) \in D,$$

der området  $D$  i  $xy$ -planet i sin tur er gitt ved  $x \in [a, b], y \in [c(x), d(x)]$ . Vi antar at  $r(x, y) \geq 0$  på  $D$ . Se figuren øverst neste side. Ifølge oppskriften vi skal begrunne er nå volumet  $V$  av  $R$  gitt ved

$$V = \iiint_R 1 dV = \int_a^b \left[ \int_{c(x)}^{d(x)} \left[ \int_{r(x,y)}^{s(x,y)} 1 dz \right] dy \right] dx.$$



Hvis vi regner ut integralet i henhold til oppskriften, får vi

$$V = \int_a^b \left[ \int_{c(x)}^{d(x)} \left[ z \right]_{r(x,y)}^{s(x,y)} dy \right] dx = \int_a^b \left[ \int_{c(x)}^{d(x)} (s(x, y) - r(x, y)) dy \right] dx.$$

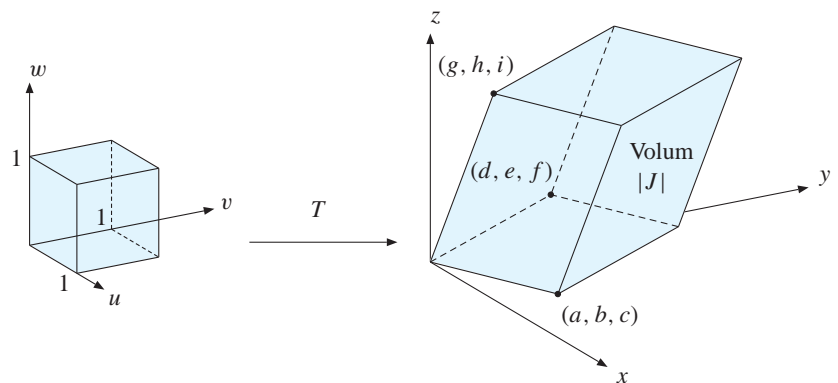
Men det følger fra resultatene i forrige seksjon at dette er volumet mellom grafene til  $r(x, y)$  og  $s(x, y)$ , dvs. volumet av  $R$ . Det er nemlig volumet opp til øverste graf minus volumet opp til nederste!

Resonnementet vi gjorde her tilsvarer  $f = 1$  i oppskriften. Et mer generelt resonnement kan gjøres når  $f$  ikke er konstant lik 1.

For å forstå Jacobideterminantens rolle i oppskriften, anta at vi bruker koordinater  $u, v, w$  slik at

$$\begin{cases} x = au + dv + gw \\ y = bu + ev + hw \\ z = cu + fv + iw \end{cases} \quad (a, b, \dots, h, i \text{ konstante tall}).$$

Enhetskuben i  $uvw$ -rommet tilsvarer da parallelepipedet i  $xyz$ -rommet på figuren under. Volumet av dette er nettopp  $|J|$ , se seksjon 10.0.0! Så  $|J|$  gir forstørrelsesfaktoren.



**Eksempel 1** Finn  $\iiint_R 12x^2yz \, dV$ ,

der  $R \subseteq \mathbf{R}^3$  er kassen gitt ved  $x \in [-1, 1]$ ,  $y \in [0, 2]$ ,  $z \in [0, 1]$ .

**Løsning** Vi har oppgitt en fiks ferdig beskrivelse av  $R$  i standardkoordinatene. Siden  $R$  er så oversiktlig, dropper vi figuren. Integralet blir

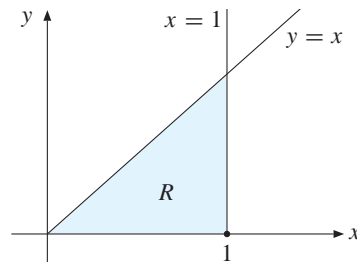
$$\begin{aligned} \iiint_R 12x^2yz \, dV &= \int_{-1}^1 \left[ \int_0^2 \left[ \int_0^1 12x^2yz \, dz \right] dy \right] dx \\ &= \int_{-1}^1 \left[ \int_0^2 \left[ 6x^2yz^2 \right]_{z=0}^{z=1} dy \right] dx = \int_{-1}^1 \left[ \int_0^2 6x^2y \, dy \right] dx \\ &= \int_{-1}^1 \left[ 3x^2y^2 \right]_{y=0}^{y=2} dx = \int_{-1}^1 12x^2 \, dx = \left[ 4x^3 \right]_{-1}^1 = \underline{\underline{8}} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Eksempel 2** Finn  $I = \iiint_R x \, dV$ ,

der  $R \subseteq \mathbf{R}^3$  er det lukkede området avgrenset av planene  $z = 0$ ,  $y = 0$ ,  $y = x$ ,  $x = 1$  samt flaten  $z = xy + 1$ .

**Løsning** Her må vi tegne figur. De tre planene  $y = 0$ ,  $y = x$  og  $x = 1$  står alle vinkelrett på  $xy$ -planet, og det kan derfor være lurt å tegne de tilsvarende linjene i  $xy$ -planet først. Da fås det trekantede området på figuren til høyre. "Veggene" til området  $R$  står vertikalt opp fra disse strekene. Gulvet blir planet  $z = 0$  (dvs.  $xy$ -planet), og taket blir definert av flaten  $z = xy + 1$ . Så  $R$  kan beskrives slik:

$$\begin{aligned} x &\in [0, 1] \\ y &\in [0, x] \\ z &\in [0, xy + 1]. \end{aligned}$$



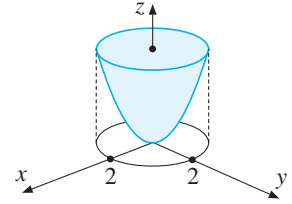
Så integralet blir (merk at de mest avhengige grensene settes innerst)

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left[ \int_0^x \left[ \int_0^{xy+1} x \, dz \right] dy \right] dx = \int_0^1 \left[ \int_0^x \left[ xz \right]_{z=0}^{z=xy+1} dy \right] dx \\ &= \int_0^1 \left[ \int_0^x x(xy + 1) \, dy \right] dx = \underline{\underline{\text{etc.}}} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Eksempel 3** La  $R \subseteq \mathbf{R}^3$  være det lukkede området begrenset av flaten  $z = x^2 + y^2$  og planet  $z = 4$ . Finn volumet av  $R$ .

**Løsning** Området  $R$  er vist på figuren til høyre. For å beskrive det, er det enklest å bruke sylinderkoordinater  $r, \theta, z$ :

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$



I sylinderkoordinater kan flaten  $z = x^2 + y^2$  skrives  $z = r^2$ . Skjæringen med planet  $z = 4$  blir dermed gitt ved  $r^2 = 4$ , dvs.  $r = 2$ . Den sirkulære "skyggen" av  $R$  i  $xy$ -planet (se figur) kan dermed beskrives ved  $r \in [0, 2]$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$ . For hver valgt kombinasjon  $r, \theta$  i denne skyggen, må så  $z \in [r^2, 4]$  for at vi skal havne innenfor  $R$ . Dermed kan vi beskrive  $R$  ved

$$r \in [0, 2], \quad \theta \in [0, 2\pi), \quad z \in [r^2, 4].$$

Jacobideterminanten er

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{\text{regn}}{=} r.$$

Vi har  $J = 0$  langs  $z$ -aksen, men siden dette er en delmengde av  $R$  med innhold 0, gjør det ingenting. Volumet blir dermed

$$\begin{aligned} V &= \iiint_R 1 \, dV = \int_0^2 \left[ \int_0^{2\pi} \left[ \int_{r^2}^4 1 \cdot r \, dz \right] d\theta \right] dr \\ &= \int_0^2 \left[ \int_0^{2\pi} \left[ rz \right]_{z=r^2}^{z=4} d\theta \right] dr = \int_0^2 \left[ \int_0^{2\pi} (4r - r^3) d\theta \right] dr = \underline{\underline{8\pi}} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

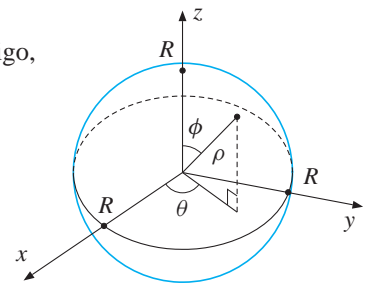
**Eksempel 4** Finn volumet av en kule med radius  $R$ .

**Løsning** Vi lar kulen ha sentrum i origo, og bruker kulekoordinater  $\rho, \phi, \theta$ :

$$\begin{cases} x = \rho \sin \phi \cos \theta \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{cases}$$

Kulen kan da beskrives ved

$$\rho \in [0, R], \quad \phi \in [0, \pi], \quad \theta \in [0, 2\pi).$$



Vi får at

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin \phi \cos \theta & \rho \cos \phi \cos \theta & -\rho \sin \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta & \rho \cos \phi \sin \theta & \rho \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi & -\rho \sin \phi & 0 \end{vmatrix}.$$

Forenkling gir  $J = \rho^2 \sin \phi$ . Siden  $\phi \in [0, \pi]$ , er  $J \geq 0$ . Kulens volum:

$$\begin{aligned} V &= \int \int \int_{\text{kulen}} 1 \, dV = \int_0^R \left[ \int_0^\pi \left[ \int_0^{2\pi} 1 \cdot \rho^2 \sin \phi \, d\theta \right] d\phi \right] d\rho \\ &= \int_0^R \left[ \int_0^\pi 2\pi \rho^2 \sin \phi \, d\phi \right] d\rho = \int_0^R 4\pi \rho^2 \, d\rho = \underline{\underline{\frac{4}{3}\pi R^3}} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

### 7.3 Oppgaver

I oppgavene 1–3 skal du finne  $\int \int \int_R f(x, y, z) \, dV$ .

1.  $f(x, y, z) = xyz$ ,  $R \subseteq \mathbf{R}^3$  er gitt ved  $x \in [0, 1]$ ,  $y \in [0, 1]$ ,  $z \in [0, 3]$
2.  $f(x, y, z) = x$ ,  $R \subseteq \mathbf{R}^3$  er gitt ved  $x \in [-1, 1]$ ,  $y \in [0, 1]$ ,  $z \in [0, 1]$
3.  $f(x, y, z) = xy$ ,  $R \subseteq \mathbf{R}^3$  er gitt ved  $x \in [0, 1]$ ,  $y \in [0, x]$ ,  $z \in [0, x^2 + y]$

I hver av oppgavene 4–6 er gitt et område  $R \subseteq \mathbf{R}^3$  og en funksjon  $f(x, y, z)$  definert på  $R$ . Du skal gjøre følgende:

- a) Finn en beskrivelse av  $R$
  - b) Finn  $\int \int \int_R f(x, y, z) \, dV$ .
4.  $R$  er det kompakte området som er avgrenset av planene  $z = 0$ ,  $z = 1$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$  og  $y = x$ . La  $f(x, y, z) = xyz$ .
  5.  $R$  er det kompakte området som er avgrenset av flatene  $y = 4 - x^2$ ,  $y = x^2$ ,  $z = 0$  og  $z = y$ . La  $f(x, y, z) = y$ .
  6.  $R$  er det kompakte området som er avgrenset av sylindringen  $x^2 + y^2 = 1$ , flaten  $z = 1 - x^2 - y^2$  og  $xy$ -planet. La  $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ .

I hver av oppgavene 7–13 skal du finne volumet av det kompakte legemet  $R$  med de oppgitte begrensninger, ved å beregne  $\int \int \int_R 1 \, dV$ .

7.  $R$  er begrenset av paraboloiden  $z = 1 - x^2 - y^2$  og  $xy$ -planet.
8.  $R$  er legemet som er begrenset av øvre halvdel av sfæren  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  samt paraboloiden  $z = 1 - x^2 - y^2$ .
9.  $R$  er legemet som er begrenset av sylindringen  $x^2 + y^2 = 4$ , planet  $z = x + y + 5$  og  $xy$ -planet.
10.  $R$  er legemet som er begrenset av sfærene  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  og  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ , samt flaten  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ .
11.  $R$  er legemet som er begrenset av sylindringen  $(x - 5)^2 + y^2 = 1$ , flaten  $z = x^2 + y^2$  og  $xy$ -planet. Hint: Bruk sylinderkoordinater sentrert i  $(x, y) = (5, 0)$ .
12.  $R$  er begrenset av flaten  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , samt sylindringen  $x^2 - 2x + y^2 = 0$  og  $xy$ -planet.
13.  $R$  er legemet som er begrenset av ellipsoiden  $(x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 = 1$ , der  $a, b, c$  er konstanter. Hint: Bruk koordinater  $u, v, w$  gitt ved  $x = au$ ,  $y = bv$ ,  $z = cw$ .
14. Finn massen av en kule med radius  $R$  og massetetthet  $\mu(\mathbf{p}) = kd$  i hvert punkt  $\mathbf{p}$ , der  $d$  er avstanden fra  $\mathbf{p}$  til kulens sentrum og  $k > 0$  er en konstant.



## 7.4 Kurveintegraler

I denne seksjonen skal vi integrere funksjoner av flere variable langs *kurver*. For eksempel kan en kontinuerlig skalarfunksjon

$$f(x, y, z)$$

integreres langs en stykkevis glatt kurve  $C$  i rommet  $\mathbf{R}^3$ . Denne typen integraler, som kalles *kurveintegraler*, kan f.eks. tolkes som masseberegninger. Hvis vi tenker oss  $C$  som en tynn streng med varierende massetetthet  $f(x, y, z)$  i punktet  $(x, y, z)$ , så vil kurveintegralet av  $f(x, y, z)$  langs  $C$  kunne tolkes som den *totale massen* av strengen. Vi skal komme tilbake til dette senere, vi går først rett på definisjonen.

### Definisjon 1 Kurveintegral

La  $C$  være en stykkevis glatt kurve i  $\mathbf{R}^n$ , og la  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$  være en stykkevis glatt parametrisering av  $C$ . La  $f; \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  være kontinuerlig i alle punkter på  $C$ . Vi definerer kurveintegralet av  $f$  langs  $C$  ved

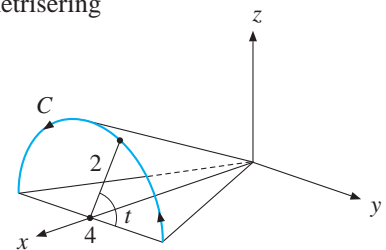
$$\int_C f(x_1, \dots, x_n) ds \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \cdot |\mathbf{r}'(t)| dt$$

Her betyr  $f(\mathbf{r}(t))$  at man skal sette inn  $t$ -uttrykkene for  $x_1, \dots, x_n$  i funksjonsuttrykket til  $f$ . Tilsynelatende avhenger definisjonen i boksen av parametriseringen til  $C$ . Men i seksjon 7.7 skal vi vise at dette ikke er tilfelle.

**Eksempel 1** La  $C \subseteq \mathbf{R}^3$  være skjæringen mellom flaten  $x = 2\sqrt{y^2 + z^2}$  og planet  $x = 4$ , for  $z \geq 0$ . Vil finne kurveintegralet av  $f(x, y, z) = xy^2z$  langs  $C$ .

**Løsning** Først må vi finne en parametrisering av  $C$ . For å få til det tegner vi en figur, se til høyre. Vi ser at vinkelen  $t$  på en naturlig måte angir hvor på  $C$  vi er, så vi velger  $t$  som parameter. Får da

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \cos t \\ z = 2 \sin t \end{cases} \quad t \in [0, \pi].$$



Pilene viser hvordan parameterpunktet  $(x, y, z)$  beveger seg når  $t$  øker fra 0 til  $\pi$ . Vi finner lengden til parametriseringens hastighetsvektor:

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} = \sqrt{0 + 4 \sin^2 t + 4 \cos^2 t} = 2.$$

Deretter er det bare å sette inn i formelen fra definisjonen:

$$\int_C xy^2z \, ds = \int_0^\pi 4(2 \cos t)^2(2 \sin t) \cdot 2 \, dt = \frac{64}{3} \left[ -\cos^3 t \right]_0^\pi = \frac{128}{3} \quad \blacksquare$$

Så over til hvordan vi kan *tolke* kurveintegraler. Vi setter opp følgende:

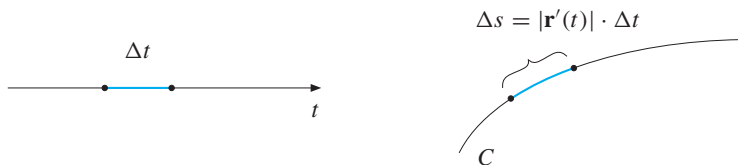
### Definisjon 2 Lengde og masse langs en kurve

La  $C$  være en stykkevis glatt kurve i  $\mathbf{R}^n$ .

1. Vi definerer *lengden*  $s$  av kurven  $C$  ved  $s = \int_C 1 \, ds$ .
2. Anta at en streng med varierende massetetthet  $f(x_1, \dots, x_n)$  (målt i kg pr. lengdeenhet) har form som  $C$ . Hvis funksjonen  $f$  er kontinuerlig på  $C$ , definerer vi *massen*  $M$  til strengen (målt i kg) ved

$$M = \int_C f(x_1, \dots, x_n) \, ds.$$

Hvorfor er dette rimelige definisjoner? La  $\mathbf{r}(t)$  være en parametrisering av  $C$ . Farten  $|\mathbf{r}'(t)|$  angir da hvor fort parameterpunktet  $(x_1, \dots, x_n)$  flytter seg som funksjon av  $t$ . Et lite  $t$ -intervall med lengde  $\Delta t$  rundt punktet  $t \in [a, b]$  tilsvarer da en lengde  $\Delta s \approx |\mathbf{r}'(t)| \cdot \Delta t$  på kurven:



Tenker vi infinitesimalt, svarer dette til at  $ds = |\mathbf{r}'(t)| \cdot dt$ . "Summerer" vi alle de små bidragene, får vi  $s = \int_a^b ds = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)| \, dt$ .

Tankegangen for massen er helt tilsvarende, bortsett fra at inter-vallet  $\Delta t$  da gir et bidrag

$$\Delta M = (\text{massetetthet}) \cdot (\text{lengde}) \approx f(\mathbf{r}(t)) \cdot |\mathbf{r}'(t)| \Delta t,$$

slik at  $M = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \cdot |\mathbf{r}'(t)| \, dt$ .

For å sjekke at definisjonen av kurvelengde stemmer med vår gamle definisjon av graflengde fra seksjon 1.11, anta at  $C \subseteq \mathbf{R}^2$  er grafen til en funksjon  $f$  på et intervall  $[a, b]$ . I så fall kan  $C$  parametriseres ved  $\mathbf{r}(t) = (t, f(t))$ , for  $t \in [a, b]$ . Utregning gir oss vår gamle formel:

$$\int_C 1 \, ds = \int_a^b 1 \cdot |\mathbf{r}'(t)| \, dt = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(t)]^2} \, dt.$$

## 7.4 Oppgaver

I oppgavene 1–4 skal du finne  $\int_C f(x, y) ds$ , der  $C \subseteq \mathbf{R}^2$  er kurven med den oppgitte parametri-seringen  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ .

1.  $f(x, y) = x^2 + y$ ,  $x = t$ ,  $y = 2t$ ,  $t \in [0, 2]$
2.  $f(x, y) = x \cos(x + y)$ ,  $x = 3t + 1$ ,  $y = -4t$ ,  $t \in [-1, 1]$
3.  $f(x, y) = xy$ ,  $x = 2 \cos t$ ,  $y = 2 \sin t$ ,  $t \in [0, \pi/2]$
4.  $f(x, y) = x + y^3$ ,  $x = t^5$ ,  $y = t^7$ ,  $t \in [-1, 1]$

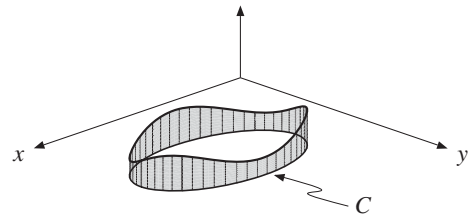
I oppgavene 5–7 skal du beregne  $\int_C f(x, y, z) ds$ , der  $C \subseteq \mathbf{R}^3$  er kurven med den gitte parametri-seringen  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ .

5.  $f(x, y, z) = xyz$ ,  $x = t$ ,  $y = 2t + 1$ ,  $z = 3t$ ,  $t \in [0, 1]$
6.  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ ,  $x = 2t$ ,  $y = -t$ ,  $z = t$ ,  $t \in [-1, 1]$
7.  $f(x, y, z) = x + y$ ,  $x = t$ ,  $y = t^3$ ,  $z = e^{\sin t}$ ,  $t \in [-1, 1]$

I oppgavene 8–10 skal du gjøre følgende:

- a) Finn en parametrisering av den gitte kurven  $C \subseteq \mathbf{R}^3$
- b) Finn  $\int_C f(x, y, z) ds$ .
8.  $C$  er snittet mellom flaten  $y = 2x^2 + 1$  og planet  $z = y$ , for  $x \in [0, 1]$ . La  $f(x, y, z) = x$ .
9.  $C$  er skjæringskurven mellom sylinderflaten gitt ved  $(x/3)^2 + (z/5)^2 = 1$  og planet  $3y = 4x$ . La  $f(x, y, z) = x^2$ .
10. La  $C_1$  være den delen av sirkelen  $x^2 + y^2 = 1$  i planet som ligger i området  $z \geq 0$ , og la  $C_2$  være  $x$ -aksen fra  $x = -1$  til  $x = 1$ . La  $C = C_1 \cup C_2$ , og la  $f(x, y, z) = y$ . (Hint: Del opp integralet langs  $C$  i to biter.)
11. Finn omkretsen av en sirkel med radius  $R$ .
12. Finn lengden av første omdreining for spiralkurven i eksempel 10.0.0, dvs. lengden av den delen som tilsvarer  $t \in [0, 2\pi]$ .

13. “Gjerde”-tolkningen av kurveintegraler. La  $C$  være en stykkevis glatt kurve i planet med endelig lengde, og la  $f(x, y)$  være kontinuerlig, begrenset og ikke-negativ på  $C$ . Begrunn at kurveintegralet  $\int_C f(x, y) ds$  da kan tolkes som arealet av et “gjerde” langs  $C$  med høyde  $f(x, y)$  i hvert punkt  $(x, y) \in C$ .



14. Vis at ellipsen  $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$  i planet har omkrets  $\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt$ .

15. En tynn trådløkke har form som enhets-sirke-len i  $xy$ -planet. Massetettheten til tråden er gitt ved  $f(x, y) = 1 + x^2$  i hvert punkt. Finn massen av trådløkken.

16. I denne oppgaven skal vi bevise at funksjonen  $g$  definert i beviset nederst s. 259 er  $C^1$ . La  $s_0 \in V$  være gitt. La  $t_0 = g(s_0)$ . Siden  $|\mathbf{r}'(t_0)| \neq 0$ , må minst en av komponentene  $r'_j(t_0)$  til  $\mathbf{r}'(t_0)$  være ulik null. Anta  $r'_1(t_0) \neq 0$ , de andre tilfellene tas tilsvarende. Definer  $F : U \times \mathbf{R}^{n-1} \rightarrow \mathbf{R}^n$  ved

$$\begin{aligned} F(t, u_2, \dots, u_n) \\ = (r_1(t), r_2(t) + u_2, \dots, r_n(t) + u_n). \end{aligned}$$

- a) Sjekk at  $F(t, 0, \dots, 0) = \mathbf{r}(t)$  for alle  $t \in U$ , og at  $F$  er  $C^1$ .
- b) Vis at  $\det(F'(t_0, 0, \dots, 0)) \neq 0$ , og begrunn at  $F$  har en  $C^1$  invers  $F^{-1}$  definert i en åpen kule med sentrum  $F(t_0, 0, \dots, 0) = \mathbf{r}(t_0)$ .
- c) Vis at  $g(s) = (F^{-1})_1(\mathbf{h}(s))$  i en omegn om punktet  $s_0$ , og begrunn at  $g$  er  $C^1$  i  $s_0$ .

## 7.5 Flateintegraler

I denne seksjonen skal vi integrere kontinuerlige skalarfunksjoner

$$f(x, y, z)$$

av tre variable langs stykkevis glatte flater  $S$  i rommet  $\mathbf{R}^3$ . Vi skal se at slike integraler f.eks. kan tolkes som beregning av total masse for en tynn hinne  $S$  med varierende massetetthet  $f(x, y, z)$ . Men først definisjonen.

### Definisjon 1 Flateintegraler i $\mathbf{R}^3$

La  $S$  være en stykkevis glatt flate i rommet  $\mathbf{R}^3$ , og la  $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbf{R}^3$  være en stykkevis glatt parametrisering av  $S$ . La  $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$  være kontinuerlig på  $S$ . Vi definerer flateintegralet av  $f$  langs  $S$  ved

$$\iint_S f(x, y, z) \, dS \stackrel{\text{def}}{=} \iint_D f(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| \, dA$$

Merk at integralet til høyre i definisjonen ovenfor er et vanlig dobbelintegral over området  $D$  i  $uv$ -planet. Notasjonen  $f(\mathbf{r}(u, v))$  betyr at en skal sette inn  $(u, v)$ -uttrykkene for  $x, y, z$  i uttrykket til  $f$ . Videre skal

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$$

uttrykkes ved  $u$  og  $v$ . I seksjon 7.7 finner du et bevis for at definisjonen av flateintegral ikke avhenger av parametriseringen.

**Eksempel 1** La  $S \subseteq \mathbf{R}^3$  være den delen av flaten

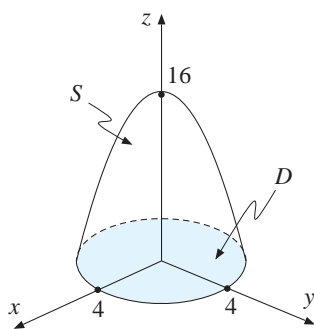
$$z = 16 - x^2 - y^2$$

som ligger i området gitt ved  $z \geq 0$ . Vi skal finne flateintegralet av  $f(x, y, z) = x^2 y^2 z$  langs  $S$ .

**Løsning** For å finne en parametrisering av  $S$ , tegner jeg en figur, se figur 10.0.0. Vi ser at vi kan bruke

$$u = x \quad \text{og} \quad v = y$$

som parametre.



Figur 7.5.1

Parameterområdet  $D$  i  $uv$ -planet blir gitt ved

$$u^2 + v^2 \leq 16.$$

Så parametriseringen er  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ , der

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 16 - u^2 - v^2 \end{cases} \quad (u, v) \in D.$$

Dette gir

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & 0 & -2u \\ 0 & 1 & -2v \end{vmatrix} = [2u, 2v, 1].$$

Flateintegralet blir dermed

$$\iint_S x^2 y^2 z \, dS = \iint_D u^2 v^2 (16 - u^2 - v^2) \cdot \sqrt{(2u)^2 + (2v)^2 + 1} \, dA$$

Integralet til høyre er nå et vanlig dobbelintegral over området  $D$  i  $uv$ -planet. For å finne det, kan du f.eks. bruke polarkoordinater  $u = r \cos \theta$ ,  $v = r \sin \theta$ . Da har  $U$  beskrivelsen  $r \in [0, 4]$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$ , og  $J = r$ . ■

Når det gjelder *tolkning* av flateintegraler, setter vi opp følgende:

### Definisjon 2 Areal og masse på flater

La  $S$  være en stykkevis glatt flate i  $\mathbf{R}^3$ .

1. Vi definerer *arealet*  $A$  av flaten  $S$  ved  $A = \iint_S 1 \, dS$ .
2. Anta at en tynn hinne med varierende massetetthet  $f(x, y, z)$  (målt i kg pr. arealenhet) har form som  $S$ . Hvis funksjonen  $f$  er kontinuerlig på  $S$ , definerer vi *massen*  $M$  til hinnen (målt i kg) ved

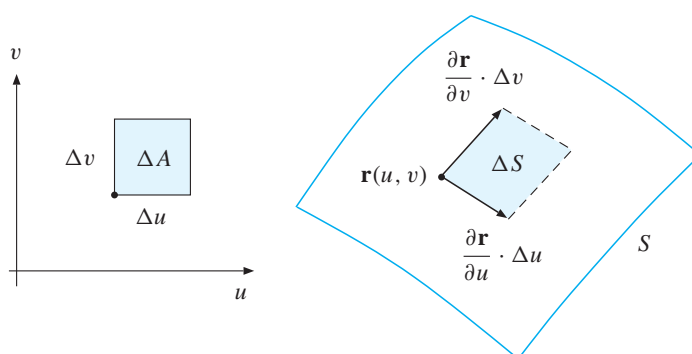
$$M = \iint_S f(x, y, z) \, dS.$$

For å se at dette er rimelige definisjoner, la  $\mathbf{r}(u, v)$  være en stykkevis glatt parametrisering av  $S$ . Vektorene  $\partial\mathbf{r}/\partial u$  og  $\partial\mathbf{r}/\partial v$  angir da hvor fort parameterpunktet  $(x, y, z)$  flytter seg som funksjon av hhv.  $u$  og  $v$ . Siden lengden av vektorproduktet

$$\mathbf{N}(u, v) = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}$$

er *arealet* av parallelogrammet utspent av  $\partial\mathbf{r}/\partial u$  og  $\partial\mathbf{r}/\partial v$ , følger at  $|\mathbf{N}|$  gir et mål for "forstørrelsesfaktoren" for areal som parametriseringen gir i punktet  $(u, v)$ . Hvis du ser på en knøttliten akseboks  $\Delta A$  med et hjørne i  $(u, v)$ , så vil dette (jfr. tilnærmingsegenskapen til den deriverte) tilsvare et område på  $S$  med areal

$$\Delta S \approx \left| \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u} \Delta u \times \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v} \Delta v \right| = \left| \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v} \right| \cdot \Delta u \cdot \Delta v.$$



Tenker vi infinitesimalt, svarer dette til at  $dS = |\mathbf{N}(u, v)| \cdot dA$ . "Summerer" vi alle de små bidragene, får vi at totalt areal blir

$$\iint_S dS = \iint_S 1 dS = \iint_D |\mathbf{N}(u, v)| \cdot dA.$$

Tankegangen for massen er helt tilsvarende, bortsett fra at akseboksen  $\Delta A$  da gir et bidrag

$$\Delta M = (\text{massetetthet}) \cdot (\text{areal}) \approx f(\mathbf{r}(u, v)) \cdot |\mathbf{N}(u, v)| \Delta A,$$

slik at

$$M = \iint_D f(\mathbf{r}(u, v)) \cdot |\mathbf{N}(u, v)| dA.$$

**Eksempel 2** Vi kan utlede formelen  $A = 2\pi ah$  for arealet av en rett, sirkulær sylinderflate med radius  $a$  og høyde  $h$  ved å se på flaten  $S \subseteq \mathbf{R}^3$  gitt ved

$$x^2 + y^2 = a^2, \text{ for } 0 \leq z \leq h.$$

Vi kan parametrisere  $S$  ved

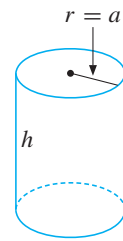
$$\mathbf{r}(\theta, z) = (a \cos \theta, a \sin \theta, z),$$

for  $\theta \in [0, 2\pi)$  og  $z \in [0, h]$ . Utregning gir

$$\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \right| = \left\| \begin{array}{ccc} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ -a \sin \theta & -a \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| = \left| (a \cos \theta, a \sin \theta, 0) \right| = a,$$

så arealet av  $S$  blir

$$A = \iint_S 1 \, dS = \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^h 1 \cdot a \, dz \right] d\theta = 2\pi ah. \quad \blacksquare$$



## 7.5 Oppgaver

I oppgavene 1–5 skal du regne ut flateintegralet  $\int \int_S f(x, y, z) \, dS$ , der  $S \subseteq \mathbf{R}^3$ .

- $S$  er den delen av planet  $x + 2y + z = 4$  som ligger i området der  $x, y, z \geq 0$ , og  $f(x, y, z) = xy$ .
- $S$  er den delen av flaten  $z = 1 + x + y^2$  som ligger over området  $x \in [0, 1]$   $y \in [0, 1]$ .  
La  $f(x, y, z) = y$ .
- $S$  er den delen av paraboloiden  $x = y^2 + z^2$  som ligger i området  $y^2 + z^2 \leq 1$ , og  $f(x, y, z) = x$ .
- $S$  er den delen av planet  $z = 1 + 3x + 4y$  som ligger innenfor (eller på) sylindringen  $x^2 + y^2 = 1$ , og  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ .
- $S$  er mengden av punkter  $(x, y, z)$  slik at  $z = x^4 + y^4$  og  $x^2 + y^2 \leq 1$ . La  $f(x, y, z) = xy^2z^2$ .
- $S$  er mengden av punkter  $(x, y, z)$  slik at  $x \in [0, 1]$ ,  $y \in [0, 2]$  og  $z = 0$ . La  $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ .

I oppgavene 7–12 skal du finne arealet av den oppgitte flaten  $S \subseteq \mathbf{R}^3$ .

- $S$  er den delen av planet  $z = 1 + 2x + 3y$  som ligger i området  $x^2 + y^2 \leq 1$ .
- $S$  er sfæren  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ , der  $r \geq 0$  er et gitt tall.
- $S$  er kjegleflaten

$$z = \sqrt{x^2 + y^2},$$

for  $0 \leq z \leq 1$ .

- $S$  er den delen av den elliptiske sylinderflaten

$$(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$$

som ligger i området  $0 \leq z \leq h$ , der  $a, b, h > 0$  er gitte reelle tall.

- $S$  er mengden av punkter med sylinderkoordinater  $r, \theta, z$  som oppfyller  $z = \theta$ ,  $r \in [0, 1]$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ . (Prøv å skissere  $S$  eller forestille deg hvordan den ser ut. Den er pen, hva?)

## \*7.6 Fubinis teorem og koordinatskifteteoremet

I denne seksjonen skal vi se på to teoremer som blant annet gir en formell begrunnelse for metodene vi brukte til å regne ut dobbel- og trippel-integraler i de to foregående seksjonene.

### Fubinis teorem

Vi har sett at vi kan beregne vanlige dobbelintegraler ved å gjøre to envariabel-integrasjoner etter hverandre. Videre kan vi beregne vanlige trippelintegraler ved å gjøre *tre* slike integrasjoner. Generelt viser det seg at man kan regne ut integraler av funksjoner med  $n$  variable ved å gjøre  $n$  envariabelintegrasjoner etter hverandre. Den formelle begrunnelsen for dette får vi fra følgende teorem.

#### **Teorem 1 Fubinis teorem**

Anta at  $D \subseteq \mathbf{R}^{n+m}$  er begrenset og kan beskrives som mengden av alle  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{R}^{n+m}$  slik at

$$\mathbf{x} \in A \quad \text{og} \quad \mathbf{y} \in D_{\mathbf{x}},$$

der  $A \subseteq \mathbf{R}^n$  og der  $D_{\mathbf{x}} \subseteq \mathbf{R}^m$  tillates å variere med  $\mathbf{x} \in A$ . Anta at  $f : D \rightarrow \mathbf{R}$  er integrerbar på  $D$ . For hver  $\mathbf{x} \in A$ , definer  $f_{\mathbf{x}} : D_{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{R}$  ved  $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ . Da er funksjonen

$$N(\mathbf{x}) = \int_{D_{\mathbf{x}}} f_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}$$

integrerbar på  $A$ , og vi har

$$\int_D f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_A N(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

Merk at det i dette teoremet ikke påstås noe om at funksjonene  $f_{\mathbf{x}}$  er integrerbare på mengdene  $D_{\mathbf{x}}$ . Derimot vet vi at de er begrensede, så *nedreintegralene* av dem eksisterer.

Du finner et bevis for Fubinis teorem i appendixet bakerst i boken. Vi skal her nøye oss med å se på hva det sier i tilfellene behandlet i seksjon 7.2 og 7.3.

**Eksempel 1** La  $n = m = 1$ . Vi kan da skrive  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x, y)$ . Anta at  $A$  er et lukket intervall  $A = [a, b]$ , og at  $D_x = [c(x), d(x)]$  for hver  $x \in [a, b]$ .



Fubini sier nå

$$\iint_D f(x, y) \, dA = \int_a^b \left[ \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) \, dy \right] dx,$$

for funksjonen  $f_x(y)$  som skal integreres over  $[c(x), d(x)]$  er jo akkurat  $f(x, y)$  med  $x$  holdt fast i integrasjonen. Dette gir oss teorem 7.2.1. ■

**Eksempel 2** La  $n = 2$  og  $m = 1$ . Vi kan da skrive  $\mathbf{x} = (x, y)$  og  $\mathbf{y} = z$ . Anta at  $A$  er et område i planet  $\mathbf{R}^2$  beskrevet ved

$$x \in [a, b], \quad y \in [c(x), d(x)]$$

og at vi for hvert punkt  $(x, y) \in A$  har

$$D_{(x,y)} = [r(x, y), s(x, y)]$$

for hvert punkt  $(x, y) \in A$ . Se figur øverst side 245. Fubini sier nå

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dV = \iint_A \left[ \int_{r(x,y)}^{s(x,y)} f(x, y, z) \, dz \right] dA.$$

Uttrykket til høyre her er et dobbelintegral av en funksjon av to variable  $(x, y)$  over området  $A$  i planet. Situasjonen her er med andre ord akkurat den samme som i eksempel 1, og bruk av Fubini *en gang til* gir dermed at integralet blir

$$\int_a^b \left[ \int_{c(x)}^{d(x)} \left[ \int_{r(x,y)}^{s(x,y)} f(x, y, z) \, dz \right] dy \right] dx.$$

Dette er i samsvar med metoden vi brukte for beregning av trippel-integraler i standardkoordinater. Se side 244. ■

Slik Fubini's teorem er formulert, er det de *første*  $n$  koordinatene som holdes fast i beskrivelsen av integrasjonsområdet  $D$ . Teoremet gjelder imidlertid på akkurat samme måte hvis det er et hvilket som helst annet utvalg av  $n$  koordinater av de  $n + m$  koordinatene i  $\mathbf{R}^{n+m}$  som holdes fast. Grunnen er at vi kan tilbakeføre integraler over slike områder til den typen områder Fubini uttaler seg om ved å bytte koordinatrekkefølgen. For eksempel: Et integral over en funksjon  $f(x, y)$  over et område i planet beskrevet ved  $y \in [a, b]$ ,  $x \in [c(y), d(y)]$  vil være lik integralet av funksjonen  $g(x, y) = f(y, x)$  over området beskrevet ved  $x \in [a, b]$ ,  $y \in [c(x), d(x)]$ . Det er bare snakk om navnebytte. Tilsvarende kan trippelintegraler regnes ut ved beskrivelser der en hvilken som helst av koordinatene holdes fast og tas som den siste integrasjonen.

## Koordinatskifteteoremet

Neste teorem begrunner våre metodikker for skifte av koordinatsystem ved integrasjon.

### Teorem 2 Koordinatskifteteoremet

La  $D$  og  $R$  være åpne, begrensede områder i  $\mathbf{R}^n$ , og la  $T$  være en  $C^1$ , injektiv koordinattransformasjon i  $\mathbf{R}^n$  slik at determinanten  $\det T'(\mathbf{u})$  er begrenset og ulik 0 for alle  $\mathbf{u} \in D$ , og  $T(D) = R$ . Hvis  $f; \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  er kontinuerlig og begrenset på  $T(D)$ , gjelder da

$$\int_R f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_D f(T(\mathbf{u})) \cdot |\det T'(\mathbf{u})| \, d\mathbf{u}$$

Du finner et bevis for koordinatskifteteoremet i appendixet bakerst i boken. Vi skal her nøye oss med å se på hva det sier i tilfellene  $n = 1$ ,  $n = 2$  og  $n = 3$ .

For  $n = 2$  og  $n = 3$  er det klart at teoremet uttrykker metodene vi bruker for å beregne henholdsvis dobbel- og trippelintegraler. For  $n = 1$  er  $T$  en vanlig envariabelfunksjon, og determinanten  $\det T'(\mathbf{u})$  til Jacobimatrisen er bare den deriverte  $T'(u)$ . La  $D$  være et intervall  $[a, b]$ . Da sier teoremet at

$$\int_{T([a,b])} f(x) \, dx = \int_a^b f(T(u)) \cdot |T'(u)| \, du$$

Dette er bare vårt gamle teorem MIP 7.4.2 om integrasjon ved substitusjon, i en forkleddt utgave. Forutsetningen  $|T'(u)| \neq 0$  sikrer at  $T$  er enten strengt voksende eller strengt avtakende på hele  $[a, b]$ . Er  $T$  strengt voksende, er  $T(a) < T(b)$ . Venstre integral ovenfor er da

$$\int_{T(a)}^{T(b)} f(x) \, dx,$$

og  $|T'(u)| = T'(u)$ . Dette er som teorem 10.0.0. Absoluttverdien rundt  $T'(u)$  trengs i tilfellet der  $T'(x) < 0$  overalt; da har vi  $T(a) > T(b)$  og grensene kommer i omvendt rekkefølge.

## 7.6 Oppgaver

**1.** La  $D \subseteq \mathbf{R}^3$  være kuben  $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ , og la  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  og  $\mathbf{c}$  være tre vektorer i  $\mathbf{R}^3$ . Definer  $T: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  ved  $T(u, v, w) = u\mathbf{a} + v\mathbf{b} + w\mathbf{c}$ .

- a) Bruk koordinatskifteteoremet med  $f = 1$  til å finne volumet av  $T(D)$ .
- b) Vis punkt (2) i teorem 10.0.0.

**2.** La  $f(\mathbf{x})$  være en kontinuerlig skalarfunksjon definert på en begrenset mengde  $R \subseteq \mathbf{R}^n$ . For hver  $\mathbf{x} \in R$ , la  $f_+(\mathbf{x})$  være det største av tallene  $f(\mathbf{x})$  og 0, og la  $f_-(\mathbf{x})$  være det største av tallene  $-f(\mathbf{x})$  og 0.

- a) Vis at  $f_+$  og  $f_-$  begge er ikke-negative og kontinuerlige på  $R$ , og at  $f(\mathbf{x}) = f_+(\mathbf{x}) - f_-(\mathbf{x})$  for alle  $\mathbf{x} \in R$ .

b) Bevis deretter at

$$\int_R f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_R f_+(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_R f_-(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

c) Anta at koordinatskifteteoremet holder med den ekstra forutsetning at  $f$  er ikke-negativ på  $R$ . Vis at teoremet da holder generelt.

## \*\*7.7 Uavhengighet av parametrisering

I denne seksjonen skal vi vise at definisjonene av kurveintegral og flateintegral er uavhengige av hvilken parametrisering som legges til grunn. Vi starter med kurveintegralet.

### Kurveintegralets uavhengighet av parametrisering

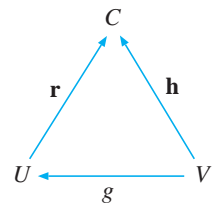
Se på definisjonen av kurveintegral (definisjon 1 i seksjon 7.4). Kurveintegralet over kurven  $C$  er der definert ved hjelp av en parametrisering  $\mathbf{r}$ . La

$$\mathbf{h} : [c, d] \rightarrow \mathbf{R}^n$$

være en annen stykkevis glatt parametrisering av  $C$ . La  $U_{\mathbf{r}} \subseteq [a, b]$  og  $U_{\mathbf{h}} \subseteq [c, d]$  være mengder som nevnt i definisjonen av stykkevis glatt kurve, se side 200. La

$$U = \{t \in (a, b) \mid \mathbf{r}(t) \in \mathbf{h}(U_{\mathbf{h}})\} \quad V = \{s \in (c, d) \mid \mathbf{h}(s) \in \mathbf{r}(U_{\mathbf{r}})\}.$$

Siden  $U$  og  $V$  er lik henholdsvis  $[a, b]$  og  $[c, d]$  minus et endelig antall punkter, gir teorem 7.1.3 (4) at vi kan erstatte integraler over intervallene med integraler over  $U$  og  $V$ . Siden  $\mathbf{r}$  og  $\mathbf{h}$  er injektive på  $U$  og  $V$ , kan vi definere  $g : V \rightarrow U$  ved å la  $g(s)$  være den unike  $t \in U$  slik at  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{h}(s)$ . Se diagrammet til høyre.



Ved oppgave 7.4.16 er  $g \in C^1$ . Siden  $\mathbf{h}(s) = \mathbf{r}(g(s))$  for alle  $s \in V$ , gir kjerne-reglen så  $\mathbf{h}'(s) = \mathbf{r}'(g(s)) \cdot g'(s)$  for alle  $s \in V$ . Men dermed fås

$$\begin{aligned} \int_V f(\mathbf{h}(s)) \cdot |\mathbf{h}'(s)| ds &= \int_V f(\mathbf{r}(g(s))) \cdot |\mathbf{r}'(g(s))| \cdot |g'(s)| ds \\ &= \int_U f(\mathbf{r}(u)) \cdot |\mathbf{r}'(u)| du, \end{aligned}$$

siste overgang ved substitusjonen  $u = g(s)$ , jamfør teorem 7.6.2. (Merk at  $U$  består av et endelig antall disjunkte, åpne intervaller.) ■

### Bemerkning: Unikhet av tangentlinjer

Fra likningen  $\mathbf{h}'(s) = \mathbf{r}'(g(s)) \cdot g'(s)$  som vi fikk utledet i annen linje øverst på siden, ser vi at tangentvektorene  $\mathbf{h}'$  og  $\mathbf{r}'$  definert av to ulike parametriseringer i et gitt punkt på en kurve  $C$  alltid vil være parallelle. Det følger av dette at en glatt kurve  $C$  har nøyaktig to enhetstangentvektorer i hvert punkt, motsatt rettede. Det følger også at  $C$  har en *unik* tangentlinje i hvert punkt. Intuitivt er dette ganske naturlig.

## Flateintegralets uavhengighet av parametrisering

Vi skal nå vise at definisjonen av flateintegral gir mening, dvs. at den ikke avhenger av parametriseringen  $\mathbf{r}$ . Fra beviset vil du også se at definisjonen følger generiskkonvensjonen side .

Se på definisjonen av flateintegral (definisjon 1 i seksjon 7.5). Flateintegralet over flaten  $S$  er der definert ved hjelp av en parametrisering  $\mathbf{r}$ . La  $\mathbf{h} : E \rightarrow \mathbf{R}^3$  være en annen stykkevis glatt parametrisering av  $S$ . La  $U_{\mathbf{r}}$  og  $U_{\mathbf{h}}$  være mengder som nevnt i definisjonen av stykkevis glatt flate, se side 212. La så

$$D_0 = \{\mathbf{x} \in U_{\mathbf{r}} \mid \mathbf{r}(\mathbf{x}) \in \mathbf{h}(U_{\mathbf{h}})\} \quad E_0 = \{\mathbf{x} \in U_{\mathbf{h}} \mid \mathbf{h}(\mathbf{x}) \in \mathbf{r}(U_{\mathbf{r}})\}.$$

Ved stykkevis glatthet av  $\mathbf{h}$  følger nå at mengden  $U_{\mathbf{r}} \setminus D_0$  er inneholdt i et endelig antall kontinuerlige kurver. Ved eksempel 2 i seksjon 7.1 er dermed  $D_0$  en generisk delmengde av  $U_{\mathbf{r}}$ . Siden  $U_{\mathbf{r}}$  er en generisk delmengde av  $D$ , er  $D_0$  en generisk delmengde av  $D$ . Tilsvarende fås at  $E_0$  er en generisk delmengde av  $E$ . Ved teorem 7.1.3 (4) kan vi dermed erstatte integralene over  $D$  og  $E$  med integraler over  $D_0$  og  $E_0$ . Definer  $\mathbf{g} : E_0 \rightarrow D_0$  ved å la  $\mathbf{g}(s, t)$  være det unike punktet  $(u, v) \in D_0$

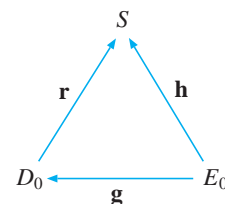
slik at  $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{h}(s, t)$ . Se figuren.

Ved oppgave 7.8.9 er  $\mathbf{g} \in C^1$ . Siden

$$\mathbf{h}(s, t) = \mathbf{r}(\mathbf{g}(s, t)),$$

gir kjerneregelen nå (forkortet notasjon)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial s} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \frac{\partial g_1}{\partial s} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \frac{\partial g_2}{\partial s} \\ \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \frac{\partial g_1}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \frac{\partial g_2}{\partial t} \end{aligned}$$



Multiplikasjon av disse to likningene gir så

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} &= \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) \frac{\partial g_1}{\partial s} \frac{\partial g_2}{\partial t} + \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right) \frac{\partial g_2}{\partial s} \frac{\partial g_1}{\partial t} \\ &= \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) \cdot \det \mathbf{g}'(s, t)\end{aligned}$$

Skrevet ut i full detalj:

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial s}(s, t) \times \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t}(s, t) = \left[ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(\mathbf{g}(s, t)) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(\mathbf{g}(s, t)) \right] \cdot \det \mathbf{g}'(s, t) \quad (1)$$

for alle  $(s, t) \in E_0$ . Dermed fås regnestykket nedenfor. I annen overgang bruker jeg kjerneregelen, og i tredje overgang variabelskifteteoremet:

$$\begin{aligned}\iint_{E_0} f(\mathbf{h}(s, t)) \cdot \left| \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial s}(s, t) \times \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t}(s, t) \right| sdA \\ = \iint_{E_0} f(\mathbf{r}(\mathbf{g}(s, t))) \cdot \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(\mathbf{g}(s, t)) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(\mathbf{g}(s, t)) \right| \cdot |\det \mathbf{g}'(s, t)| sdA \\ = \iint_{D_0} f(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v) \right| sdA. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

### Bemerkning: Unikhet av tangentplan

Fra likningen (1) som vi utledet i beviset ovenfor, ser vi at normal-vektorene definert av to ulike parametriseringer i et glatt punkt på en flate  $S$  alltid vil være parallelle. Det følger av dette at en glatt flate  $S$  har nøyaktig to enhets-normalvektorer i hvert punkt, motsatt rettede. Det følger også at  $S$  har et *unik* tangentplan i hvert punkt.

## Blandede oppgaver til kapittel 7

1. Anta at  $R \subseteq \mathbf{R}^3$  kan beskrives som mengden av alle  $(x, y, z)$  i rommet slik at

$$(x, y) \in D \quad \text{og} \quad z \in [0, f(x, y)],$$

der der  $D$  er en begrenset delmengde av planet, og skalarfunksjonen  $f$  er ikkenegativ og begrenset på  $D$ . I henhold til vår tolkning i seksjon 7.1 og 7.2, er volumet av  $R$  lik dobbelintegralet av  $f$  på  $D$ . Ifølge den generelle volumdefinisjonen 7.3.1, er imidlertid dette volumet gitt ved

$$V = \iiint_R 1 \, dV.$$

Bruk beskrivelsen av  $R$  til å vise at volumet  $V$  utregnet i henhold til denne definisjonen blir

$$V = \iint_D f(x, y) \, dA,$$

slik at dette stemmer med tolkningene fra seksjon 7.1 og 7.2.

**2.** La  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  være kontinuerlig og ikke-negativ. Vis at volumet av det legemet som fremkommer når området under grafen til  $f$  på  $[a, b]$  dreies om  $x$ -aksen er

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

(Hint: Bruk sylinderkoordinater om  $x$ -aksen, dvs. med  $x$ -aksen som "lengdeakse".)

**3.** La  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  være kontinuerlig og ikke-negativ, og la  $0 \leq a < b$ . Vis at volumet av det legemet som fremkommer når området under grafen til  $f$  på  $[a, b]$  dreies om  $y$ -aksen er

$$V = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x) dx.$$

(Hint: Bruk sylinderkoordinater om  $y$ -aksen.)

**4.** La  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  være  $C^1$  og ikke-negativ. Vis at arealet av den flaten som fremkommer når grafen til  $f$  på  $[a, b]$  dreies om  $x$ -aksen er

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

**5.** Bruk formelen fra forrige oppgave til å finne arealet av flaten som fremkommer når grafen til  $f(x) = (1/12)x^3 + x^{-1}$  på  $[1, 2]$  dreies om  $x$ -aksen.

**6.** La  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  være  $C^1$  og ikke-negativ, og la  $0 \leq a < b$ . Vis at arealet av den flaten som fremkommer når grafen til  $f$  på  $[a, b]$  dreies om  $y$ -aksen er

$$A = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

**7.** Bruk formelen fra forrige oppgave til å finne arealet av flaten som fremkommer når grafen til funksjonen  $f(x) = (1/12)x^3 + x^{-1}$  på  $[1, 2]$  dreies om  $y$ -aksen.

**8.** Anta at  $S \subseteq \mathbf{R}^3$  er grafen til en  $C^1$  og begrenset funksjon  $g: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  over et begrenset område  $D \subseteq \mathbf{R}^2$ . Vis at da er flateintegralet  $\int \int_S f(x, y, z) dS$  lik dobbelintegralet

$$\iint_D f(x, y, g(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} dA$$

for alle kontinuerlige funksjoner  $f: S \rightarrow \mathbf{R}$ .

**9.** I denne oppgaven skal vi vise at funksjonen  $\mathbf{g}$  definert i beviset nederst side 10.0.0 er  $C^1$ . La  $(s, t) \in E_0$  være gitt. La  $(u, v) = \mathbf{g}(s, t)$ . Siden

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v) \neq 0,$$

må en av de tre komponentene til dette vektorproduktet være ulik null. Anta at første komponent er ulik null, de andre to tilfellene behandles tilsvarende. Definer  $F: \mathbf{R} \times D_0 \rightarrow \mathbf{R}^3$  ved

$$F(t, u, v) = (r_1(u, v) + t, r_2(u, v), r_3(u, v)).$$

a) Vis at  $\det F'(t, u, v) \neq 0$ .

b) Vis at  $F$  har en  $C^1$  invers  $F^{-1}$  definert på en åpen mengde i  $\mathbf{R}^3$  rundt  $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{h}(s, t)$ .

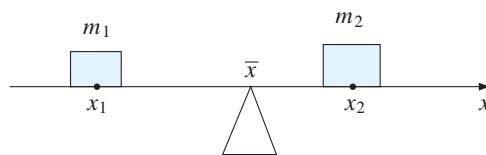
c) Vis at

$$\mathbf{g}(\mathbf{a}) = (F_2^{-1}(\mathbf{h}(\mathbf{a})), F_3^{-1}(\mathbf{h}(\mathbf{a})))$$

for alle  $\mathbf{a} \in E_0$ . Begrunn at  $\mathbf{g}$  er  $C^1$ .

## Tyngdepunkt

La oss forestille oss at vi har to masser  $m_1$  og  $m_2$  plassert i posisjon  $x_1$  og  $x_2$  langs en vektstang. (Vi tenker oss at  $x$ -aksen går langs stangen.) I hvilken posisjon  $\bar{x}$  skal vi plassere stangens støttepunkt for at den skal være i balanse?



Ifølge vektstangprinsippet i fysikk vil stangen være i balanse når

$$m_1(x_1 - \bar{x}) + m_2(x_2 - \bar{x}) = 0.$$

Løser vi dette med hensyn på  $\bar{x}$ , får vi

$$\bar{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^2 m_i x_i,$$

der  $M = \sum_{i=1}^2 m_i$  er total masse av de to objektene. Punktet  $\bar{x}$  kalles tyngdepunktet til massefordelingen. Mer generelt: Hvis vi har  $n$  masser  $m_1, \dots, m_n$  plassert i  $x_1, \dots, x_n$ , så er tyngde-punktet gitt ved

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i,$$

der  $M = \sum_{i=1}^n m_i$  er total masse i fordelingen. Vi har en analogi til denne definisjonen for hver av integraltypene vi har sett på.

### Vanlig integral

Hvis vi tenker oss en tynn stang som strekker seg fra  $x = a$  til  $x = b$  på  $x$ -aksen og som har kontinuerlig varierende massetetthet

$\mu(x)$  (f.eks. fordi stangen har varierende tykkelse), så er stangens tyngdepunkt  $\bar{x}$  definert ved

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \int_a^b \mu(x) \cdot x \, dx,$$

der  $M = \int_a^b \mu(x) \, dx$  er stangens totale masse.

#### Dobbelintegral

Hvis vi tenker oss en tynn plate med varierende massetetthet  $\mu(x, y)$  formet som området  $R$  i  $\mathbf{R}^2$ , så er platens tyngdepunkt  $(\bar{x}, \bar{y})$  definert ved

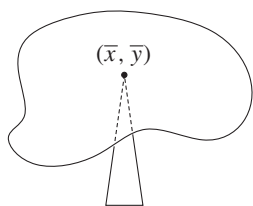
$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iint_R \mu(x, y) \cdot x \, dA$$

$$\bar{y} = \frac{1}{M} \iint_R \mu(x, y) \cdot y \, dA,$$

der

$$M = \iint_R \mu(x, y) \, dA$$

er platens totale masse. Platen vil balansere på en nål plassert i  $(\bar{x}, \bar{y})$ .



#### Trippelintegral

Tenker vi oss et legeme med varierende massetetthet  $\mu(x, y, z)$  formet som et område  $R \subseteq \mathbf{R}^3$ , er legemets tyngdepunkt  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  definert ved

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iiint_R \mu(x, y, z) \cdot x \, dV$$

( $\bar{y}$  og  $\bar{z}$  tilsvarende), der

$$M = \iiint_R \mu(x, y, z) \, dV$$

er legemets totale masse.

#### Kurveintegral

Hvis vi tenker oss en tynn streng med varierende massetetthet  $\mu(x, y, z)$  formet som kurven  $C \subseteq \mathbf{R}^3$ , er strengens tyngdepunkt  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  definert ved

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \int_C \mu(x, y, z) \cdot x \, ds$$

( $\bar{y}$  og  $\bar{z}$  tilsvarende), der  $M = \int_C \mu(x, y, z) \, ds$  er strengens totale masse.

#### Flateintegral

Hvis vi tenker oss en tynn hinne med varierende massetetthet  $\mu(x, y, z)$  formet som flaten  $S \subseteq \mathbf{R}^3$ , så er hinnens tyngdepunkt  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  definert ved

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iint_S \mu(x, y, z) \cdot x \, dS$$

( $\bar{y}$  og  $\bar{z}$  tilsvarende), der  $M = \iint_S \mu(x, y, z) \, dS$  er hinnens totale masse.

#### Beregning av tyngdepunkt i praksis

Ofte kan du se ved *symmetri* hva en eller flere av koordinatene til tyngdepunktet blir. Tenk på det når du løser oppgavene under. I hver av oppgavene skal du gjøre følgende:

- Finne det gitte objektets masse.
- Finne det gitte objektets tyngdepunkt.

**10.** Tynn streng formet som  $x$ -aksen fra  $x = 0$  til  $x = 5$ , med massetetthet  $\mu(x) = x^2 + 1$ .

**11.** Tynn, flat plate i planet formet som området  $0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2$ , med konstant massetetthet  $\mu(x, y) = 1$ .

**12.** Legeme formet som den halvdelen av kulen  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$  som ligger i området  $z \geq 0$ , med konstant massetetthet  $\mu(x, y, z) = 1$ .

**13.** Tynn streng med form som spiralen parametrisert ved  $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$  for  $t \in [0, 2\pi]$ , med massetetthet  $\mu(x, y, z) = z$ .

**14.** Tynt "fingerbøl" formet som flaten  $z = 1 - x^2 - y^2$  for  $z \geq 0$ , med konstant massetetthet  $\mu(x, y, z) = 1$ .

**15.** Legeme med form som området begrenset av paraboloiden  $z = x^2 + y^2$  og planet  $z = 1$ , med konstant massetetthet  $\mu(x, y, z) = 1$ .

**16.** Legeme formet som området gitt ved  $x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ , med konstant massetetthet  $\mu(x, y, z) = 1$ .





# Kapittel 8

## Vektoranalyse

---

*Dette kapitlet bygger på kapitlene 1–3 og 5–7 og samt MIP-kapitlene 1–7, 10 og 12.*

---

## 8.1 Vektorfelder

Et **vektorfelt** i  $\mathbf{R}^n$  er formelt sett bare en funksjon  $\mathbf{F}; \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ . Når vi omtaler en slik funksjon som et vektorfelt og skriver funksjonssymbolet  $\mathbf{F}$  med fet skrift, er det for å markere at vi tenker oss funksjonsverdien

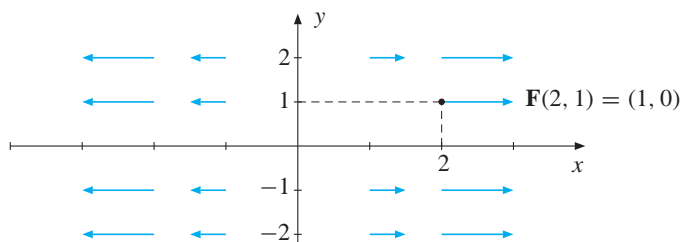
$$\mathbf{F}(x_1, \dots, x_n)$$

som en *pil* plassert med startpunkt  $(x_1, \dots, x_n)$ . For å skape kontrast, skriver jeg i dette kapitlet elementer i  $\mathbf{R}^n$  med små bokstaver ( $p, q$ , etc.) når det passer å tenke på dem som *punkter*. For eksempel  $p = (2, 3, 0)$ .

**Eksempel 1** Betrakt vektorfeltet i planet  $\mathbf{R}^2$  definert for alle  $(x, y)$  ved

$$\mathbf{F}(x, y) = \left[\frac{x}{2}, 0\right].$$

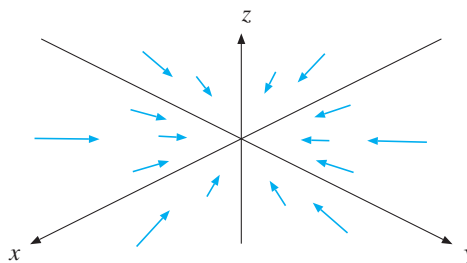
F.eks. er  $\mathbf{F}(2, 1) = [1, 0]$ . Vektorfeltet blir seende ut som antydnet under. Merk at alle pilene blir horisontale, siden annenkomponenten er 0. ■



**Eksempel 2** Betrakt vektorfeltet i rommet  $\mathbf{R}^3$  definert for alle  $(x, y, z)$  ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left[-\frac{x}{3}, -\frac{y}{3}, -\frac{z}{3}\right].$$

Siden  $\left[-\frac{x}{3}, -\frac{y}{3}, -\frac{z}{3}\right] = -\frac{1}{3} \cdot [x, y, z]$ , er pilen i punktet  $p = (x, y, z)$  her rettet *motsatt* av vektorpilen  $\mathbf{P} = [x, y, z]$  fra origo ut til  $p$ . Den har en tredjedel av lengden. Så alle pilene peker mot origo. Se figur. ■



**Definisjon 1 Gradientfeltet til en skalarfunksjon**

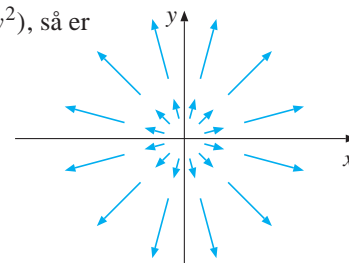
Med *gradientfeltet* til en partielt deriverbar funksjon  $f; \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  menes vektorfeltet  $\nabla f$  definert for  $p \in D_f$  ved at  $\nabla f(p)$  er gradienten til  $f$  i  $p$ .

**Eksempel 3** Hvis  $f(x, y) = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$ , så er

$$\nabla f = \left[ \frac{x}{2}, \frac{y}{2} \right].$$

Vektorfeltet  $\nabla f$  er vist til høyre.

Vektoren  $\nabla f(p)$  peker i den retningen der  $f$  øker raskest ut fra  $p$ , jfr. teorem 12.12. ■

**Definisjon 2 Divergensen til et vektorfelt**

La  $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_n)$  være et vektorfelt i  $\mathbf{R}^n$  med partielt deriverbare komponentfunksjoner  $F_1, \dots, F_n$ . Med *divergensen* til vektorfeltet  $\mathbf{F}$  menes skalarfunksjonen  $\text{div } \mathbf{F}$  definert ved

$$\text{div } \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$$

Divergensen  $\text{div } \mathbf{F}$  skrives også  $\nabla \cdot \mathbf{F}$ . Denne siste skrivemåten kan sees på som en huskeregel: Hvis vi skriver

$$\nabla = \left[ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right]$$

og oppfatter dette som en "vektor", så blir "skalarproduktet" av  $\nabla$  og  $\mathbf{F}$  nettopp divergensen til  $\mathbf{F}$ :

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \left[ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right] \cdot [F_1, \dots, F_n] = \frac{\partial}{\partial x_1} F_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} F_n.$$

"Vektoren"  $\nabla$  kalles " $\nabla$ -operatoren". Symbolet  $\nabla$  uttales "dell".

**Eksempel 4** Hvis  $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 + 2y + z, x^3z + z, x + y^3z)$ , så er

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} &= \frac{\partial}{\partial x} F_1 + \frac{\partial}{\partial y} F_2 + \frac{\partial}{\partial z} F_3 \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + 2y + z) + \frac{\partial}{\partial y} (x^3z + z) + \frac{\partial}{\partial z} (x + y^3z) \\ &= 2x + 0 + y^3 = 2x + y^3. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Definisjon 3    Curlen til et vektorfelt**

La  $\mathbf{F} = (P, Q, R)$  være et vektorfelt i  $\mathbf{R}^3$  med partielt deriverbare komponenter  $P, Q, R$ . Med *curlen* til  $\mathbf{F}$  menes vektorfeltet  $\text{curl } \mathbf{F}$  gitt ved

$$\text{curl } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left[ \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right]$$

Uttrykket lengst til høyre i boksen ovenfor er den offisielle definisjonen av  $\text{curl } \mathbf{F}$ . Det som står i midten er huskereglene man bruker i praksis. Å regne ut  $\text{curl } \mathbf{F}$  blir det samme som å regne ut vektorproduktet  $\nabla \times \mathbf{F}$  av den symbolske vektoren  $\nabla$  og  $\mathbf{F}$ . Derfor skriver vi ofte  $\text{curl } \mathbf{F}$  som  $\nabla \times \mathbf{F}$ .

**Eksempel 5** Hvis  $\mathbf{F}(x, y, z) = [x^2y, xz, y^3z]$ , så er  $\text{curl } \mathbf{F}$  gitt ved

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y & xz & y^3z \end{vmatrix} &= \mathbf{e}_1 \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & y^3z \end{vmatrix} - \mathbf{e}_2 \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y & y^3z \end{vmatrix} + \mathbf{e}_3 \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ x^2y & xz \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{e}_1(3y^2z - x) - \mathbf{e}_2(0 - 0) + \mathbf{e}_3(z - x^2) \\ &= [3y^2z - x, 0, z - x^2]. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Vi skal senere få *tolkninger* av divergensen og curlen til et vektorfelt fra henholdsvis divergensteoremet (8.3.1) og Stokes' teorem (8.4.1).

**Teorem 1    Curlen til en gradient er 0**

Hvis alle de annen ordens partielle deriverte av  $f; \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$  er kontinuerlige, så er  $\text{curl } (\nabla f) = \mathbf{0}$ .

**Bevis** Ved å bruke at miksede partielle deriverte er like, får vi at  $\text{curl } (\nabla f)$  er

$$\begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right] = \mathbf{0}. \quad \blacksquare$$

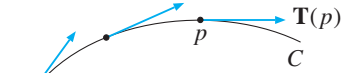
## Arbeid

La  $C$  være en stykkevis glatt kurve i  $\mathbf{R}^n$ , og la  $C_0 \subseteq C$  være mengden av punkter der  $C$  er glatt. Med et **enhetstangentfelt** langs  $C$  menes et  $C^1$  vektorfelt  $\mathbf{T}$  definert på  $C_0$ , slik at følgende holder for alle  $p \in C_0$ :

- $\mathbf{T}(p)$  er en retningsvektor for tangentlinjen til  $C$  i punktet  $p$

- $|\mathbf{T}(p)| = 1$ .

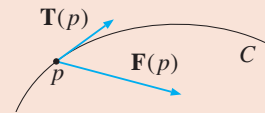
Merk at  $\mathbf{T}$  ikke trenger være definert i "knékkpunkter" på kurven.



### Definisjon 4 Arbeid

La  $C$  være en stykkevis glatt kurve i  $\mathbf{R}^n$ , la  $\mathbf{T}$  være et enhetstangentfelt langs  $C$ , og la  $\mathbf{F}$  være et  $C^1$  vektorfelt definert på  $C$ . Skalarproduktet  $\mathbf{F}(p) \cdot \mathbf{T}(p)$  blir da en funksjon definert i alle punkter  $p$  der  $C$  er glatt. Med *arbeidet* til  $\mathbf{F}$  langs  $C$  i retningen gitt av  $\mathbf{T}$  menes kurveintegralet av denne funksjonen, dvs.

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds.$$



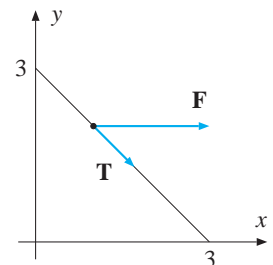
**Eksempel 6** Finn arbeidet til  $\mathbf{F}(x, y) = [2, 0]$  langs den rette linjen  $C$  fra  $(0, 3)$  til  $(3, 0)$  i planet, i retning økende  $x$ .

**Løsning** Figuren til høyre viser kurven  $C$  med enhetstangenten  $\mathbf{T}$  og vektorfeltet  $\mathbf{F}$  tegnet inn. Tangenten  $\mathbf{T}$  peker i retning økende  $x$ , slik den skal. Feltet  $\mathbf{F}$  er konstant langs hele kurven, og i alle punkter langs  $C$  har vi

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{T} = |\mathbf{F}| \cdot |\mathbf{T}| \cdot \cos 45^\circ = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Dette gir

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds &= \int_C \sqrt{2} \, ds = \sqrt{2} \int_C 1 \, ds \\ &= \sqrt{2} \cdot (\text{lengde } C) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3^2 + 3^2} = 6. \quad \blacksquare \end{aligned}$$



Forrige eksempel viser at man noen ganger kan finne arbeidet ved å bruke definisjonen direkte. Vanligvis er det imidlertid enklest å finne en parametrisering av  $C$  og bruke neste teorem:

### **Teorem 2 Beregning av arbeid ved parametrisering**

La  $C$  være en stykkevis glatt kurve i  $\mathbf{R}^n$ , la  $\mathbf{T}$  være et enhetstangentfelt langs  $C$ , og la  $\mathbf{F}$  være et  $C^1$  vektorfelt definert på  $C$ . Hvis  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$  er en stykkevis glatt parametrisering av  $C$  slik at hastighetsvektoren  $\mathbf{r}'(t)$  har samme retning som  $\mathbf{T}(\mathbf{r}(t))$  i alle punkter  $t$  der  $\mathbf{r}$  er glatt, så er

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) \, dt.$$

**Bevis** Per definisjon av kurveintegral har vi

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{r}(t)) \cdot |\mathbf{r}'(t)| \, dt$$

Men siden  $\mathbf{r}'(t)$  har samme retning som  $\mathbf{T}$ , har vi at

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{T}(\mathbf{r}(t)) \cdot |\mathbf{r}'(t)|. \quad \blacksquare$$

**Eksempel 7** Vi skal finne arbeidet til  $\mathbf{F}(x, y, z) = [0, 1, z^2]$  langs kurven  $C$  i rommet gitt ved  $x^2 + z^2 = 1$ ,  $x \geq 0$ ,  $z \geq 0$  i retning økende  $x$ .

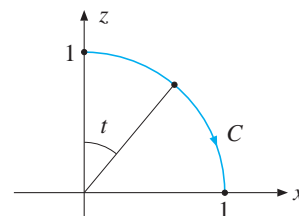
**Løsning** Kurven  $C$  er vist til høyre. Jeg parametriserer den ved å bruke vinkelen  $t$  som parameter. Parametriseringen blir

$$\mathbf{r}(t) = (\sin t, 0, \cos t)$$

for  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ . Parametriseringen går riktig vei i forhold til arbeidet

vi skal finne, siden den beveger seg i retning økende  $x$ . Dermed kan vi bruke teorem 2, og får med  $u = \cos t$  i nest siste overgang

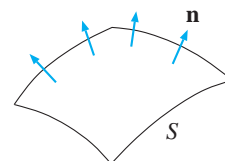
$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds &= \int_0^{\pi/2} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) \, dt \\ &= \int_0^{\pi/2} (0, 1, \cos^2 t) \cdot (\cos t, 0, -\sin t) \, dt \\ &= - \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \sin t \, dt = - \int_0^1 u^2 \, du = -\frac{1}{3}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$



## Fluks

La  $S$  være en stykkevis glatt flate i  $\mathbf{R}^3$ , og la  $S_0 \subseteq S$  være mengden av punkter der  $S$  er glatt. Med et **enhetsnormalfelt** langs  $S$  menes et  $C^1$  vektorfelt  $\mathbf{n}$  definert på  $S_0$ , slik at følgende holder for alle  $p \in S_0$ :

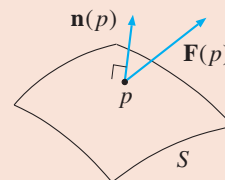
- $\mathbf{n}(p)$  er en normalvektor for tangentplanet til  $S$  i punktet  $p$
- $|\mathbf{n}(p)| = 1$ .



### Definisjon 5 Fluks

La  $S$  være en stykkevis glatt flate i  $\mathbf{R}^3$ , la  $\mathbf{n}$  være et enhetsnormalfelt langs  $S$ , og la  $\mathbf{F}$  være et  $C^1$  vektorfelt definert på  $S$ . Skalarproduktet  $\mathbf{F}(p) \cdot \mathbf{n}(p)$  blir da en funksjon definert i alle punkter  $p$  der  $S$  er glatt. Med **fluksen** til  $\mathbf{F}$  langs  $S$  i retningen definert av  $\mathbf{n}$  menes flateintegralet av denne funksjonen, dvs.

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS.$$



Fluksen gir et mål for i hvilken grad vektorfeltet  $\mathbf{F}$  “stråler gjennom” flaten  $S$ , i retningen  $\mathbf{n}$ .

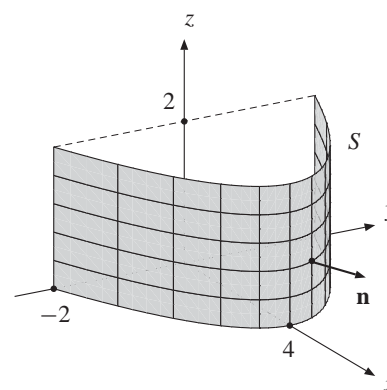
**Eksempel 8** Vi skal beregne fluksen av  $\mathbf{F}(x, y, z) = [0, 0, x^2y]$  gjennom flaten  $S$  gitt ved  $x = 4 - y^2$ ,  $-2 \leq y \leq 2$ ,  $0 \leq z \leq 2$  i positiv  $x$ -retning.

**Løsning** Flaten  $S$  er vist til høyre. Vi ser at enhetsnormalen  $\mathbf{n}$  til  $S$  er horisontal overalt på  $S$ . Siden det kun er  $z$ -komponenten til  $\mathbf{F}$  som ikke er 0, følger fra dette at

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = 0$$

på hele  $S$ . Ergo er

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0. \quad \blacksquare$$



Men vanligvis er det enklest å finne fluksen ved hjelp av følgende teorem.

### **Teorem 3 Beregning av fluks ved parametrisering**

La  $S$  være en stykkevis glatt flate i  $\mathbf{R}^3$ , la  $\mathbf{n}$  være et enhetstangentfelt langs  $S$ , og la  $\mathbf{F}$  være et  $C^1$  vektorfelt definert på  $S$ . Hvis  $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbf{R}^3$  er en stykkevis glatt parametrisering av  $S$  slik at  $\mathbf{N}(u, v) = \partial\mathbf{r}/\partial u \times \partial\mathbf{r}/\partial v$  har samme retning som  $\mathbf{n}(\mathbf{r}(u, v))$  i alle punkter  $(u, v)$  der  $\mathbf{r}$  er glatt, så er

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \mathbf{N}(u, v) \, dA.$$

**Bevis** Per definisjon av flateintegral har vi

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot |\mathbf{N}(u, v)| \, dA$$

Men siden  $\mathbf{N}$  har samme retning som  $\mathbf{n}$ , har vi at

$$\mathbf{N}(u, v) = \mathbf{n}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot |\mathbf{N}(u, v)|. \quad \blacksquare$$

**Eksempel 9** Vi skal finne fluksen av  $\mathbf{F}(x, y, z) = [x, 0, 0]$  gjennom flaten  $S$  fra forrige eksempel, når  $\mathbf{n}$  peker i positiv  $x$ -retning.

**Løsning** Her er det ikke så lett å se svaret direkte, så jeg lager en parametrisering. Jeg bruker  $u = y$  og  $v = z$  som parametre, og får parametriseringen

$$\mathbf{r}(u, v) = (4 - u^2, u, v)$$

for  $u \in [-2, 2]$  og  $v \in [0, 2]$ . Normalvektoren til parametriseringen blir

$$\mathbf{N} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ -2u & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = [1, 2u, 0].$$

Denne vektoren peker samme vei som  $\mathbf{n}$ , så teorem 14.3 gir

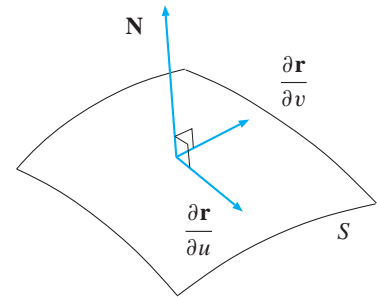
$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS &= \int_0^2 \left[ \int_{-2}^2 \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \mathbf{N}(u, v) \, dy \right] dz \\ &= \int_0^2 \left[ \int_{-2}^2 [4 - u^2, 0, 0] \cdot [1, 2u, 0] \, du \right] dv \\ &= \int_0^2 \left[ \int_{-2}^2 (4 - u^2) \, du \right] dv \stackrel{\text{regn}}{=} \frac{64}{3}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$



Når du parametriserer en flate, blir retningen til normalen

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$$

gitt ved høyrehåndsregelen. Se figur til høyre. I praksis kan du sjekke retningen til  $\mathbf{N}$  ved å se på fortegnet til komponentene. Hvis f.eks.  $\mathbf{N}$  skal "peke oppover", må 3. komponent av  $\mathbf{N}$  være positiv. Se figuren.



## 8.1 Oppgaver

**1.** Illustrer følgende vektorfelter i planet ved å tegne noen typiske piler.

- a)  $\mathbf{F}(x, y) = [0, -x]$       b)  $\mathbf{F}(x, y) = [y, -x]$   
 c)  $\mathbf{F}(x, y) = \left[\frac{x}{r}, \frac{y}{r}\right]$ , der  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

**2.** Illustrer følgende vektorfelter i rommet ved å tegne noen typiske piler.

- a)  $\mathbf{F}(x, y, z) = [x, 0, 0]$       b)  $\mathbf{F}(x, y, z) = [0, 1, y]$

**3.** Finn gradientfeltet  $\nabla f$  til disse funksjonene:

- a)  $f; \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  ved  $f(x, y) = x^2y + 5x$   
 b)  $f; \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$  ved  $f(x, y, z) = -x + 2y + 3z$

**4.** Finn divergensen til vektorfeltet i planet definert ved  $\mathbf{F}(x, y) = [x^2y, 5y]$ .

**5.** Beregn curl og divergens for følgende vektorfelter i rommet. Regn spesielt ut curl  $\mathbf{F}$  og div  $\mathbf{F}$  i punktet  $(1, 2, -1)$ .

- a)  $\mathbf{F}(x, y, z) = [x^3y, y + z^2, xyz]$   
 b)  $\mathbf{F}(x, y, z) = [\cos x, \sin y, \sin x]$

I oppg. 6–10 skal du finne arbeidet  $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$  av  $\mathbf{F}$  langs  $C$  i retningen til enhetstangentfeltet  $\mathbf{T}$ .

**6.**  $\mathbf{F}(x, y, z) = [zx, yx, x]$ ,  $C$  er kurven parametrisert ved  $x = t^2$ ,  $y = 2t$ ,  $z = t^3$  for  $t \in [0, 1]$ , og  $\mathbf{T}$  går i retning økende  $y$ .

**7.**  $\mathbf{F}(x, y) = [-y, x]$ ,  $C$  er den delen av enhets-sirkelen  $x^2 + y^2 = 1$  der  $y \geq 0$ , og  $\mathbf{T}$  går mot klokken langs sirkelbuen.

**8.**  $\mathbf{F}(x, y) = [x, y^2]$ ,  $C$  er mengden av punkter  $(x, y)$  slik at  $y = x^2$  og  $x \in [0, 1]$ , og  $\mathbf{T}$  går i retning av økende  $x$ .

**9.**  $\mathbf{F}(x, y, z) = [-y, x, z]$ ,  $C$  er spiralkurven fra eksemplet s. 418 for  $t \in [0, 2\pi]$ , og  $\mathbf{T}$  er rettet samme vei som parametriseringen går.

**10.**  $\mathbf{F}(x, y, z) = [xyz, z, y]$ ,  $C$  er den delen av snittet mellom paraboloiden  $z = 4 - x^2 - y^2$  og  $yz$ -planet der  $z \geq 0$ , og  $\mathbf{T}$  går i retning økende  $y$ .

I oppg. 11–14 skal du finne fluksen  $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$  i retningen til enhetsnormalfeltet  $\mathbf{n}$ .

**11.**  $S$  er flaten  $z = 4 - x^2 - y^2$  for  $z \geq 0$ ,  $\mathbf{n}$  er oppadrettet (dvs. har positiv  $z$ -komponent), og  $\mathbf{F} = [x^2y, z, 1]$ .

**12.**  $S$  er flaten  $x^2 + y^2 = 4$  for  $0 \leq z \leq 1$ ,  $\mathbf{n}$  er utadrettet, og  $\mathbf{F} = [xy, x^2y, e^{xyz}]$ .

**13.**  $S$  er den delen av planet  $z = 5 + x - 2y$  som oppfyller  $x^2 + y^2 \leq 1$ ,  $\mathbf{n}$  er oppadrettet, og  $\mathbf{F} = [y, y, x^2]$ .

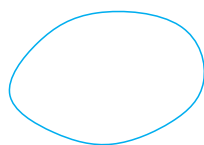
**14.**  $S$  er randen til området

$$\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1 \text{ og } z \in [0, 1]\},$$

dvs.  $S$  er en sylinderflate med "topp", "bunn" og en krum sideflate. La  $\mathbf{n}$  peke ut fra sylindere langs alle de tre ulike delene til flaten  $S$ , og la  $\mathbf{F} = [x, y, x^2y^2]$ .

## 8.2 Greens teorem

Hvis  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$  er en kontinuerlig kurveparametrisering slik at  $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$ , så kalles verdimengden  $C$  til  $\mathbf{r}$  for en *lukket* kurve i  $\mathbf{R}^n$ . (Merk at dette er noe annet enn at  $C$  er lukket *som mengde*, jfr. side 173.) Hvis i tillegg  $\mathbf{r}$  er injektiv på  $\langle a, b \rangle$ , kalles  $C$  en *enkel, lukket kurve*.



Enkel og  
lukket



Lukket, men  
ikke enkel

Hvis  $C$  er en lukket kurve, er det vanlig å skrive kurveintegraler over  $C$  med en liten sirkel på integrasjonstegnet: Vi skriver

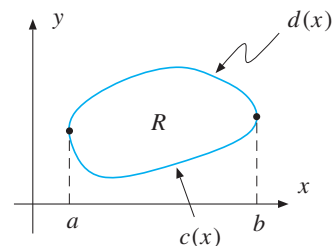
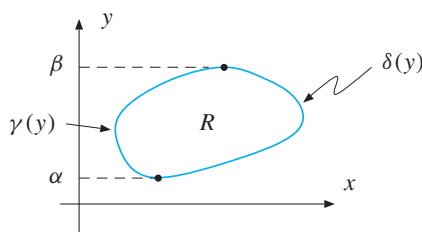
$$\oint_C \quad \text{i stedet for} \quad \int_C$$

Dette er rett og slett for å minne oss selv om at kurven er lukket.

Vi skal kalle en region  $R \subseteq \mathbf{R}^2$  *standard* hvis den kan beskrives både på formen

$$\begin{cases} x \in [a, b] \\ y \in [c(x), d(x)] \end{cases} \quad \text{og på formen} \quad \begin{cases} y \in [\alpha, \beta] \\ x \in [\gamma(y), \delta(y)] \end{cases}$$

i standardkoordinatene  $x$  og  $y$ , der grafene til  $c(x)$ ,  $d(x)$ ,  $\gamma(y)$  og  $\delta(y)$  er stykkevis glatte kurver i planet. Et eksempel på en slik region  $R$  er vist under. Randen til  $R$  blir en enkel, lukket og stykkevis glatt kurve  $C$  i planet.

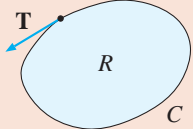


Vi sier at et enhetstangentfelt  $\mathbf{T} = [T_1, T_2]$  langs randkurven til standardregionen  $R$  er *orientert mot klokken* hvis  $T_1(x, c(x)) \geq 0$  og  $T_1(x, d(x)) \leq 0$  for alle  $x \in [a, b]$ . Med andre ord:  $\mathbf{T}$  skal peke mot høyre på nedre del av randen til  $R$ , og mot venstre på øvre del. Kikk på figuren til høyre ovenfor, og overbevis deg om at retningen til  $\mathbf{T}$  med disse betingelsene virkelig blir mot klokken rundt hele kurven. At feltet  $\mathbf{T}$  er orientert *med* klokken, betyr at  $-\mathbf{T}$  er orientert mot klokken.

Vi kan nå presentere denne seksjonens hovedresultat. Det viser at arbeidet til et vektorfelt langs randen til en standardregion  $R$  kan regnes ut som et spesielt dobbeltintegral over  $R$ .

### Teorem 1 Greens teorem

La  $R$  være en standard region i planet med randkurve  $C$ , og la  $\mathbf{T}$  være et enhetstangentfelt langs  $C$  orientert i omløpsretning mot klokken. La  $\mathbf{F} = (P(x, y), Q(x, y))$  være et  $C^1$  vektorfelt definert på  $R$ . Da er

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds = \iint_R \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA.$$


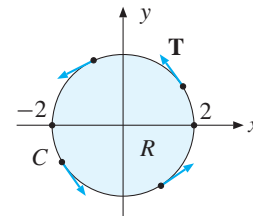
**Bevis** Utsettes til seksjon 8.3. ■

**Eksempel 1** La  $\mathbf{F}(x, y) = [\sqrt{1+x^4} + 4y, 2x - e^{y^2}]$ . Regn ut

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds,$$

der  $C$  er sirkelen  $x^2 + y^2 = 4$ , og enhetstangentfeltet  $\mathbf{T}$  går mot klokken.

**Løsning** La  $R$  være den lukkede sirkelskiven avgrenset av  $C$ , se figuren under.



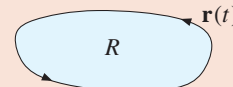
Med  $\mathbf{F} = (P, Q)$  gir Greens teorem

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds &= \iint_R \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \\ &= \iint_R (2 - 4) dA = -2 \iint_R 1 dA \\ &= -2 \cdot (\text{areal } R) = -2 \cdot (\pi \cdot 2^2) = \underline{\underline{-8\pi}}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Teorem 2 Korollar av Greens teorem**

La  $R$  være en standard region i planet, la  $C$  være randkurven til  $R$ , og la  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$  være en stykkevis glatt parametrisering av  $C$  i retning mot klokken, for  $t \in [a, b]$ . Da er arealet av  $R$  gitt ved

$$A = \int_a^b x(t)y'(t) dt = - \int_a^b x'(t)y(t) dt.$$



**Bevis** La  $\mathbf{F} = [0, x]$ . Da blir  $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = [0, x(t)]$ , så ved bruk av Greens teorem i første overgang og teorem 14.2 i annen får vi

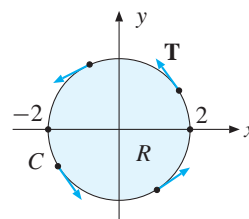
$$\begin{aligned} \iint_R (1 - 0) dA &= \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds \\ &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_a^b x(t)y'(t) dt. \end{aligned}$$

Men uttrykket lengst til venstre er jo arealet av  $R$ . Det andre uttrykket for  $A$  utledes på samme måte, men med  $\mathbf{F} = [-y, 0]$  isteden. ■

**Eksempel 2** Finn arealet innenfor ellipsen

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1.$$

**Løsning** Først tegner vi ellipsen, se figuren under.



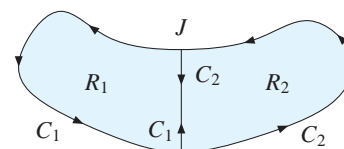
Vi parametriserer ellipsen ved  $x = a \cos t$ ,  $y = b \sin t$ , for  $t \in [0, 2\pi]$ . Greens korollar gir da

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} x(t)y'(t) dt = \int_0^{2\pi} (a \cos t)(b \cos t) dt \\ &= ab \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \underline{\underline{\pi ab}}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

## Utvidelse av Greens teorem til mer generelle områder

Hvis  $\mathbf{T}$  skifter fortegn, vil også skalarproduktet  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$  gjøre det. Ved hjelp av dette poenget kan Greens teorem utvides til å gjelde for mer generelle regioner  $R$ . La f.eks.  $R$  være det skraverte området på figuren nedenfor. Dette er ikke standard.

Men ved et kryss-kutt har jeg delt den inn i to regioner  $R_1$  og  $R_2$  som begge er standard, og som overlapper hverandre langs delelinjen  $J$ . La et vektorfelt  $\mathbf{F} = [P, Q]$  være gitt. Ved Greens teorem brukt på  $R_1$  og  $R_2$  separat, fås



$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds + \int_J \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}_1 \, ds = \iint_{R_1} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dA$$

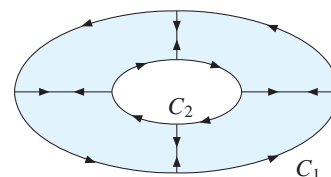
$$\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds + \int_J \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}_2 \, ds = \iint_{R_2} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dA,$$

der retningene til enhetstangentene  $\mathbf{T}_1$  og  $\mathbf{T}_2$  langs  $J$  følger henholdsvis  $C_1$  og  $C_2$ . Merk at de er motsatt rettede. La  $C = C_1 \cup C_2$  betegne hele randkurven til  $R$ . Ved å addere de to likningene over får vi nå, siden de to integralene over  $J$  kansellerer hverandre,

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds = \iint_R \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dA.$$

Altså holder Greens teorem for regionen  $R$  også. Dette oppdelingsprinsippet kan også brukes til å behandle regioner  $R$  med "hull", som vist på figuren under. Her fås

$$\begin{aligned} \oint_{C_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds + \oint_{C_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds \\ = \iint_R \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dA. \end{aligned}$$



Men merk at tangentfeltet  $\mathbf{T}$  langs den indre kurven  $C_2$  nå går med klokken! Vi kan sette opp følgende generelle leveregel:

Greens teorem holder for alle regioner  $R$  i planet som kan deles opp i standardregioner, se ovenfor. Hvis randen til  $R$  består av mer enn én kurve, er det *summen* av integralene langs disse som skal inngå i teoremet. Retningen til tangentfeltet  $\mathbf{T}$  langs hver randkurve skal være slik at  $R$  ligger til venstre når du går rundt kurven i retning  $\mathbf{T}$ .

For de regionene  $R$  man støter på i praksis vil det så godt som alltid være opplagt at en oppdeling i standard-områder er mulig. Når du løser oppgaver trenger du da ikke vise eksplisitt at det fins en slik oppdeling, du kan bare sette opp Greens teorem for hele regionen  $R$  direkte. Slik som i de to nederste likningene forrige side.

## 8.2 Oppgaver

I oppgavene 1–5 skal du bruke Greens teorem til å regne ut  $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$ , der enhetstangentfeltet  $\mathbf{T}$  går rundt den lukkede kurven  $C$  i retning mot klokken.

- $\mathbf{F} = (2xy, x^2)$ ,  $C$  er ellipsen  $(x/2)^2 + y^2 = 1$ .
- $\mathbf{F} = (x^2 + 2y, x + y^2)$ , der  $C$  er randen til rektanglet  $[-1, 1] \times [-2, 3]$ .
- $\mathbf{F} = (x + e^{x^2}, x^3)$ ,  $C$  er sirkelen  $x^2 + y^2 = 1$ .
- $\mathbf{F} = (x, x^2y)$ ,  $C$  er der trekantende kurven med hjørner i  $(0, 2)$ ,  $(2, 0)$  og  $(-2, 0)$ .
- $\mathbf{F} = (x + y, xy)$ ,  $C$  er randen til området gitt ved  $x^2 \leq y \leq 4$ .
- La  $\mathbf{F} = (P, Q)$ , der  $P(x, y) = -y$  og  $Q(x, y) = x$ . La  $C$  være enhetssirkelen  $x^2 + y^2 = 1$ , og la  $R$  være den lukkede, sirkelformede skiven begrenset av  $C$ . Verifiser at Greens teorem holder i denne situasjonen ved å regne ut  $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$  (mot klokken) og  $\int \int_R (\partial Q / \partial x - \partial P / \partial y) dA$  hver for seg.
- La  $R$  være området gitt ved  $1 - x^2 \leq y \leq 2 - 2x^2$ , la  $C$  være randen til  $R$ , og la

$$\mathbf{F} = (3xy\sqrt{x^2 + 1}, (x^2 + 1)^{3/2} + y).$$

Vi ønsker å regne ut  $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$ , der enhetstangentfeltet  $\mathbf{T}$  går mot klokken rundt  $C$ .

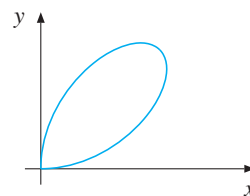
- Skisser området  $R$ , og forklar hvorfor Greens teorem kan brukes i denne situasjonen.
  - Beregn integralet ved Greens teorem.
- Kurven  $C$  i planet parametrisert ved  $\mathbf{r}(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$  for  $t \in [0, 2\pi)$  kalles en *asteroide*.
    - Skisser  $C$ .
    - Bruk Greens korollar 10.0.0 til å finne arealet av regionen begrenset av  $C$ .
  - Bruk Greens korollar til å finne arealet avgrenset av en sirkel i planet med radius  $R$ .

- Bruk Greens korollar til å vise at arealet begrenset av ellipsen

$$(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$$

i planet er  $\pi ab$ , der  $a, b > 0$  er gitte tall. Hint: Parametriser ellipsen ved  $x = a \cos \theta$ ,  $y = b \sin \theta$ .

- Figuren under viser løkken på en kurve i  $\mathbf{R}^2$  som kalles *Descartes' blad*. Løkken har likning  $x^3 + y^3 = 3xy$ , for  $xy \geq 0$ .



- Diagonalen  $y = x$  deler området begrenset av løkken i to biter. Begrunn at de to bitene har samme areal.
- Vis, ved å sette  $y = tx$ , at *halve løkken* kan parametriseres ved

$$\mathbf{r}(t) = \left( \frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3} \right) \quad \text{for } t \in [0, 1].$$

- Finn arealet av løkken. (Hint: Lag en lukket kurve ved å først gå nedre halvdel av løkken, og så tilbake til origo langs diagonalen.)

- La  $C \subseteq \mathbf{R}^2$  være den enkle, lukkede kurven som er unionen  $C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$ , der

$$C_1 \text{ er sirkelbuen } x^2 + y^2 = 4, \text{ for } y \geq 0$$

$$C_2 \text{ er sirkelbuen } x^2 + y^2 = 1, \text{ for } y \geq 0$$

$$C_3 \text{ er } x\text{-aksen fra } x = -2 \text{ til } x = -1$$

$$C_4 \text{ er } x\text{-aksen fra } x = 1 \text{ til } x = 2.$$

La  $\mathbf{T}$  være enhetstangentfeltet som er definert i alle punkter der  $C$  er glatt, og som er rettet mot klokken. La  $\mathbf{F} = [x^3, (x^2 + y^2)^{1/2}]$ . Finn arbeidet  $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$ .

## 8.3 Divergensteoremet

Vi skal kalle en region  $T \subseteq \mathbf{R}^3$  for *standard* hvis den kan beskrives på alle de tre formene

$$\begin{cases} (x, y) \in R \\ z \in [r(x, y), s(x, y)] \end{cases} \quad \begin{cases} (x, z) \in R \\ y \in [r(x, z), s(x, z)] \end{cases} \quad \begin{cases} (y, z) \in R \\ x \in [r(y, z), s(y, z)] \end{cases}$$

der  $R \subseteq \mathbf{R}^2$  er kompakt og grafene til  $r$  og  $s$  er stykkevis glatte flater. (Men  $r$  og  $s$  trenger ikke være de samme i alle beskrivelsene!) En slik region  $T$  er vist til høyre. Andre

typiske eksempler: Kuler og kasser.

Randen til en standard region  $T$  er

en stykkevis glatt flate  $S$  i rommet.

Vi kaller denne flaten *lukket*, siden den "lukker inne" det indre av  $T$ . Et

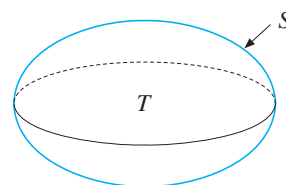
enhetsnormalfelt  $\mathbf{n}$  langs randflaten  $S$

kalles *utadrettet* hvis det peker ut

i komplementet til  $T$ , og *innadrettet* hvis det peker motsatt. Dette er det samme

som å si at  $\mathbf{n}$  er utadrettet hvis  $z$ -komponenten til  $\mathbf{n}$  er negativ på grafen til  $r(x, y)$  og positiv på grafen til  $s(x, y)$ . At  $\mathbf{n}$  er innadrettet, betyr at  $-\mathbf{n}$  er utadrettet.

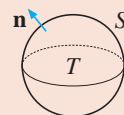
Vårt neste teorem sier at trippelintegralet av divergensen til et vektorfelt over en standardregion  $T$  er lik fluksen av feltet ut gjennom randflaten til  $T$ . Dette gir en tolkning av divergensen til vektorfeltet: Den måler hvordan vektorfeltet "stråler ut fra" ulike punkter.



### Teorem 1 Divergensteoremet

La  $T$  være en standard region i  $\mathbf{R}^3$ , la  $S$  være randflaten til  $T$ , la  $\mathbf{n}$  være et utadrettet enhetsnormalfelt på  $S$ , og la  $\mathbf{F}$  være et  $C^1$  vektorfelt definert på  $T$ . Da er

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_T \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV.$$



**Bevis** Vi bruker først at  $T$  kan beskrives ved  $(x, y) \in R, z \in [r(x, y), s(x, y)]$ . En region  $T$  med denne egenskapen er vist på figuren øverst neste side. La  $[F_1, F_2, F_3]$  være vektorfeltet  $\mathbf{F}$  skrevet på komponentform. Vi har

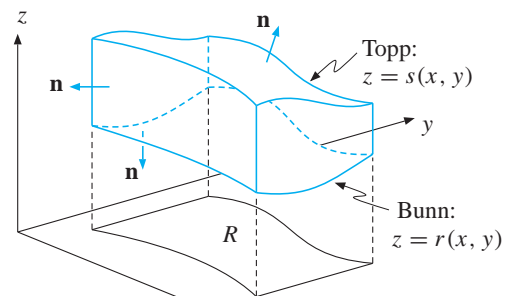
$$\begin{aligned} \iiint_T \frac{\partial F_3}{\partial z} \, dV &= \iint_R \left[ \int_{r(x,y)}^{s(x,y)} \frac{\partial F_3}{\partial z} \, dz \right] dA \\ &= \iint_R [F_3(x, y, s(x, y)) - F_3(x, y, r(x, y))] dA. \end{aligned}$$

Videre kan vi skrive

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_S (F_1 \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n} + F_2 \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n} + F_3 \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{n}) \, dS.$$

Kun siste ledd har med  $F_3$  å gjøre. Vi splitter dette opp i tre integraler; et for toppen, et for bunnen og et for sideflatene til  $T$ :

$$\begin{aligned} & \iint_S (F_3 \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{n} \, dS \\ &= \iint_{\text{topp}} (F_3 \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{n} \, dS \\ &+ \iint_{\text{bunn}} (F_3 \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{n} \, dS \\ &+ \iint_{\text{side}} (F_3 \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{n} \, dS. \end{aligned}$$



Den første av integralene er 0, siden  $\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{n} = 0$  langs alle sideflatene. Toppflaten kan parametriseres ved  $z = s(x, y)$  for  $(x, y) \in R$ . Normalvektoren til parametriseringen blir  $\mathbf{N} = (-\partial s / \partial x, -\partial s / \partial y, 1)$ , så

$$\iint_{\text{topp}} (F_3 \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_R (F_3 \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{N} \, dA = \iint_R F_3(x, y, s(x, y)) \, dA$$

ved bruk av teorem 8.1.3. Ved å parametrisere bunnen ved  $z = r(x, y)$  for  $(x, y) \in R$ , fås tilsvarende

$$\iint_{\text{bunn}} (F_3 \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{n} \, dS = - \iint_R F_3(x, y, r(x, y)) \, dA,$$

der minustegnet skyldes at normalen  $\mathbf{N}$  definert av parametriseringen i dette tilfellet peker *motsatt* av den utadrettede enhetsnormalen  $\mathbf{n}$ . Alt i alt har vi nå

$$\iiint_T \frac{\partial F_3}{\partial z} \, dV = \iint_S (F_3 \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{n} \, dS.$$

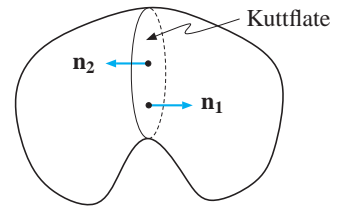
Ved å bruke de to andre beskrivelsesmåtene for  $T$ , får vi tilsvarende

$$\iiint_T \frac{\partial F_1}{\partial x} \, dV = \iint_S (F_1 \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{n} \, dS \quad \iiint_T \frac{\partial F_2}{\partial y} \, dV = \iint_S (F_2 \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{n} \, dS$$

Adderer vi disse tre likningene, får vi likningen i teoremet. ■



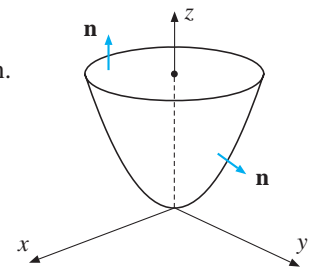
Ved metoder tilsvarende de vi brukte for Greens teorem, kan divergensteoremet utvides til å gjelde ikke bare for standard-regioner, men for alle regioner  $R$  av interesse oss. Vi begrunner utvidelsen ved å dele  $R$  opp ved kuttflater. Siden fluksintegraler skifter fortegn når normalfeltet  $\mathbf{n}$  skifter retning, vil integralene over kuttflatene kansellere hverandre.



**Eksempel 1** La  $\mathbf{F} = (xy^2, x^2y, -(x^2 + y^2)z)$ , og la  $S$  være randen til regionen  $T$  gitt ved  $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$ . La  $\mathbf{n}$  være den utadrettede normalen til  $S$ .

Finn fluksen  $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$ .

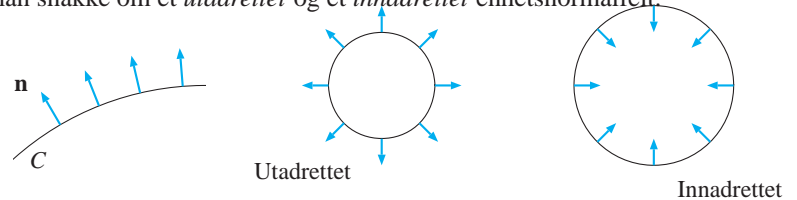
**Løsning** Regionen  $T$  er vist på figuren. Merk at  $S$  er en lukket flate. Vi kunne ha regnet ut fluksen ved å parametrisere toppflaten og den krumme bunnflaten hver for seg, og delt opp integralet. Men utregning gir at  $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ , så ifølge divergensteoremet er



$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_T \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV = \iiint_T 0 \, dV = 0. \quad \blacksquare$$

### To-dimensjonal versjon av divergensteoremet

Med et *enhetsnormalfelt* langs en stykkevis glatt kurve  $C \subseteq \mathbf{R}^2$  menes et  $C^1$  vektorfelt  $\mathbf{n}$  i planet som er definert i alle punkter der  $C$  er glatt, som står normalt på tangentlinjen til  $C$  i disse punktene, og som er slik at  $|\mathbf{n}| = 1$  overalt. Hvis  $C$  er en enkel, lukket kurve som er randen til en standard region i planet, kan man snakke om et *utadrettet* og et *innadrettet* enhetsnormalfelt.

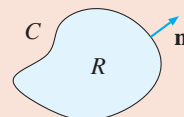


Ved hjelp av disse begrepene kan vi formulere analogien til divergensteoremet for vektorfelter i planet:

### **Teorem 2 Divergensteoremet i planet**

La  $R$  være en standard region i planet, la  $C$  være randkurven til  $R$ , la  $\mathbf{n}$  være et utadrettet enhetsnormalfelt langs  $C$ , og la  $\mathbf{F}$  være et  $C^1$  vektorfelt definert på  $R$ . Da er

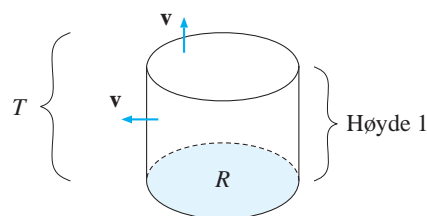
$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = \iint_R \operatorname{div} \mathbf{F} \, dA.$$



**Bevis** Skriv  $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$ . Definer så vektorfeltet  $\mathbf{G}$  i rommet ved å sette

$$\mathbf{G}(x, y, z) = (F_1, F_2, 0).$$

La  $T \subseteq \mathbf{R}^3$  være regionen gitt ved betingelsene  $(x, y) \in R, z \in [0, 1]$ . Da er  $T$  standard. La  $S$  være randflaten til  $T$ , og la  $\mathbf{v}$  være et utoverpekende enhetsnormalfelt til  $T$ . Figur:



Da er

$$\begin{aligned} \iiint_T \operatorname{div} \mathbf{G} \, dV &= \iint_R \left[ \int_0^1 \left( \frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial G_2}{\partial y} + \frac{\partial G_3}{\partial z} \right) dz \right] dA \\ &= \iint_R \left[ \int_0^1 \left( \frac{\partial F_1}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(x, y) \right) dz \right] dA = \iint_R \operatorname{div} \mathbf{F} \, dA, \end{aligned}$$

siste overgang fordi integranden ikke avhenger av  $z$ . Siden skalarproduktet  $\mathbf{G} \cdot \mathbf{v}$  i et punkt  $(x, y, z)$  på den vertikale delen av  $S$  er lik  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$  i punktet  $(x, y)$ , blir fluksen av  $\mathbf{G}$  ut av de vertikale sidene til  $T$  lik

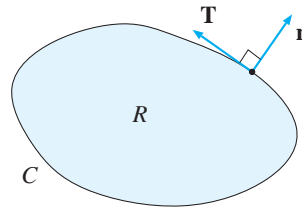
$$\int_C \left[ \int_0^1 (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})(x, y) \, dz \right] ds = \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds.$$

Men fluksen av  $\mathbf{G}$  er 0 ut fra toppen og bunnen til  $T$ , så dette er faktisk den totale fluksen av  $\mathbf{G}$  ut av  $T$ . Ved det tredimensjonale divergens-teoremet er denne fluksen slik  $\int \int \int_T \operatorname{div} \mathbf{G} \, dV$ , og resultatet følger. ■

## Bevis for Greens teorem

Jeg avslutter denne seksjonen med å bevise Greens teorem (8.2.1). Dette teoremet er bare en omformulering av divergensteoremet i planet.

La  $R$ ,  $C$ ,  $\mathbf{T} = [T_1, T_2]$  og  $\mathbf{F} = [P, Q]$  være som i Greens teorem. Siden feltet  $\mathbf{T}$  går mot klokken, vil da  $\mathbf{n} = [T_2, -T_1]$  være et utoverpekende enhetsnormalfelt langs  $C$ . Se figuren under, samt s. 10.0.0.



Definer vektorfeltet  $\mathbf{G}$  ved  $\mathbf{G}(x, y) = (Q, -P)$ . Da er  $\mathbf{G} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$ , og

$$\operatorname{div} \mathbf{G} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Teorem 8.3.1 gir

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds &= \oint_C \mathbf{G} \cdot \mathbf{n} \, ds \\ &= \iint_R \operatorname{div} \mathbf{G} \, dV = \iint_R \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

### 8.3 Oppgaver

I oppgavene 1–3 skal du bruke divergensteoremet til å finne fluksen  $\int \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$ , der  $\mathbf{n}$  er det utoverpekende enhetsnormalfeltet til  $S$ .

1.  $S$  er ellipsoiden  $(x/2)^2 + (y/3)^2 + z^2 = 1$ , og  $\mathbf{F} = (2xy^2z, 2xz, -y^2z^2)$ .

2.  $S$  er sfæren  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , og  $\mathbf{F} = (x, y, e^{\sin(xy)} + 1)$ .

3.  $S$  er randen til kassen  $[-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$ , og  $\mathbf{F} = (x + y, y^2z, z)$ .

4. La  $S$  være den delen av flaten  $z = 4 - x^2 - y^2$  som ligger i området  $z \geq 0$ , og la  $\mathbf{n}$  være det oppadpekende enhetsnormalfeltet langs  $S$ . Regn ut  $\int \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$ , der

$$\mathbf{F} = (\cos \sqrt{1 + y^2 + z^2}, e^{\sqrt{xz}}, 1).$$

Hint: Lag en lukket flate der  $S$  er den ene delen, og bruk divergensteoremet.

5. Vis at for alle  $C^2$  vektorfelt  $\mathbf{F}$  i  $\mathbf{R}^3$  gjelder  $\operatorname{div}(\operatorname{curl} \mathbf{F}) = 0$ .

6. La  $D$  være en standard region i  $\mathbf{R}^3$ , la  $S$  være randflaten til  $D$ ,

la  $\mathbf{n}$  være et utadrettet enhetsnormalfelt på  $S$ , og la  $\mathbf{F}$  være et  $C^2$  vektorfelt definert på  $D$ . Vis at

$$\int \int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \, dS = 0.$$

**7.** Vis divergensteoremet i planet (teorem 8.3.2) på grunnlag av Greens teorem.

**8.** La  $\mathbf{F} = (x, y)$ , la  $C \subseteq \mathbf{R}^2$  være sirkelen

$$x^2 + y^2 = 9,$$

la  $R$  være den lukkede sirkelskiven begrenset av  $C$ , og la  $\mathbf{n}$  være det utadpekende enhetsnormalfeltet langs  $C$ . Verifiser divergensteoremet i planet (teorem 8.3.2) i denne situasjonen, dvs. regn ut

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS \text{ og } \int \int_R \operatorname{div} \mathbf{F} \, dA$$

hver for seg og se at du får det samme.

**9.** La  $\mathbf{F} = (x, y, z)$ , la  $S \subseteq \mathbf{R}^3$  være sfæren  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ , la  $R$  være den lukkede kulen begrenset av  $S$ , og la  $\mathbf{n}$  være det utadpekende enhetsnormalfeltet langs  $S$ . Verifiser divergensteoremet i denne situasjonen, dvs. regn ut  $\int \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$  og  $\int \int \int_R \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV$  hver for seg og se at du får samme svar.

**10.** La  $S \subseteq \mathbf{R}^3$  være gitt ved  $x = \sqrt{y^2 + z^2}$ ,  $z \geq 0$ ,  $x \in [0, 2]$ . La  $\mathbf{n}$  være det oppadpekende enhetsnormalfeltet til  $S$ , og la  $\mathbf{F} = (\sin yz, y, 1)$ . Finn fluksen

$$\int \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS.$$

**11.** Hvis  $f; \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$  er en  $C^2$  funksjon, så definerer vi uttrykket  $\nabla^2 f$  som funksjonen gitt ved

$$\nabla^2 f = \operatorname{div}(\nabla f) = \nabla \cdot (\nabla f).$$

Uttrykket  $\nabla^2$  kalles *Laplace-operatoren*, og uttrykket  $\nabla^2 f$  leses "Laplace av  $f$ ". Vis at

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

**12.** Likningen  $\nabla^2 f = 0$  kalles *Laplacelikningen*. Den er et eksempel på det som kalles en *partiell differensiallikning*, siden de partielle deriverte av den ukjente funksjonen  $f$  vil inngå i likningen når den skrives ut. (Jfr. oppgave 11.) Vis at

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$$

er en løsning av Laplace-likningen i området gitt ved  $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ .

**13.** Laplace-operatoren  $\nabla^2$  i planet defineres helt analogt til Laplace-operatoren i rommet. Hvis  $f; \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  er  $C^2$ , så definerer vi  $\nabla^2 f = \operatorname{div}(\nabla f)$  akkurat som før.

a) Vis at  $\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

b) Vis at  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$  er en løsning av den plane Laplace-likningen  $\nabla^2 f = 0$  i området  $(x, y) \neq (0, 0)$ .

**14.** La  $R = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ . Beregn trippelintegralet

$$\int \int \int_R \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV,$$

der  $\mathbf{F} = (xr, yr, zr)$  og  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

**15.** La  $R \subseteq \mathbf{R}^3$  være det kompakte området begrenset av flatene  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$  og  $yz$ -planet, for  $x \geq 0$ . La  $S$  være randflaten til  $R$ . Finn fluksen av vektorfeltet  $\mathbf{F} = (x^2, xz, 2)$  ut av den lukkede flaten  $S$ .

**16.** La  $T$  være en region i  $\mathbf{R}^3$  som vi kan bruke divergensteoremet på. La  $S$  være den lukkede randflaten til  $T$ , og la  $\mathbf{n}$  være et utoverpekende enhetsnormalfelt til  $S$ . Hvis  $f$  er en  $C^2$  skalarfunksjon definert på  $T$ , så la

$$\frac{\partial f}{\partial n} \stackrel{\text{def}}{=} (\nabla f) \cdot \mathbf{n}$$

Bruk divergensteoremet til å vise at da er

$$\iint_S \frac{\partial f}{\partial n} \, dS = \iiint_T \nabla^2 f \, dV.$$

(Laplaceoperatoren  $\nabla^2$  ble definert i oppgave 11.)

**17.** Vis at hvis  $f$  og  $g$  er  $C^2$  skalarfunksjoner på  $\mathbf{R}^3$ , så er

$$\nabla^2(fg) = f\nabla^2 g + g\nabla^2 f + 2(\nabla f \cdot \nabla g).$$

**18.** Vis at hvis  $\mathbf{F}$  er et  $C^2$  vektorfelt på  $\mathbf{R}^3$  og  $g$  er en  $C^2$  skalarfunksjon på  $\mathbf{R}^3$ , så er

$$(\nabla \phi) \times \mathbf{F} = \phi \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla \times (\phi \cdot \mathbf{F}).$$

**19.** La  $f$  og  $g$  være  $C^2$  skalarfunksjoner på  $\mathbf{R}^3$ . Vis at

a)  $\nabla \cdot (\nabla f \times \nabla g) = 0$

b)  $\nabla \times (f\nabla g - g\nabla f) = f\nabla^2 g - g\nabla^2 f$

**20.** La  $\mathbf{F}$  og  $\mathbf{G}$  være  $C^1$  vektorfelter i  $\mathbf{R}^3$ . Vis at

a)  $\nabla \cdot (\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \nabla \cdot \mathbf{F} + \nabla \cdot \mathbf{G}$

b)  $\nabla \times (\mathbf{F} + \mathbf{G}) = (\nabla \times \mathbf{F}) + (\nabla \times \mathbf{G})$

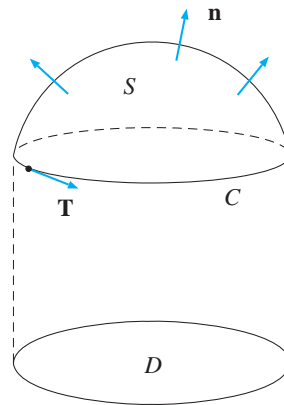
c)  $\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{G} - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G})$

## 8.4 Stokes' teorem

Vi skal kalle en flate  $S \subseteq \mathbf{R}^3$  for *standard* hvis den kan oppfattes grafen til en  $C^2$  funksjon  $f$  over et standard område  $D$  i et av de tre koordinatplanene. De tre mulighetene er altså

$$\begin{aligned} z &= f(x, y), & \text{eller} \\ y &= f(x, z), & \text{eller} \\ x &= f(y, z). \end{aligned}$$

Se på figuren under. Hvis  $z$ -aksen går oppover, viser denne tilfellet  $z = f(x, y)$ . Men hvis du tenker deg at figuren "ligger" slik at  $x$ -aksen går oppover, viser den tilfellet  $x = f(y, z)$ . Tilsvarende kan du også tenke deg at  $y$ -aksen går oppover. Med *randkurven*  $C$  til  $S$  menes mengden av punkter på  $S$  som ligger over randen til  $D$ , dvs. mengden av punkter som tilsvarer funksjonsverdier fra randen til  $D$ . Kurven  $C$  er da en stykkevis glatt, enkel og lukket kurve i  $\mathbf{R}^3$ .



Et enhetsnormalfelt

$$\mathbf{n} = [n_1, n_2, n_3]$$

på  $S$  kalles *oppadrettet* hvis  $n_3 \geq 0$  på hele  $S$ , og *nedadrettet* hvis  $n_3 \leq 0$  på hele  $S$ . Videre sies et enhetstangentfelt

$$\mathbf{T} = [T_1, T_2, T_3]$$

langs randkurven  $C$  til  $S$  å være *orientert mot klokken* hvis "skyggefeltet"  $[T_1, T_2]$  til  $T$  langs randen til  $D$  nede i  $xy$ -planet er orientert mot klokken. Tilsvarende sier vi at  $\mathbf{T}$  er orientert *med klokken* hvis skyggefeltet er orientert

med klokken. På figuren ovenfor er  $\mathbf{n}$  oppadrettet, og  $\mathbf{T}$  er orientert mot klokken. Vi sier at  $\mathbf{T}$  er *orientert positivt i forhold til  $\mathbf{n}$*  hvis enten

- $\mathbf{n}$  er oppadrettet og  $\mathbf{T}$  er orientert mot klokken, eller
- $\mathbf{n}$  er nedadrettet og  $\mathbf{T}$  er orientert med klokken.

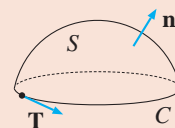
Tolket geometrisk, kan disse to alternativene sammenfattes til følgende ene betingelse: At  $\mathbf{T}$  er orientert positivt i forhold til  $\mathbf{n}$  betyr at "skogen" av  $\mathbf{n}$ -piler står opp av  $S$  til *venstre* for deg når du spaserer rundt randkurven til  $S$  i retningen til  $\mathbf{T}$ . Slik er det på figuren ovenfor.

Vårt neste teorem sier at i denne situasjonen er arbeidet til et vektorfelt  $\mathbf{F}$  rundt randkurven  $C$  i retningen  $\mathbf{T}$  lik fluksen av  $\text{curl } \mathbf{F}$  gjennom  $S$  i retning  $\mathbf{n}$ . Dette gir en tolkning av curlen til et vektorfelt. Vi kan tenke oss at curlen måler hvordan vektorfeltet "vri seg" i ulike punkter.

### Teorem 1 Stokes' teorem

La  $S$  være en standard flate i  $\mathbf{R}^3$ , la  $C$  være randkurven til  $S$ , la  $\mathbf{n}$  være et enhetsnormalfelt på  $S$ , og la  $\mathbf{T}$  være et enhetstangentfelt langs randkurven  $C$  orientert positivt i forhold til  $\mathbf{n}$ . Se figuren under. Hvis  $\mathbf{F}$  er et  $C^1$  vektorfelt definert på  $S$ , så er

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds = \iint_S (\text{curl } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dS.$$



**Bevis** Vi antar at  $S$  kan oppfattes som grafen til en funksjon

$$z = f(x, y)$$

over et standard område  $R$  i  $xy$ -planet, og at normalvektoren  $\mathbf{n}$  er har positiv  $z$ -komponent. De andre tilfellene behandles tilsvarende. Flaten  $S$  kan da parametriseres ved å sette

$$\mathbf{r}(x, y) = (x, y, z(x, y))$$

for  $(x, y) \in R$ , der jeg for enkelthets skyld skrev  $z(x, y)$  istedenfor  $f(x, y)$ . Dette gir normalvektoren

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \left( -\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1 \right).$$

Siden  $z$ -komponenten er positiv, peker  $\mathbf{N}$  riktig vei. Teorem 8.1.3 gir

$$\begin{aligned} \iint_S (\operatorname{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dS &= \iint_R \left[ \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \left( -\frac{\partial z}{\partial x} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \left( -\frac{\partial z}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \right] dA. \end{aligned}$$

På den annen side, la

$$\mathbf{s}(t) = (x(t), y(t)), \quad t \in [a, b]$$

være en stykkevis glatt parametrisering av randkurven  $J$  til  $R$  i  $xy$ -planet, med retning mot klokken. Da blir

$$(x(t), y(t), z(x(t), y(t)))$$

en stykkevis glatt parametrisering av kurven  $C$  i retningen gitt av tangentfeltet  $\mathbf{T}$ . Teorem 8.1.2 gir

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds &= \int_a^b \left( F_1 \frac{dx}{dt} + F_2 \frac{dy}{dt} + F_3 \frac{dz}{dt} \right) dt \\ &= \int_a^b \left[ \left( F_1 + F_3 \frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{dx}{dt} + \left( F_2 + F_3 \frac{\partial z}{\partial y} \right) \frac{dy}{dt} \right] dt, \end{aligned}$$

der jeg satte inn at  $dz/dt = (\partial z/\partial x)(dx/dt) + (\partial z/\partial y)(dy/dt)$  ved kjerne-regelen. Ved teorem 8.1.2 kan uttrykket ovenfor oppfattes som arbeidet til et vektorfelt  $\mathbf{G} = (P, Q)$  rundt  $J$  i retning mot klokken, der

$$P(x, y) = F_1 + F_3 \frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{og} \quad Q(x, y) = F_2 + F_3 \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Her skal komponentene til  $F$  evalueres i punktet  $(x, y, z(x, y))$ . Siden  $z = z(x, y)$  er en funksjon av  $x$  og  $y$ , gir kjerneregelen nå

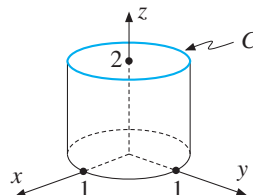
$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} &= \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial F_3}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + F_3 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right) \\ &\quad - \left( \frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} + F_3 \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \right). \end{aligned}$$

De to bakerste leddene i parentesene faller mot hverandre, og bytter vi om på resten får vi akkurat integranden i uttrykket for  $\int_S (\operatorname{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dS$  utledet ovenfor. Resultatet følger ved Greens teorem. ■

I analogi med situasjonen for Greens teorem og divergensteoremet, kan Stokes' teorem utvides til å gjelde for mer generelle typer flater ved å lime sammen flatestykker av standard-format, dvs. flatestykker som er grafer i en av de tre koordinatretningene. Hadde jeg vært flinkere til å tegne, skulle jeg tegnet et Frankenstein-monster med hud sammensydd av lapper for å illustrere dette. Tenk deg Frankenstein-monsteret laget på en slik måte at når det står i en viss posisjon, er hver enkelt lapp en graf i en av de tre koordinatretningene. Kurveintegralene langs sømmene mellom lappene kansellerer hverandre, og du står dermed igjen med kun kurveintegralet langs randkurven til  $S$ . Regelen for retningene blir den samme som før: Når du går en tur rundt randkurven i retningen  $\mathbf{T}$ , skal "skogen" av  $\mathbf{n}$ -piler stikke opp av flaten til *venstre* for deg. Se figuren side 285. Det er også mulig at randkurven  $C$  til  $S$  består av flere biter, akkurat slik situasjonen var for Greens teorem. Hver enkelt bit av randkurven må da være orientert slik at  $\mathbf{n}$  stikker opp av flaten til venstre for deg når du går langs randbiten.

**Eksempel 1** La  $C$  være snittet mellom sylindringen  $x^2 + y^2 = 1$  og planet  $z = 2$ , og la  $\mathbf{F}(x, y, z) = [4x, 3x + \cos y, -2x^2y^2z^2]$ . Finn arbeidet  $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds$ , der enhetstangentfeltet  $\mathbf{T}$  går mot klokken sett ovenfra.

**Løsning** Kurven  $C$  er vist på figuren under.



Vi lurer på om vi bør bruke Stokes' teorem, og regner ut curlen til  $\mathbf{F}$ :

$$\operatorname{curl} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 4x & 3x + 2y & -2x^2y^2z^2 \end{vmatrix} = [-4x^2yz^2, 4xy^2z^2, 3].$$

For å kunne bruke Stokes, trenger vi en flate  $S$  med  $C$  som rand. Jeg velger den delen av planet  $z = 2$  som skjæres ut av sylindringen. Det oppoverpekende enhetsnormalfeltet til  $S$  blir da  $\mathbf{n} = [0, 0, 1]$ . Vi får

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds \stackrel{\text{Stokes}}{=} \iint_S (\operatorname{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_S 3 \, dS = 3 \cdot (\text{areal } S) = \underline{\underline{3\pi}}. \quad \blacksquare$$



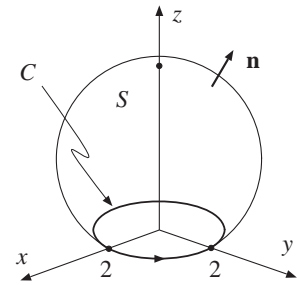
**Eksempel 2** La  $\mathbf{F}(x, y, z) = [-y, x, xyz]$ . Finn fluksen av  $\text{curl } \mathbf{F}$  ut av den delen  $S$  av sfæren  $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 8$  som ligger over  $xy$ -planet.

**Løsning** Flaten  $S$  er som en "vaskeball"

opp-ned, se figur. Randkurven  $C$  til  $S$  er sirkelen  $x^2 + y^2 = 4$ , noe vi ser ved å sette  $z = 0$  i likningen for  $S$ . Ved Stokes er

$$\iint_S (\text{curl } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dS = \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds,$$

der  $\mathbf{n}$  er utadpekende på  $S$  og  $\mathbf{T}$  går mot klokken langs  $C$ . Jeg parametriserer  $C$  ved  $\mathbf{r}(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, 0)$  for  $t \in [0, 2\pi)$ . Fluksen blir dermed



$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) \, dt = \int_0^{2\pi} (4 \sin^2 t + 4 \cos^2 t) \, dt = \underline{\underline{8\pi}}. \quad \blacksquare$$

## 8.4 Oppgaver

I oppgavene 1–3 skal du bruke Stokes' teorem til å finne arbeidet  $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds$ , der  $\mathbf{T}$  er det gitte enhetstangentfeltet langs  $C$ .

**1.**  $C$  er snittet mellom kjeglen  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  og planet  $z = 4$ ,  $\mathbf{T}$  går mot klokken sett ovenfra, og  $\mathbf{F}(x, y, z) = [z, x, y]$ .

**2.**  $C$  er snittet mellom sylindren  $x^2 + y^2 = 9$  og sfæren  $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ ,  $\mathbf{T}$  går mot klokken sett ovenfra, og  $\mathbf{F}(x, y, z) = [2x - y, z + x, y]$ .

**3.**  $C$  er randen til kvadratet  $x \in [0, 1]$ ,  $y \in [0, 1]$ ,  $z = 0$  i  $xy$ -planet,  $\mathbf{T}$  går med klokken sett ovenfra, og  $\mathbf{F}(x, y, z) = [z^2, xy, xyz]$ .

I oppgavene 4–6 skal du bruke Stokes' teorem til å finne fluksen  $\int \int_S (\text{curl } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dS$  der  $\mathbf{n}$  er det gitte enhetsnormalfeltet langs  $S$ .

**4.**  $S$  er den delen av paraboloiden  $z = 4 - x^2 - y^2$  som ligger i området  $z \geq 0$ ,  $\mathbf{n}$  er oppadrettet, og  $\mathbf{F}(x, y, z) = [ze^{xy}, e^y \sin z, e^{\sqrt{x}}]$

**5.**  $S$  er den delen av sylindren  $x^2 + z^2 = 1$  som ligger i regionen  $1 \leq y \leq 2$ ,  $\mathbf{n}$  peker ut fra sylindren, og  $\mathbf{F} = [2x, \sqrt{y}, 2z]$ .

**6.**  $S$  er den delen av sfæren  $x^2 + y^2 + z^2 = 25$  som oppfyller  $z \geq 3$ ,  $\mathbf{n}$  peker oppover, og

$$\mathbf{F}(x, y, z) = [2xe^{x^2}yz, ze^{x^2}, y^{5/2}].$$

**7.** La  $S \subseteq \mathbf{R}^3$  være den delen av planet  $z = x$  som oppfyller  $x^2 + y^2 \leq 1$ . Finn arealet av  $S$ . Finn så arbeidet til  $\mathbf{F}(x, y, z) = [2y, 3z, 4x]$  rundt randkurven til  $S$ , mot klokken sett ovenfra.

**8.** Lag et teorem ved å kombinere teorem 8.1.1 med Stokes' teorem. Bevis teoremet ditt.

**9.** Bevis Greens teorem ut fra Stokes' teorem.

**10.** La  $\mathbf{F}$  være et  $C^1$  vektorfelt på  $\mathbf{R}^2$ , la  $S$  være sfæren  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , og la  $\mathbf{n}$  være det utover-pekende enhetsnormalfeltet til  $S$ . Vis ved hjelp av Stokes' teorem (ikke divergensteoremet!) at  $\int \int_S (\text{curl } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dS = 0$ .

**11.** La  $\mathbf{F}(x, y, z) = [e^{\sin z}, x, xe^{\sin z} \cos z]$ , og la  $C$  være snittet mellom planet  $x - 2y - 5z = 8$  og den elliptiske sylindren  $(x - 5)^2 + (y/2)^2 = 1$ . Finn arbeidet  $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds$ , der  $\mathbf{T}$  går mot klokken sett ovenfra.

## 8.5 Konservative vektorfelder

Et vektorfelt  $\mathbf{F}$  i  $\mathbf{R}^n$  kalles *konservativt* hvis det fins en skalarfunksjon  $f; \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  slik at

$$\mathbf{F} = \nabla f$$

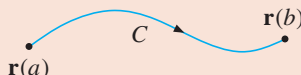
i alle punkter der  $\mathbf{F}$  er definert. Funksjonen  $f$  kalles for en **potensialfunksjon** for vektorfeltet  $\mathbf{F}$ .

**Eksempel 1** Vektorfeltet  $\mathbf{F}(x, y, z) = (2xz \sin y, x^2z \cos y, x^2 \sin y)$  er konservativt, for det har potensialfunksjonen  $f(x, y, z) = x^2z \sin y$ . Vi har nemlig

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = (2xz \sin y, x^2z \cos y, x^2 \sin y) = \mathbf{F}(x, y, z). \quad \blacksquare$$

### Teorem 1 Potensialfunksjoner og arbeid

La  $C$  være en stykkevis glatt kurve i  $\mathbf{R}^n$ , la  $\mathbf{T}$  være et enhetstangentfelt på  $C$ , og la  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$  være en stykkevis glatt parametrisering av  $C$  i retningen til  $\mathbf{T}$ . La  $\mathbf{F}$  være et  $C^1$  vektorfelt definert på  $C$ , og anta at  $f$  er en potensialfunksjon for  $\mathbf{F}$ . Da er

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a)).$$


**Bevis** Anta først at  $\mathbf{r}$  er  $C^1$  på  $\langle a, b \rangle$ . Definer  $F : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbf{R}$  ved  $F(t) = f(\mathbf{r}(t))$ . Kjernerregelen gir da

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt} = \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t).$$

Ved fundamentalteoremet (teorem 10.0.0) i nest siste overgang fås så

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) \, dt = \int_a^b \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) \, dt \\ &= \int_a^b F'(t) \, dt = F(b) - F(a) = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a)). \end{aligned}$$

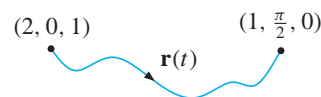
Hvis der fins ett punkt  $t_0 \in \langle a, b \rangle$  der  $\mathbf{r}$  ikke er  $C^1$ , deler vi opp integralet og gjør regningen ovenfor på intervallene  $[a, t_0]$  og  $[t_0, b]$  separat. Vi får da totalarbeidet  $(F(b) - F(t_0)) + (F(t_0) - F(a)) = F(b) - F(a)$ , som før. Hvis der fins flere punkter der  $\mathbf{r}$  ikke er  $C^1$ , deler vi opp ytterligere.  $\blacksquare$

**Eksempel 2** La  $\mathbf{F}$  og  $f$  være som i eksemplet forrige side, og la  $C$  være en kurve som har en stykkevis glatt parameterisering  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^3$  med

$$\mathbf{r}(a) = (2, 0, 1) \text{ og } \mathbf{r}(b) = (1, \frac{\pi}{2}, 2).$$

Hvis da retningen til tangentfeltet  $\mathbf{T}$  stemmer med  $\mathbf{r}'(t)$ , fås

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds = f(1, \frac{\pi}{2}, 2) - f(2, 0, 1) = 2. \quad \blacksquare$$

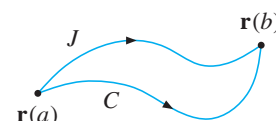


Anta at vektorfeltet  $\mathbf{F}$  er  $C^1$  på mengden  $U \subseteq \mathbf{R}^n$ . Vi sier at *arbeidet til  $\mathbf{F}$  er uavhengig av vei* på  $U$  dersom følgende holder:

- Hvis  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$  og  $\mathbf{s} : [c, d] \rightarrow \mathbf{R}^n$  er stykkevis glatte parameteriseringer slik at  $\mathbf{r}(a) = \mathbf{s}(c)$  og  $\mathbf{r}(b) = \mathbf{s}(d)$ , så er

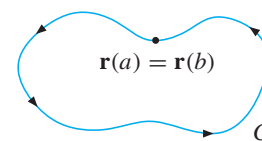
$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds = \int_J \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds,$$

der  $C$  og  $J$  er verdimengdene til  $\mathbf{r}$  og  $\mathbf{s}$  respektivt, og  $\mathbf{T}$  er enhets-tangentfelter i retningene til  $\mathbf{r}$  og  $\mathbf{s}$ .



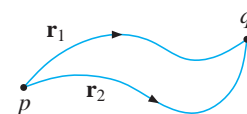
At arbeidet til  $\mathbf{F}$  er uavhengig av vei betyr altså, røft sagt, at arbeidet til  $\mathbf{F}$  langs en vilkårlig kurve kun avhenger av endepunktene til kurven. Dette er igjen ekvivalent med at

- Arbeidet til  $\mathbf{F}$  rundt alle lukkede, stykkevis glatte kurver i  $U$  er 0; dvs. hvis  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$  er en stykkevis glatt kurveparameterisering slik at  $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$ , så er arbeidet langs kurven til  $\mathbf{r}$  i retning  $\mathbf{r}'$  lik 0.



Grunnen er at hvis vi har gitt to kurver  $C_1$  og  $C_2$  med parameteriseringer  $\mathbf{r}_1$  og  $\mathbf{r}_2$  som begge starter i  $p$  og slutter i  $q$ , så er unionen  $C = C_1 \cup C_2$  en lukket kurve som kan parameteriseres ved å bruke først  $\mathbf{r}_1$  og så  $\mathbf{r}_2$  baklengs. Hvis  $\mathbf{T}_1$  og  $\mathbf{T}_2$  er enhets-tangentfeltene gitt av  $\mathbf{r}_1$  og  $\mathbf{r}_2$ , er da feltet  $\mathbf{T}$  definert ved at  $\mathbf{T} = \mathbf{T}_1$  på  $C_1$  og  $\mathbf{T} = -\mathbf{T}_2$  på  $C_2$  enhets-tangentfeltet til parameteriseringen som tar runden rundt  $C$ . Så

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds &= \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds \\ &= \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}_1 \, ds - \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}_2 \, ds = 0, \end{aligned}$$



gitt at arbeidet til  $\mathbf{F}$  er uavhengig av vei. Resonnementet kan også gjøres motsatt. Dermed får vi ekvivalensen nevnt ovenfor.

**Teorem 2 Konservative vektorfelter og uavhengighet av vei**

La  $U \subseteq \mathbf{R}^n$  være åpen og ha den egenskapen at hvis  $p, q \in U$ , så fins en stykkevis glatt kurveparametrisering  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow U$  slik at  $\mathbf{r}(a) = p$  og  $\mathbf{r}(b) = q$ . Da har vi at

$\mathbf{F}$  er konservativt på  $U \iff$  arbeidet til  $\mathbf{F}$  er uavhengig av vei i  $U$ .

**Bevis**  $\implies$ . Hvis  $\mathbf{F}$  er konservativt, finnes det en potensialfunksjon  $f$  slik at  $\mathbf{F} = \nabla f$ . Hvis vi da har to parametriserte kurver som begge starter i  $p$  og ender i  $q$ , gir teorem 8.5.1 at arbeidet langs hver av dem er  $f(q) - f(p)$ . Arbeidet er altså uavhengig av veien.

$\impliedby$ . Anta at arbeidet til  $\mathbf{F}$  er uavhengig av veien på  $U$ . Velg et fast punkt  $p \in U$ . Vi definerer funksjonen  $f : U \rightarrow \mathbf{R}$  på følgende måte. Gitt et punkt  $q \in U$ , la  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow U$  være en vilkårlig stykkevis glatt kurveparametrisering slik at  $\mathbf{r}(a) = p$  og  $\mathbf{r}(b) = q$ . Vi lar så

$$f(q) = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt.$$

Siden arbeidet til  $\mathbf{F}$  er uavhengig av vei i  $U$ , gir definisjonen av  $f$  mening. Jeg skal nå vise at  $\mathbf{F} = \nabla f$ . Gitt et punkt  $(x_1, \dots, x_n)$ , velg punktet  $(y, x_2, \dots, x_n)$  så nær at det rette linjestykket  $L$  mellom de to punktene ligger i  $U$ , mens  $y < x_1$ . La  $s : [c, d] \rightarrow \mathbf{R}^n$  være en stykkevis glatt kurveparametrisering slik at  $\mathbf{s}(c) = p$  og  $\mathbf{s}(d) = (y, x_2, \dots, x_n)$ . Da er

$$f(x_1, \dots, x_n) = \int_c^d \mathbf{F}(\mathbf{s}(t)) \cdot \mathbf{s}'(t) dt + \int_y^{x_1} F_1(t, x_2, \dots, x_n) dt,$$

fordi  $L$  kan parametriseres ved  $(t, x_2, \dots, x_n)$  for  $t \in [y, x_1]$ . Deriverer du likningen ovenfor med hensyn på  $x_1$ , får du ( $q$  og  $s$  holdes fast)

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1, \dots, x_n)$$

ved fundamentalteoremet. At  $\partial f / \partial x_i = F_i$  for  $2 \leq i \leq n$  vises på helt tilsvarende måte. ■

Neste teorem gir oss kriterier for hvordan man kan se direkte fra et oppgitt vektorfelt om det er konservativt. Forutsetningen er at vektorfeltet er  $C^1$  på enten hele  $\mathbf{R}^2$  eller hele  $\mathbf{R}^3$ .

**Teorem 3 Kriterium for konservative vektorfelter**

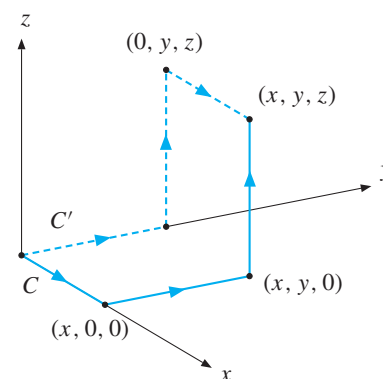
1. Anta at vektorfeltet  $\mathbf{F} = (P, Q)$  er  $C^1$  på hele  $\mathbf{R}^2$ . Da gjelder  $\mathbf{F}$  er konservativt  $\iff \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$  i hele planet.
2. Anta at vektorfeltet  $\mathbf{F}$  er  $C^1$  på hele  $\mathbf{R}^3$ . Da gjelder  $\mathbf{F}$  er konservativt  $\iff \text{curl } \mathbf{F} = \mathbf{0}$  i hele rommet.

**Bevis** Vi begynner med punkt 2. Implikasjonen “ $\Rightarrow$ ” er enkel å vise. Hvis  $\mathbf{F}$  er konservativt, fins  $f$  slik at  $\mathbf{F} = \nabla f$ . Teorem 8.1.1 gir da  $\text{curl } \mathbf{F} = \mathbf{0}$ .

For å vise “ $\Leftarrow$ ”, anta at  $\text{curl } \mathbf{F} = \mathbf{0}$ . Vi definerer  $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$  ved

$$f(x, y, z) = \int_0^x F_1(t, 0, 0) dt + \int_0^y F_2(x, t, 0) dt + \int_0^z F_3(x, y, t) dt.$$

Vi tolker dette dithen at  $f(x, y, z)$  er arbeidet til  $\mathbf{F}$  langs kurven  $C$  på figuren til høyre, fra  $(0, 0, 0)$  via  $(x, 0, 0)$  og  $(x, y, 0)$  til  $(x, y, z)$  i rette linjer.



Ved fundamentalteoremet er  $\partial f / \partial z = F_3$ . Kikk så på kurven  $C'$ , som går fra  $(0, 0, 0)$  via  $(0, y, 0)$  og  $(0, y, z)$  til  $(x, y, z)$ . Hvis vi isteden hadde definert  $f$  på analog måte ved hjelp av denne, ville vi fått at  $\partial f / \partial x = F_1$ . Men kurvene  $C$  og  $C'$  utgjør tilsammen randkurven til en stykkevis glatt flate  $S$  bestående av to sideflater i en rettvinklet kasse. Ved Stokes' teorem følger, fordi  $\text{curl } \mathbf{F} = \mathbf{0}$ , at arbeidet langs  $C$  minus arbeidet langs  $C'$  må være 0. Ergo er de to arbeidene like, dvs. vi får *samme* funksjon  $f$  ved å bruke kurven  $C'$  som vi gjør ved å bruke  $C$ . At  $\partial f / \partial x = F_1$  følger nå direkte. At  $\partial f / \partial y = F_2$  vises tilsvarende ved å betrakte kurven fra  $(0, 0, 0)$  via  $(x, 0, 0)$  og  $(x, 0, z)$  til  $(x, y, z)$ . Dermed er punkt 2 bevist.

Bevis for punkt 1: For “ $\Rightarrow$ ”, har vi at hvis  $\mathbf{F} = (\partial f / \partial x, \partial f / \partial y)$ , så er  $\partial Q / \partial x - \partial P / \partial y = (\partial^2 f / \partial y \partial x) - (\partial^2 f / \partial x \partial y) = 0$ .

Implikasjonen “ $\Leftarrow$ ” vises helt analogt med det vi gjorde for punkt 1, bortsett fra at vi bruker Greens teorem istedenfor Stokes' teorem. ■

I det neste eksemplet skal vi se på metoder man kan bruke for å finne en potensialfunksjon  $f$  for et vektorfelt  $\mathbf{F}$  man vet er konservativt.

**Eksempel 3** La  $\mathbf{F} = (2xy, x^2 + ze^{yz}, ye^{yz})$ . Vi skal vise at  $\mathbf{F}$  er konservativt, og finne en potensialfunksjon  $f$  for vektorfeltet  $\mathbf{F}$ .

**Løsning** Utregning gir at  $\text{curl } \mathbf{F} = \mathbf{0}$ . Siden vektorfeltet  $\mathbf{F}$  er definert i hele rommet, følger det fra teorem 3 at  $\mathbf{F}$  er konservativt.

Så langt alt vel. Men så var det å finne en potensialfunksjon, dvs. finne en funksjon  $f$  slik at  $\nabla f = \mathbf{F}$ . Her kommer to alternative metoder.

#### Antiderivasjons-metoden

Hvis  $f(x, y, z)$  skal være en potensialfunksjon for  $\mathbf{F}$ , må vi ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + ze^{yz} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = ye^{yz}$$

Antideriverer vi disse likningene med hensyn på henholdsvis  $x$ ,  $y$  og  $z$ , får vi

$$f(x, y, z) = x^2y + C(y, z)$$

$$f(x, y, z) = x^2y + e^{yz} + D(x, z)$$

$$f(x, y, z) = e^{yz} + E(x, y).$$

Notasjonen  $C(y, z)$  betyr at integrasjonskonstanten  $C$  kan avhenge av  $y$  og  $z$ , men ikke av  $x$ . Tilsvarende med  $D(x, z)$  og  $E(x, y)$ . Det gjelder å finne en  $f$  slik at alle disse kravene er tilfredstilt. Vi kan velge

$$C(y, z) = e^{yz} \quad D(x, z) = 0 \quad E(x, y) = x^2y$$

Da stemmer alt, og vi får  $f(x, y, z) = \underline{\underline{x^2y + e^{yz}}}$ .

#### Kurveintegral-metoden

Her baserer vi oss på resonnementet brukt for å vise eksistens av en potensialfunksjon i beviset for teorem 3. Vi definerer

$$f(x, y, z) = \int_0^x F_1(t, 0, 0) dt + \int_0^y F_2(x, t, 0) dt + \int_0^z F_3(x, y, t) dt,$$

og regner dette ut. I vårt tilfelle fås

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \int_0^x 2t \cdot 0 dt + \int_0^y (x^2 + 0 \cdot e^{tx}) dt + \int_0^z ye^{yt} dt \\ &= 0 + \left[ x^2t \right]_{t=0}^{t=y} + \left[ e^{yt} \right]_{t=0}^{t=z} = \underline{\underline{x^2y + e^{yz} - 1}}. \end{aligned}$$

Merk at vi her fikk en *annen* potensialfunksjon  $f$  enn ved antiderivasjonsmetoden. De to  $f$ -ene adskiller seg imidlertid bare ved en konstant, og er selvsagt like gode. ■

**Eksempel 4** Vis at vektorfeltet  $\mathbf{F}(x, y) = (1 + \sin y, 2 + x \cos y)$  er et konservativt vektorfelt i planet, og finn en potensialfunksjon for  $\mathbf{F}$ .

**Løsning** Vi håper at vi kan bruke teorem 3. Hvis vi setter  $\mathbf{F} = (P, Q)$ , får vi

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \cos y - \cos y = 0. \quad (\text{Yes!})$$

Siden  $\mathbf{F}$  er definert i hele planet, gir nå teorem 3 at  $\mathbf{F}$  er konservativt. For å finne en potensialfunksjon  $f$ , bruker vi antiderivasjonsmetoden. Må ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + \sin y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2 + x \cos y$$

Antiderivasjon gir kravene

$$f(x, y) = x + x \sin y + C(y) \quad \text{og} \quad f(x, y) = 2y + x \sin y + D(x).$$

Sammenlikning gir at vi kan velge  $C(y) = 2y$ , og  $D(x) = x$ . Altså

$$f(x, y) = \underline{\underline{x + 2y + x \sin y}}. \quad \blacksquare$$

## 8.5 Oppgaver

**1.** Vis at funksjonen  $f(x, y, z) = x^4 \sin y \cos z$  er en potensialfunksjon for vektorfeltet

$$\mathbf{F} = [4x^3 \sin y \cos z, x^4 \cos y \cos z, -x^4 \sin y \sin z].$$

Bruk dette til å beregne arbeidet  $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds$ , der  $C$  er snittet mellom halvsfæren  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $z \geq 0$  og planet  $y = 0$ , og  $\mathbf{T}$  går i den retningen som  $x$  øker.

**2.** La  $f(x, y, z) = x^2 y^2 z^2$ . Finn et vektorfelt  $\mathbf{F}$  definert på  $\mathbf{R}^3$  slik at  $f$  er en potensialfunksjon for  $\mathbf{F}$ .

**3.** La  $C \subseteq \mathbf{R}^2$  være den delen av kurven  $y = 1 - x^2$  der  $x \in [-1, 1]$ , og la  $\mathbf{F}(x, y) = [2x, 2y]$ .

a) Vis at  $\mathbf{F}$  er konservativt.

b) Finn arbeidet  $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds$  av  $\mathbf{F}$  langs  $C$  i retning av minkende  $x$ -verdi.

**4.** La  $C$  være snittkurven mellom planet  $y = z$  og den delen av flaten  $z = 4 - x^2 - y^2$  som ligger i området  $z \geq 0$ . La  $\mathbf{F} = [yz^2 e^{xy}, xz^2 e^{xy}, 2ze^{xy}]$ .

a) Finn  $\text{curl } \mathbf{F}$ .

b) Finn arbeidet til  $\mathbf{F}$  langs kurven  $C$  i retning økende  $x$ .

**5.** Vis at to funksjoner  $f_1$  og  $f_2$  er potensialfunksjoner for samme vektorfelt  $\mathbf{F}$  på  $\mathbf{R}^2$  hvis og bare hvis det fins et konstant tall  $C$  slik at  $f_1(x, y, z) = f_2(x, y, z) + C$  for alle  $(x, y, z)$ .

I oppgavene 6–9 skal du gjøre følgende:

- a) Avgjør om det gitte vektorfeltet  $\mathbf{F}$  er konservativt på  $\mathbf{R}^2$ .  
 b) Finn en potensialfunksjon for  $\mathbf{F}$ , dersom en slik eksisterer.

**6.**  $\mathbf{F} = [\sin xy, x + y]$

**7.**  $\mathbf{F} = [2xy^2, 2x^2y]$

**8.**  $\mathbf{F} = [\cos x, \cos y]$

**9.**  $\mathbf{F} = \left[ \frac{x}{(1+x^2+y^2)^2}, \frac{y}{(1+x^2+y^2)^2} \right]$

I oppgavene 10–13 skal du gjøre følgende:

- a) Avgjør om det gitte vektorfeltet  $\mathbf{F}$  er konservativt på  $\mathbf{R}^3$ .  
 b) Finn en potensialfunksjon for  $\mathbf{F}$ , dersom en slik eksisterer.

**10.**  $\mathbf{F} = [y \cos(xy), x \cos(xy) + z^2, 2yz]$

**11.**  $\mathbf{F} = [xy + y^2, z - x^2, x^3]$

**12.**  $\mathbf{F} = [y^4 + z, 4xy^3 + 5, x]$

**13.** La  $C$  være snittet mellom flatene  $y = 4x - x^2$  og  $z = 2$ , for  $y \geq 0$ . Finn arbeidet til vektorfeltet  $\mathbf{F} = [2y^2 + z, 4xy + z, x + y]$  langs  $C$  i retning av økende  $x$ .

**14.** Vis at vektorfeltet

$$\mathbf{F} = [1 + z^2 + y, x, 2xz]$$

er konservativt. Bruk kurveintegralmetoden (nederst s. 294) til å finne en potensialfunksjon for  $\mathbf{F}$ .

**15.** Begrunn generelt at hvis  $\mathbf{T}_1$  og  $\mathbf{T}_2$  er motsatt rettede enhetstangentfelt langs en stykkevis glatt kurve  $C$  (dvs.  $\mathbf{T}_1(p) = -\mathbf{T}_2(p)$  for alle  $p \in C$ ), så er  $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}_1 ds = -\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}_2 ds$  for alle vektorfelder  $\mathbf{F}$  slik at integralene er definert.

### Blandede oppgaver til kapittel 8

**1.** Hvis  $\mathbf{F} = (P, Q)$  er et vektorfelt i  $\mathbf{R}^2$  med komponentfunksjoner  $P(x, y)$ , og  $Q(x, y)$ , skrives arbeidet  $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$  av  $\mathbf{F}$  langs kurven  $C$  ofte som

$$\int_C P dx + Q dy.$$

Her må  $\mathbf{T}$ -retningen langs  $C$  spesifiseres i tillegg. Dette kalles gjerne å *orientere* kurven  $C$ . (Ofte spesifiserer man retningen ved å tegne sirkler med piler etc. på selve integraltegnet.) Vis at hvis

**16.** Vis at hvis  $\mathbf{F}$  er et  $C^1$  vektorfelt på  $\mathbf{R}^3$  slik at  $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ , så fins et vektorfelt  $\mathbf{G}$  slik at  $\mathbf{F} = \text{curl } \mathbf{G}$ . Hint: Definer  $\mathbf{G} = [G_1, G_2, G_3]$  ved

$$G_1(x, y, z) = \int_0^z F_2(x, y, t) dt - \int_0^y F_3(x, t, 0) dt$$

$$G_2(x, y, z) = -\int_0^z F_1(x, y, t) dt$$

$$G_3(x, y, z) = 0.$$

**17.** La  $\mathbf{F}(x, y, z) = [2yx, -y^2, 1 - 2yx]$ .

- a) Vis at  $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ .  
 b) Bruk metoden i hintet fra oppgave 16 til å finne et vektorfelt  $\mathbf{G}$  slik at

$$\mathbf{G} = \text{curl } \mathbf{F}.$$

**18.** La  $\mathbf{F}(x, y, z)$  og  $\mathbf{G}(x, y, z)$  være to  $C^1$  vektor-felter på  $\mathbf{R}^3$  slik at

$$\text{curl } \mathbf{F} = \text{curl } \mathbf{G}.$$

Følger det fra dette at det fins et konstant tall  $C$  slik at

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{G}(x, y, z) + C ?$$

Bevis det, eller gi et moteksempel.

**19.** La  $\mathbf{F}(x, y, z)$  være vektorfeltet som er definerert på hele  $\mathbf{R}^3$  unntatt  $z$ -aksen ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left[ \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right].$$

- a) Vis at  $\text{curl } \mathbf{F} = 0$ .  
 b) Regn ut arbeidet til  $\mathbf{F}$  rundt enhetssirkelen  $x^2 + y^2 = 1$  i  $xy$ -planet, i retning mot klokken sett ovenfra.  
 c) Hvorfor er ikke resultatene fra a) og b) i strid med teorem 8.5.3, 8.5.2 og 8.5.1 kombinert?

$C$  er orientert i retningen til parametriseringen  $(x(t), y(t))$ , så er

$$\int_C P dx + Q dy = \int_C P(x(t), y(t)) \cdot \frac{dx}{dt} dt + \int_C Q(x(t), y(t)) \cdot \frac{dy}{dt} dt.$$

**2.** La  $C \subseteq \mathbf{R}^2$  være enhetssirkelen  $x^2 + y^2 = 1$ , orientert mot klokken. Regn ut

a)  $\int_C x dx + y dy$



b)  $\int_C x^2 dx$

3. Finn kurveintegralet

$$\int_C x dy - y dx$$

der  $C$  er den rette linjen fra origo til punktet  $(1, 2, 1)$ , orientert i retning økende  $x$ .

4. Hvis  $\mathbf{F} = [P, Q, R]$  er et vektorfelt i  $\mathbf{R}^3$  med komponenter  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$  og  $R(x, y, z)$ , så skrives arbeidet  $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$  av  $\mathbf{F}$  langs kurven  $C$  ofte som

$$\int_C P dx + Q dy + R dz,$$

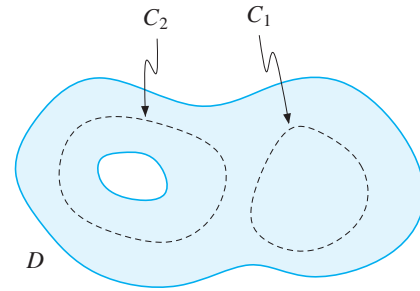
i full analogi med situasjonen i planet (oppgave 20). Igjen må  $\mathbf{T}$ -retningen langs  $C$  angis i tillegg, noe som kalles å *orientere* kurven  $C$ . Vis at hvis  $C$  er orientert i retningen gitt av parametriseringen  $(x(t), y(t), z(t))$ , så er

$$\begin{aligned} & \int_C P dx + Q dy + R dz \\ &= \int_C P(x(t), y(t), z(t)) \cdot \frac{dx}{dt} dt \\ & \quad + \int_C Q(x(t), y(t), z(t)) \cdot \frac{dy}{dt} dt \\ & \quad + \int_C R(x(t), y(t), z(t)) \cdot \frac{dz}{dt} dt. \end{aligned}$$

5. Betrakt kurven  $C$  fra eksempel 7.4.1 med parametrisering  $\mathbf{r}$ . Finn følgende kurveintegraler langs  $C$ , der orienteringen stemmer med  $\mathbf{r}$ :

- a)  $\int_C x^2 dx + y^2 dy + z^2 dz$
- b)  $\int_C x^2 dx$                       c)  $\int_C z^2 dy$
- d)  $\int_C z dy + z dz$

6. I denne oppgaven skal vi se på en generalisering av teorem 8.5.3. Jeg beskriver det hele litt intuitivt og omtrentlig. Et område  $D \subseteq \mathbf{R}^n$  kalles *enkelt sammenhengende* hvis enhver kontinuerlig, lukket kurve i  $D$  kan dras "kontinuerlig" sammen ("nøstes inn") til et punkt innenfor  $D$ . Figuren til høyre viser en region  $D$  i planet som ikke er enkelt sammenhengende. Kurven  $C_2$  som går rundt hullet i midten kan nemlig ikke trekkes sammen til et punkt. Kurven  $C_1$  kan derimot dras sammen. Intuitivt kan vi ut fra dette skjønne at en region  $D$  i planet er enkelt sammenhengende hvis den ikke har "hull".



I rommet er situasjonen litt annerledes. Hvis vi lar  $S$  være standardkulen  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ , og lar  $D$  være  $\mathbf{R}^3$  med  $S$  tatt bort, altså  $D = \mathbf{R}^3 \setminus S$ , så er  $D$  enkelt sammenhengende.

a) La  $D$  være  $\mathbf{R}^3$  med  $z$ -aksen tatt bort, dvs.  $D$  består av alle punkter  $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$  slik at enten  $x \neq 0$  eller  $y \neq 0$ . Er  $D$  enkelt sammenhengende? La  $\mathbf{F}$  være et vektorfelt. Fordi  $\text{curl}(\nabla f) = 0$  for alle skalarfunksjoner  $f$  (teorem 8.1.1), har vi følgende regler for alle regioner  $D$ . I rommet gjelder:

$$\begin{aligned} & \mathbf{F}(x, y, z) \text{ er } C^1 \text{ og konservativt på } D \\ & \quad \Leftrightarrow \\ & \quad \text{curl } \mathbf{F} = 0 \end{aligned}$$

I planet gjelder:

$$\begin{aligned} & \mathbf{F}(x, y) = [P, Q] \text{ er } C^1 \text{ og konservativt på } D \\ & \quad \Leftrightarrow \\ & \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \text{ på } D. \end{aligned}$$

Poenget er nå at hvis  $D$  er enkelt sammenhengende, gjelder disse to implikasjonene *motsatt vei også*. Dette gir oss en ganske nyttig generalisering av teorem 8.5.3.

b) Gitt vektorfeltet  $\mathbf{G}(x, y, z)$  definert i alle punkter  $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$  i rommet ved

$$\mathbf{G}(x, y, z) = -\frac{\gamma M}{r^2} \cdot \mathbf{e}_{rad},$$

der  $\gamma$  og  $M$  begge er positive konstanter, der

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

er avstanden fra  $(x, y, z)$  til origo, og

$$\mathbf{e}_{rad} = \frac{(x, y, z)}{r}$$

er enhetsvektoren som peker ut fra origo i retning av punktet  $(x, y, z)$ . I Newtons klassiske gravitasjonsteori kan  $\mathbf{G}$  tolkes som gravitasjonsfeltet generert av en punktmasse  $M$  plassert

i origo. Vis at  $\mathbf{G}$  er konservativt, og finn en potensialfunksjon for  $\mathbf{G}$ .

# Kapittel 9

## Reelle vektorrom

---

*Dette kapitlet bygger på kapitlene 1, 5 og 6 samt hele MIP.*

---

## 9.1 Aksiomatisering av reelle vektorrom

Lineæralgebraen i MIP kapittel 10 dreide seg om rommene  $\mathbf{R}^n$ . Elementene i  $\mathbf{R}^n$  kalte vi *vektorer*. Ved hjelp av vektorer og matriser studerte vi, blant annet, visse egenskaper ved lineære likningssystemer.

Nå viser det seg imidlertid at det finnes en rekke matematiske situasjoner der ting oppfører seg analogt med teorien vi har for lineæralgebra i  $\mathbf{R}^n$ . På det nåværende tidspunkt lønner det seg derfor å heve blikket litt og *generalisere* utgangspunktet for teorien vår. Istedenfor å si at teorien kun dreier seg om  $\mathbf{R}^n$ , kan vi like gjerne si ta den dreier seg om et vilkårlig matematisk "system" som har de samme grunnleggende egenskapene som  $\mathbf{R}^n$ . Et slikt matematisk system kalles et *vektorrom*. Ved å la teorien dreie seg om vektorrom generelt, oppnår vi at den dekker flere ulike ting samtidig.

Det vi skal gjøre, kalles gjerne å *aksiomatisere* teorien for vektorrom. Vi skal bygge opp hele teorien på grunnlag av 10 *aksiomer* som beskriver hvilke krav vi stiller til et matematisk system som skal kunne kalles et vektorrom. Alle resultater i teorien vår skal utledes på grunnlag av disse aksiomene alene.

### Definisjon 1 Reelle vektorrom

Et *reelt vektorrom* er en mengde  $V$  av objekter som kalles *vektorer*. På  $V$  skal det være definert to regneoperasjoner, nemlig **vektoraddisjon** (skrives  $+$ ) og **skalarmultiplikasjon** (skrives som vanlig gange, ofte uten gange-tegn). Disse to operasjonene skal oppfylle følgende 10 aksiomer for alle vektorer  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$  og alle skalarer  $r, s \in \mathbf{R}$ :

A1 Alle vektorsummer  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$  ligger i  $V$

A2 Alle skalarmultipliserte vektorer  $r\mathbf{u}$  ligger i  $V$

A3 Der fins en *nullvektor*  $\mathbf{0} \in V$  slik at  $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$

A4 For hver  $\mathbf{u} \in V$  fins en vektor  $-\mathbf{u} \in V$  slik at  $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ .

A5 Kommutativ lov:  $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

A6 Assosiativ lov:  $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$

A7 Assosiativ lov:  $r(s\mathbf{u}) = (rs)\mathbf{u}$

A8 Distributiv lov:  $r(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = r\mathbf{u} + r\mathbf{v}$

A9 Distributiv lov:  $(r + s)\mathbf{u} = r\mathbf{u} + s\mathbf{u}$

A10 Multiplikasjon med 1:  $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

De to første aksiomene denne definisjonen krever at vektorrommet  $V$  skal være *lukket* under de to regneoperasjonene: Det første sier at når vi legger sammen to vektorer i  $V$ , skal vi få en vektor i  $V$  som svar. Det andre sier at når vi ganger

en vektor i  $V$  med en skalar, skal vi få også få en vektor i  $V$ . Vektoren  $-\mathbf{u}$  omtalt i A4 kalles den *additive inverse* til vektoren  $\mathbf{v}$ . Hvis  $\mathbf{u}$  og  $\mathbf{v}$  er to vektorer, skriver vi  $\mathbf{u} + (-\mathbf{v})$  som  $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ . Dette *definierer* subtraksjon av vektorer i et generelt vektorrom.

Som tidligere nevnt, er "skalar" et synonym for tall. Grunnen til at man ofte bruker ordet skalar i denne sammenhengen, er at multiplikasjon av en vektor i  $\mathbf{R}^n$  med et tall "skalærer" lengden på vektoren. Vi lar vår generelle terminologi inspireres av dette. Betegnelsen *reelt* vektorrom henspiller på at skalarene vi opererer med er reelle tall.

Når jeg i resten av dette kapitlet bruker betegnelsen "vektorrom" uten noe mer forklaring, er det alltid underforstått at jeg mener et reelt vektorrom, i henhold til definisjonen forrige side. Her kommer noen eksempler på vektorrom.

**Eksempel 1** La  $V = \mathbf{R}^n$ , og la de to operasjonene definisjonen forrige side krever, være vanlig vektoraddisjon og vanlig multiplikasjon med tall for vektorer i  $\mathbf{R}^n$ . Da er alle aksiomene A1–A10 oppfylt (se teorem 10.0.0), så dette er et vektorrom. Skulle bare mangle, dette er jo modell-eksemplet vårt. ■

**Eksempel 2** La  $D$  være en mengde, og la  $V$  være mengden av alle reelle funksjoner definert på  $D$ , dvs. mengden av alle funksjoner  $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ . Hvis  $f, g \in V$  og  $r \in \mathbf{R}$ , definerer vi funksjonene  $f + g$  og  $rf$  ved

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{og} \quad (rf)(x) = r \cdot f(x)$$

for alle  $x \in D$ . Utstyrt med disse to operasjonene blir funksjonsmengden  $V$  et vektorrom. La oss sjekke det: A1 og A2 er oppfylt, for  $f + g$  og  $rf$  er funksjoner fra  $D$  til  $\mathbf{R}$ , dvs. de ligger i  $V$ . Som nullvektor  $\mathbf{0}$  kan vi velge funksjonen  $f$  gitt ved  $f(x) = 0$  for alle  $x \in D$ , og som funksjonen  $-f$  kan vi velge funksjonen definert ved  $(-f)(x) = -f(x)$  for alle  $x \in D$ . Da er A3 og A4 oppfylt. De resterende aksiomene følger direkte fra regler vi har for vanlig regning med reelle tall. Ergo er  $V$  et vektorrom. ■

**Eksempel 3** La  $n$  være et naturlig tall, og la  $P_n$  være mengden av alle polynomer

$$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

med reelle koeffisienter  $a_i$  og grad  $\leq n$ . Vi kan oppfatte polynomene i  $P_n$  som funksjoner fra  $\mathbf{R}$  til  $\mathbf{R}$  og definere vektorromsoperasjoner for dem akkurat som i forrige eksempel. A1 og A2 er fremdeles oppfylt, for hvis  $p$  og  $q$  er polynomer av grad  $\leq n$  og  $r \in \mathbf{R}$ , så er også  $p + q$  og  $rp$  polynomer av grad  $\leq n$ . Resten går som i forrige eksempel. Altså blir polynomrommet  $P_n$  et vektorrom. ■

**Eksempel 4** La  $P_\infty$  være mengden av alle polynomfunksjoner fra  $\mathbf{R}$  til  $\mathbf{R}$ , uansett grad. Igjen kan vi definere vektorromsoperasjoner slik som i eksempel 2, og dette gjør  $P_\infty$  til et vektorrom. ■

Vi skal se på en rekke andre eksempler på vektorrom i oppgavene til slutt i seksjonen. Merk at i eksempel 2 og 3 var vektorene i vektorrommet vårt *funksjoner*. I vår nye, generelle teori kan altså en vektor være noe ganske annet enn de vektorene vi er vant til fra  $\mathbf{R}^n$ .

### **Teorem 1 Egenskaper ved vektorrom**

La  $V$  være et vektorrom. Da gjelder følgende:

1. Den eneste vektoren  $\mathbf{x} \in V$  som oppfyller  $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$  for alle  $\mathbf{v} \in V$ , er vektoren  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .
2. Hvis  $\mathbf{v} \in V$  er gitt, så har likningen  $\mathbf{x} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$  den unike løsningen  $\mathbf{x} = -\mathbf{v}$  i vektorrommet  $V$ .
3. Hvis  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  og  $\mathbf{w}$  er vektorer i  $V$  slik at  $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ , så er  $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ .
4. For alle vektorer  $\mathbf{v} \in V$  gjelder at  $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$ .
5. For alle skalarer  $r \in \mathbf{R}$  gjelder at  $r\mathbf{0} = \mathbf{0}$ .
6. For alle  $r \in \mathbf{R}$  og  $\mathbf{v} \in V$  gjelder at  $(-r)\mathbf{v} = r(-\mathbf{v}) = -(r\mathbf{v})$ .

**Bevis** Det er viktig å merke seg at vi nå skal bevise dette for vektorrom generelt, ikke bare for tilfellet  $V = \mathbf{R}^n$ . Vi kan da kun bygge på aksiomene A1-A10 for vektorrom. Jeg beviser punkt 1 som eksempel, hvordan man viser de øvrige punktene er indikert i oppgave 9.1.4 ved slutten av seksjonen.

For å vise punkt 1, observer først at ved aksiom A3 er  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  en løsning av likningen  $\mathbf{v} + \mathbf{x} = \mathbf{v}$  for alle  $\mathbf{v} \in V$ . Vi må nå bevise at  $\mathbf{0}$  er den *eneste* vektoren i  $V$  med denne egenskapen. Vel, anta at  $\mathbf{v} + \mathbf{y} = \mathbf{v}$  for alle  $\mathbf{v} \in V$ . Med  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$  innsatt gir dette

$$\mathbf{0} + \mathbf{y} = \mathbf{0}. \tag{1}$$

Samtidig gir A3 at

$$\mathbf{y} + \mathbf{0} = \mathbf{y}. \tag{2}$$

Men ved den kommutative loven A5 er  $\mathbf{y} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{y}$ . Kombinerer du dette med (1) og (2), faller det ut at  $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ . ■

Notasjon: Hvis  $\mathbf{v}$  er en vektor og  $r$  er en skalar, så betyr  $r\mathbf{v}$  det samme som  $r\mathbf{v}$ . Og hvis  $r \neq 0$ , betyr  $\mathbf{v}/r$  det samme som  $(1/r)\mathbf{v}$ .

## Lineærkombinasjoner og basiser

Begrepet *lineærkombinasjon* i et generelt vektorrom  $V$  defineres analogt med definisjonen gitt for  $\mathbf{R}^n$  i seksjon MIP 10.13. En vektor  $\mathbf{x} \in V$  kalles en **lineærkombinasjon** av vektorene  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in V$  hvis det fins reelle tall  $a_1, \dots, a_k$  slik at

$$\mathbf{x} = a_1\mathbf{v}_1 + \dots + a_k\mathbf{v}_k.$$

Videre kalles en samling  $S \subseteq V$  av vektorer for *lineært avhengig* hvis det fins et endelig antall vektorer  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in S$  og reelle tall  $a_1, \dots, a_k$  der minst én av  $a$ -ene er ulik 0, slik at

$$a_1\mathbf{v}_1 + \dots + a_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

Hvis samlingen  $S$  ikke er lineært avhengig, kalles den *lineært uavhengig*. Dette er også analogt til definisjonene i seksjon MIP 10.13, med en liten vri: Vi åpner nå for at selve samlingen  $S$  kan bestå av uendelig mange vektorer. Det følger, jamfør seksjon MIP 10.13, at samlingen  $S$  er lineært avhengig hvis og bare hvis minst en av vektorene i  $S$  kan skrives som en lineærkombinasjon av noen av de øvrige vektorene i samlingen. Med *spennet*

$$\text{Sp}\{S\}$$

til samlingen  $S$  menes mengden av alle vektorer i  $V$  som kan skrives som en lineærkombinasjon av vektorer fra  $S$ .

### Teorem 2 Spennet er lukket

La  $V$  være et vektorrom, la  $S \subseteq V$ , og la  $U = \text{Sp}\{S\}$ . Hvis da  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in U$  og  $r \in \mathbf{R}$ , så er også  $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in U$  og  $r\mathbf{a} \in U$ .

**Bevis** Anta at  $\mathbf{a}$  og  $\mathbf{b}$  ligger i  $U$ . De kan da begge skrives som lineærkombinasjoner av vektorer fra samlingen  $S$ . Ved å utvide med ledd der skalarene er 0, kan vi skrive  $\mathbf{a}$  og  $\mathbf{b}$  som lineærkombinasjoner av de *samme* vektorene  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in S$ . Da har vi

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{v}_1 + \dots + a_k\mathbf{v}_k \quad \text{og} \quad \mathbf{b} = b_1\mathbf{v}_1 + \dots + b_k\mathbf{v}_k$$

for passende reelle tall  $a_i$  og  $b_i$ . Men nå er

$$\begin{aligned} \mathbf{a} + \mathbf{b} &= (a_1\mathbf{v}_1 + \dots + a_k\mathbf{v}_k) + (b_1\mathbf{v}_1 + \dots + b_k\mathbf{v}_k) \\ &= (a_1\mathbf{v}_1 + b_1\mathbf{v}_1) + \dots + (a_k\mathbf{v}_k + b_k\mathbf{v}_k) && \text{(ved A5, A6)} \\ &= (a_1 + b_1)\mathbf{v}_1 + \dots + (a_k + b_k)\mathbf{v}_k && \text{(ved A9)} \end{aligned}$$

Dette viser at  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  også er en lineærkombinasjon av  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ . Så  $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in U$ . Tilsvarende får vi at  $r\mathbf{a} \in U$ , siden

$$\begin{aligned} r\mathbf{a} &= r(a_1\mathbf{v}_1 + \dots + a_k\mathbf{v}_k) \\ &= r(a_1\mathbf{v}_1) + \dots + r(a_k\mathbf{v}_k) && \text{(ved A8)} \\ &= (ra_1)\mathbf{v}_1 + \dots + (ra_k)\mathbf{v}_k && \text{(ved A7) } \blacksquare \end{aligned}$$

**Definisjon 2 Basis for et vektorrom**

La  $V$  være et vektorrom. En samling  $S$  av vektorer i  $V$  kalles en **basis** for  $V$  hvis samlingen  $S$  er lineært uavhengig og  $V = \text{Sp}(S)$ .

Denne definisjonen stemmer med vår tidligere definisjon av basis i tilfellet  $V = \mathbf{R}^n$ . Vi kan imidlertid nå også snakke om basiser med uendelig mange basisvektorer. I oppgave 9.1.6 bes du om å begrunne at den uendelige samlingen

$$S = \{1, x, x^2, x^3, x^4, \dots\}$$

er en basis for vektorrommet  $P_\infty$  av reelle polynomer fra eksempel 4.

**Teorem 3 Unikhet av basiskoeffisienter**

La  $V$  være et vektorrom, og la  $B$  være en basis for  $V$ . Anta at vektoren  $\mathbf{v} \in V$  kan skrives

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + \dots + a_k\mathbf{v}_k \quad \text{og} \quad \mathbf{v} = b_1\mathbf{v}_1 + \dots + b_k\mathbf{v}_k$$

der vektorene  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  ligger i  $B$  og er de samme i begge uttrykkene. Da er  $a_i = b_i$  for alle  $1 \leq i \leq k$ .

**Bevis** Regning med utgangspunkt i antakelsen gir oss

$$\begin{aligned} a_1\mathbf{v}_1 + \dots + a_k\mathbf{v}_k &= b_1\mathbf{v}_1 + \dots + b_k\mathbf{v}_k \\ (a_1\mathbf{v}_1 - b_1\mathbf{v}_1) + \dots + (a_k\mathbf{v}_k - b_k\mathbf{v}_k) &= \mathbf{0} \\ (a_1 - b_1)\mathbf{v}_1 + \dots + (a_k - b_k)\mathbf{v}_k &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Siden  $B$  er en basis, er vektorene  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  lineært uavhengige. Ergo må samtlige parenteser i det siste uttrykket være 0. ■

**Definisjon 3 Dimensjon av vektorrom**

Et vektorrom sies å være *endeligdimensjonalt* hvis det har en basis bestående av endelig mange vektorer. Det minste antallet vektorer som forekommer i en basis for  $V$  kalles *dimensjonen* til  $V$ , og skrives ofte  $\dim(V)$ . Et vektorrom som ikke har noen basis med endelig mange vektorer, kalles *uendeligdimensjonalt*.

**Eksempel 5** Oppgave 9.1.6 i slutten av seksjonen viser at polynomrommet  $P_\infty$  er et uendeligdimensjonalt vektorrom. ■



**Teorem 4 Antall vektorer i en basis**

La  $V$  være et endeligdimensjonalt vektorrom. Da består alle basiser for  $V$  av samme antall vektorer, og dette antallet er dimensjonen til  $V$ .

**Bevis** Siden  $V$  har endelig dimensjon, vet vi at det finnes en basis for  $V$  bestående av endelig mange vektorer  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ . Per definisjon av begrepet basis er disse vektorene lineært uavhengige. For å vise teoremet, holder det derfor å vise at det umulig kan finnes vektorer  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$  med  $r < k$  som spenner ut  $V$ . Dette er gjort i beviset for teorem MIP 10.13.2, som fungerer uten modifikasjoner også i vår nye og mer generelle situasjon. ■

**Definisjon 4 Underrom**

Med et **underrom** av et vektorrom  $V$  menes en delmengde  $U \subseteq V$  som selv er et vektorrom under de to vektorromsoperasjonene i  $V$ .

At denne definisjonen stemmer med vår gamle fra seksjon MIP 10.13 når  $V = \mathbf{R}^n$ , fås fra teorem MIP 10.1.1 kombinert med de to neste teoremene.

**Teorem 5 Egenskaper ved underrom**

En delmengde  $U$  av et vektorrom  $V$  er et underrom av  $V$  hvis og bare hvis  $\mathbf{0} \in U$  og  $U$  er lukket under de to vektorromsoperasjonene i  $V$ , dvs. hvis vi for alle  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$  og alle  $r \in \mathbf{R}$  har at  $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in U$  og  $r\mathbf{u} \in U$ .

**Bevis** Anta at  $\mathbf{0} \in U$ , og at  $U$  er lukket under de to vektorromsoperasjonene. Da er A1, A2 og A3 oppfylt for  $U$ . At A5–A10 er oppfylt for  $U$  er klart, fordi  $U \subseteq V$ . Det gjenstår å vise at A4 er oppfylt. Ved lukketheten vet vi at hvis  $\mathbf{u} \in U$ , så er også vektoren  $(-1)\mathbf{u}$  med i  $U$ . Men ved teorem 15.1 punkt 6 og deretter A10 er  $(-1)\mathbf{u} = -(1\mathbf{u}) = -\mathbf{u}$ , så  $-\mathbf{u} \in U$ . Altså er også A4 oppfylt, så  $U$  er et underrom av  $V$ .

Omvendt, anta at  $U$  er et underrom av  $V$ . Ved A1 og A2 må da  $U$  være lukket under vektorromsoperasjonene, og ved A3 må  $\mathbf{0} \in U$ . ■

**Teorem 6 Underrom arver endelig dimensjon**

Hvis  $V$  er et vektorrom av endelig dimensjon  $r$  og  $U \subseteq V$  et underrom, så er  $U$  også endeligdimensjonalt, og  $\dim U \leq r$ .

**Bevis** Hvis  $U = \{\mathbf{0}\}$ , så er definitivt  $\dim U = 0 \leq \dim V$ . Ellers, la  $S$  være en samling lineært uavhengige vektorer i  $U$ . Hvis  $S$  ikke spenner ut  $U$ , finnes det minst én vektor i  $U$  som ikke er en lineærkombinasjon av vektorer fra  $S$ . Vi kan da utvide  $S$  med denne vektoren, og fortsatt vil  $S$  være lineært uavhengig.

Så lenge  $S$  ikke spenner ut  $U$ , kan vi på denne måten fortsette med å legge til nye vektorer fra  $U$  i den lineært uavhengige samlingen  $S$ . Anta at prosessen ikke stopper før vi har funnet  $r+1$  lineært uavhengige vektorer  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{r+1}$  i  $U$ . La  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$  være en basis for  $V$ . Da er vi i situasjonen fra beviset for teorem MIP 10.13.2 (med  $k = r+1$ ), og vi får en selvmotsigelse. Ergo må  $S$  spenne ut  $U$  senest når  $S$  har fått  $r$  vektorer, og det følger at  $U$  er endeligdimensjonalt med  $\dim U \leq r$ . ■

**Eksempel 6** Alle polynomrommene  $P_n$  fra eksempel 3 er underrom av det uendeligdimensjonale vektorrommet  $P_\infty$  fra eksempel 4. Grunnen er følgende: Alle rommene  $P_n$  inneholder nullvektoren  $\mathbf{0}$ , som er polynomet  $p$  gitt ved  $p(x) = 0$  for alle  $x \in \mathbf{R}$ . Videre er de lukket under vektorromsoperasjonene, og at de er underrom følger da fra teorem 9.1.5. I oppgave 9.1.5 blir du bedt om å vise at  $\{1, x, x^2, x^3, \dots, x^n\}$  er en basis for  $P_n$ . Det følger fra dette at  $P_n$  har dimensjon  $n+1$ . Altså:

Rommet  $P_0$  har dimensjon 1. Basis:  $\{1\}$

Rommet  $P_1$  har dimensjon 2. Basis:  $\{1, x\}$

Rommet  $P_2$  har dimensjon 3. Basis:  $\{1, x, x^2\}$

og så videre. For eksempel kan alle polynomer i rommet  $P_2$  skrives som lineærkombinasjoner av de tre basispolynomene  $p_0(x) = 1$ ,  $p_1(x) = x$  og  $p_2(x) = x^2$ . Et konkret eksempel:  $p(x) = 2 - 3x^2$  kan skrives

$$p(x) = 2p_0(x) + 0p_1(x) + (-3)p_2(x). \quad \blacksquare$$

### Teorem 7 Utvidelse til basis

Hvis  $S = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$  er en lineært uavhengig samling vektorer i et endeligdimensjonalt vektorrom  $V$ , så finnes det en basis for  $V$  der alle vektorene  $\mathbf{v}_i$  fra  $S$  er med.

**Bevis** Anta at  $S$  ikke utgjør en basis alene. Ved definisjon 9.1.2 kan da  $\text{Sp}(S)$  ikke være hele  $V$ . Ergo finnes det en vektor  $\mathbf{v} \in V$  slik at samlingen  $S \cup \{\mathbf{v}\}$  er lineært uavhengig. Hvis den nye samlingen fremdeles ikke er en basis, kan vi fortsette på samme måten og stadig utvide vår lineært uavhengige samling av vektorer. Men ved teorem 9.1.4 må prosessen stoppe når antall vektorer i

samlingen vår er blitt lik dimensjonen til vektorrommet  $V$ . Da er samlingen blitt en basis. ■

## 9.1 Oppgaver

**1.** Avgjør om den gitte funksjonsmengden er et vektorrom når vektoraddisjon og skalarmultiplikasjon foregår etter de vanlige reglene  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$  og  $(rf)(x) = rf(x)$ . Hvis mengden ikke er et vektorrom, så oppgi hvilke aksiomer som ikke holder.

- Mengden av alle funksjoner  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  som oppfyller  $f(5) = 0$ .
- Mengden av alle funksjoner  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  som oppfyller  $f(5) = 1$ .
- Mengden av alle polynomer med grad nøyaktig 3.
- Mengden av alle kontinuerlige funksjoner  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ .
- Mengden av alle funksjoner  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  som ikke er kontinuerlige.
- Mengden av alle deriverbare funksjoner  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  som oppfyller  $f(0) = f'(0) = 0$ .
- Mengden av alle begrensede funksjoner  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ .
- Alle funksjoner  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  som er løsninger av differensiallikningen  $y'' + 13y' + 5y = 0$  på hele  $\mathbf{R}$ .
- Alle funksjoner  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  som er løsninger av differensiallikningen  $y'' + 13y' + 5y = 1$  på hele  $\mathbf{R}$ .

**2.** Avgjør om mengden  $\mathbf{R}^2$  blir et vektorrom hvis vi utstyrer den med de oppgitte alternative definisjonene av vektoraddisjon og skalarmultiplikasjon. Hvis mengden ikke er et vektorrom, så oppgi hvilke aksiomer som ikke holder.

- $[x, y] + [z, w] = [x + z, y + w]$  og  $r[x, y] = [rx, 0]$
- $[x, y] + [z, w] = [x + w, y + z]$  og  $r[x, y] = [rx, ry]$
- $[x, y] + [z, w] = [2x + 2z, 2y + 2w]$  og  $r[x, y] = [rx, ry]$

**3.** Avgjør om den gitte matrisemengden er et vektorrom når vektoraddisjon og skalarmultiplikasjon defineres som henholdsvis vanlig matriseaddisjon og vanlig multiplikasjon av skalar med matrise. Hvis mengden ikke er et vektorrom, så oppgi hvilke aksiomer som ikke holder.

- Mengden av alle  $(2 \times 2)$ -matriser.
- Mengden av alle  $(m \times n)$ -matriser, der  $m$  og  $n$  er gitte naturlige tall.
- Mengden av alle invertible  $(3 \times 3)$ -matriser.
- Mengden av alle  $(3 \times 3)$ -matriser som har determinant 0.

e) Mengden av alle  $(2 \times 2)$ -matriser som har minst én reell egenverdi.

f) Mengden av alle såkalte *nullpotente*  $(2 \times 2)$ -matriser, dvs.  $(2 \times 2)$ -matriser  $M$  som oppfyller  $M^n = 0$  for minst ett naturlig tall  $n$ .

**4.** I denne oppgaven skal vi bevise punkt 2–6 fra teorem 9.1.1. La  $V$  være et vektorrom.

- Vis at hvis  $\mathbf{v} \in V$  er gitt, så har likningen  $\mathbf{x} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$  den unike løsningen  $\mathbf{x} = -\mathbf{v}$  i vektorrommet  $V$ .
- Vis at hvis  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  og  $\mathbf{w}$  er vektorer i  $V$  slik at  $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ , så er  $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ .
- Vis at for alle vektorer  $\mathbf{v} \in V$  gjelder at  $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$ .
- Vis at for alle skalarer  $r \in \mathbf{R}$  gjelder at  $r\mathbf{0} = \mathbf{0}$ .
- Vis at for alle  $r \in \mathbf{R}$  og  $\mathbf{v} \in V$  gjelder at  $(-r)\mathbf{v} = r(-\mathbf{v}) = -(\mathbf{rv})$ .

**5.** Vis at samlingen

$$S = \{1, x, x^2, x^3, \dots, x^n\}$$

er en basis for vektorrommet  $P_n$  av polynomer med grad  $n$  eller lavere. (Se eksempel 9.1.3.) Hva er dimensjonen til vektorrommet  $P_n$ ?

**6.** I denne oppgaven skal vi studere vektorrommet  $P_\infty$  fra eksempel 9.1.4.

a) Vis at samlingen

$$S = \{1, x, x^2, x^3, x^4, \dots\}$$

er en basis for  $P_\infty$ .

b) Vis at  $P_\infty$  er et uendeligdimensjonalt vektorrom.

**7.** La  $M$  være mengden bestående av katten Sushi. Mengden  $M$  har altså ett element. Vi definerer vektorromsoperasjoner på  $M$  ved å si at  $\text{Sushi} + \text{Sushi} = \text{Sushi}$ , og  $r \cdot \text{Sushi} = \text{Sushi}$  for alle reelle tall  $r$ . Avgjør om mengden  $M$  blir et vektorrom med disse operasjonene.

**8.** Avgjør om den gitte delmengden  $U$  er et underrom av det gitte vektorrommet  $V$ .

a)  $V$  er rommet  $P_\infty$  av alle polynomer, og  $U$  er mengden  $P_4$  av polynomer med grad høyst 4.

- b)  $V$  er rommet  $P_\infty$  av alle polynomer, og  $U$  er mengden bestående av nullpolynomet samt alle polynomer av grad minst 2.
- c)  $V$  er rommet  $P_\infty$  av alle polynomer, og  $U$  er mengden bestående av alle polynomer av grad enten 0 eller minst 3.
- d)  $V = \mathbf{R}^2$ , og  $U$  er mengden av punkter  $(x, y)$  som oppfyller  $y = 2x$ .
- e)  $V = \mathbf{R}^2$ , og  $U$  er mengden av punkter  $(x, y)$  som oppfyller  $y = 2x + 1$ .

9. La  $P_\infty$  være vektorrommet av alle polynomer. Vis at

$$\text{Sp}\{x + 1, x^2\} = \text{Sp}\{x^2 - 3, x\}$$

Hint: Vis at hvis et polynom kan skrives som en lineærkombinasjon av  $x + 1$  og  $x^2$ , så kan det også skrives som en lineærkombinasjon av  $x^2 - 3$  og  $x$ . Resonner så motsatt vei.

10. Avgjør om følgende samlinger av funksjoner i rommet  $P_\infty$  er lineært avhengige.

a)  $\{x, x^2 - 2x + 1, x^2\}$

b)  $\{x^4, x^3, x^2 + x^3 + x^4\}$

11. La  $P_3$  være vektorrommet av polynomer med grad høyst 3. Finn en basis for  $P_3$  der polynomene  $p(x) = x + x^2 + x^3$  og  $q(x) = x$  inngår.

## 9.2 Lineærtransformasjoner

I denne seksjonen skal vi generalisere begrepet *lineærtransformasjon* introdusert i seksjon MIP 10.14 til generelle vektorrom, og studere egenskapene til slike transformasjoner. Transformasjonene i seksjon MIP 10.14 gikk fra vektorrommet  $V = \mathbf{R}^n$  til vektorrommet  $W = \mathbf{R}^m$ , og var definert ved matriser. Vi generaliserer definisjonen ved å ta utgangspunkt i to egenskaper som våre matrisedefinerte transformasjoner har.

### Definisjon 1 Lineærtransformasjoner

Med en **lineærtransformasjon** fra et vektorrom  $V$  til et vektorrom  $W$  menes en funksjon  $T : V \rightarrow W$  som oppfyller de to kravene

$$\text{L1} \quad T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$$

$$\text{L2} \quad T(r\mathbf{u}) = r \cdot T(\mathbf{u})$$

for alle vektorer  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$  og alle skalarer  $r \in \mathbf{R}$ .

Det er viktig å tenke gjennom kravene som stilles til funksjonen  $T$ . Vektoren  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$  er summen av de to vektorene  $\mathbf{u}$  og  $\mathbf{v}$ , regnet ut etter addisjonen i vektorrommet  $V$ . Funksjonsverdien  $T(\mathbf{u} + \mathbf{v})$  i punktet  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$  skal være lik summen av de to vektorene  $T(\mathbf{u})$  og  $T(\mathbf{v})$ , regnet ut i henhold til vektoraddisjonen i vektorrommet  $W$ . På samme måte er  $r\mathbf{u}$  vektoren som fås ved å skalarmultiplisere  $\mathbf{u}$  med tallet  $r$  i vektorrommet  $V$ . Funksjonsverdien  $T(r\mathbf{u})$  skal være lik vektoren man får ved å gange  $r$  ved  $T(\mathbf{u})$  i henhold til skalarmultiplikasjonen i vektorrommet  $W$ .

Når du i det følgende leser den generelle teorien for lineærtransformasjoner, er det lurt å bruke matrisetransformasjoner fra  $V = \mathbf{R}^n$  til  $W = \mathbf{R}^m$  som

guide for intuisjonen. Her er imidlertid et eksempel som viser at den generelle teorien samtidig dekker helt andre situasjoner.

**Eksempel 1** La  $P_\infty$  være vektorrommet av reelle polynomer introdusert i eksempel 15.1.4. Da er funksjonen  $T : P_\infty \rightarrow P_\infty$  definert ved

$$T(p) = p' \quad (p' = \text{den deriverte av } p)$$

en lineærtransformasjon fra  $P_\infty$  inn i seg selv. For alle elementene i  $P_\infty$  er deriverbare, og ved vanlige derivasjonsregler er

$$T(p + q) = (p + q)' = p' + q' = T(p) + T(q)$$

$$\text{og} \quad T(rp) = (rp)' = r \cdot p' = r \cdot T(p)$$

for alle  $p, q \in P_\infty$  og alle reelle skalarer  $r$ . For eksempel er

$$T(x^2 + 3x) = 2x + 3 = T(x^2) + T(3x)$$

$$\text{og} \quad T(7x^5) = 7 \cdot 5x^4 = 7 \cdot T(x^5). \quad \blacksquare$$

### Teorem 1 En generell linearitetsegenskap

La  $T : V \rightarrow W$  være en lineærtransformasjon, la  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  være vektorer i  $V$  og la  $r_1, \dots, r_n$  være skalarer. Da er

$$T(r_1\mathbf{v}_1 + r_2\mathbf{v}_2 + \dots + r_n\mathbf{v}_n) = r_1T(\mathbf{v}_1) + r_2T(\mathbf{v}_2) + \dots + r_nT(\mathbf{v}_n).$$

**Bevis** Dette skal vi vise ved på  $n$ . For  $n = 1$  sier påstanden i teoremet

$$T(r_1\mathbf{v}) = r_1T(\mathbf{v}).$$

Dette følger direkte fra L2 i definisjonen 9.2.1 av en lineærtransformasjon. Anta nå at påstanden i teoremet holder for  $n = k$ , altså at

$$T(r_1\mathbf{v}_1 + \dots + r_k\mathbf{v}_k) = r_1T(\mathbf{v}_1) + \dots + r_kT(\mathbf{v}_k).$$

La  $\mathbf{u} = r_1\mathbf{v}_1 + \dots + r_k\mathbf{v}_k$  og  $\mathbf{w} = r_{k+1}\mathbf{v}_{k+1}$ . Da får vi

$$\begin{aligned} T(r_1\mathbf{v}_1 + \dots + r_k\mathbf{v}_k + r_{k+1}\mathbf{v}_{k+1}) &= T(\mathbf{u} + \mathbf{w}) \\ &= T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{w}) \end{aligned} \quad (\text{ved L1})$$

$$\begin{aligned} &= T(\mathbf{u}) + T(r_{k+1}\mathbf{v}_{k+1}) \\ &= T(\mathbf{u}) + r_{k+1}T(\mathbf{v}_{k+1}) \end{aligned} \quad (\text{ved L2})$$

Men ved induksjonshypotesen vet vi at

$$T(\mathbf{u}) = T(r_1\mathbf{v}_1 + \cdots + r_k\mathbf{v}_k) = r_1T(\mathbf{v}_1) + \cdots + r_kT(\mathbf{v}_k).$$

Setter du dette inn for  $T(\mathbf{u})$  i den forrige likningen vi utledet, får du påstanden i teoremet for  $n = k + 1$ . ■

### Teorem 2 Bevaring av null og subtraksjon

La  $T : V \rightarrow V'$  være en lineærtransformasjon, og la  $\mathbf{u}$  og  $\mathbf{v}$  være vektorer i  $V$ . Da gjelder

1.  $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}'$
2.  $T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v})$

der  $\mathbf{0}$  er nullelementet i  $V$  og  $\mathbf{0}'$  er nullelementet i  $V'$ .

**Bevis** (1) Vi bruker  $r = 0$  og  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$  i teorem 9.1.1 og L2:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{0}) &= T(0\mathbf{0}) && \text{(ved teorem 9.1.1 punkt 4)} \\ &= 0T(\mathbf{0}) && \text{(ved L2)} \\ &= \mathbf{0}' && \text{(ved teorem 9.1.1 punkt 4)} \end{aligned}$$

(2) Her bruker vi L1, og L2 med  $r = -1$ :

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) &= T(\mathbf{u} + (-1)\mathbf{v}) && \text{(definisjon av subtraksjon)} \\ &= T(\mathbf{u}) + T((-1)\mathbf{v}) && \text{(ved L1)} \\ &= T(\mathbf{u}) + (-1)T(\mathbf{v}) && \text{(ved L2)} \\ &= T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v}). && \text{(definisjon av subtraksjon) } \blacksquare \end{aligned}$$

### Teorem 3 Basisvektorenes skjebne bestemmer transformasjonen

La  $T : V \rightarrow W$  være en lineærtransformasjon, og la  $B$  være en basis for  $V$ . Da er transformasjonsverdien  $T(\mathbf{u})$  for en vilkårlig vektor  $\mathbf{u} \in V$  entydig bestemt av transformasjonens verdier  $T(\mathbf{b})$  på vektorene  $\mathbf{b}$  i basisen  $B$ . Med andre ord: Hvis to lineærtransformasjoner fra  $V$  til  $W$  har samme verdier på alle vektorer i basisen  $B$ , så har de samme verdier på alle vektorer  $\mathbf{u} \in V$ , og de er dermed like.

**Bevis** La  $T$  og  $T'$  være to lineærtransformasjoner fra  $V$  til  $W$ , og anta at de har samme verdier på alle vektorer  $\mathbf{b}$  i basisen  $B$ . La  $\mathbf{u} \in V$  være en vilkårlig

vektor. Siden  $B$  er en basis for  $V$ , finnes det vektorer  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  fra  $B$  og skalarer  $r_1, \dots, r_k$  slik at

$$\mathbf{u} = r_1 \mathbf{b}_1 + r_2 \mathbf{b}_2 + \dots + r_k \mathbf{b}_k.$$

Dette gir

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u}) &= T(r_1 \mathbf{b}_1 + r_2 \mathbf{b}_2 + \dots + r_k \mathbf{b}_k) \\ &= r_1 T(\mathbf{b}_1) + r_2 T(\mathbf{b}_2) + \dots + r_k T(\mathbf{b}_k) && \text{(ved teorem 9.2.1)} \\ &= r_1 T'(\mathbf{b}_1) + r_2 T'(\mathbf{b}_2) + \dots + r_k T'(b_k) && \text{(ved antakelsen)} \\ &= T'(r_1 \mathbf{b}_1 + r_2 \mathbf{b}_2 + \dots + r_k \mathbf{b}_k) && \text{(ved teorem 9.2.1)} \\ &= T'(\mathbf{u}). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

## 9.2 Oppgaver

1. Avgjør om den oppgitte avbildningen  $T$  er en lineærtransformasjon.

- La  $V$  være polynomrommet  $P_4$ , og la  $T : V \rightarrow V$  være gitt ved at  $T(p) = p'$  er den deriverte av polynomet  $p$ .
- La  $V$  være vektorrommet av alle deriverbare funksjoner fra  $\mathbf{R}$  til  $\mathbf{R}$ , og la  $T : V \rightarrow V$  være gitt ved  $T(f) = 4f' + 3f$ .
- La  $V$  være vektorrommet av alle deriverbare funksjoner fra  $\mathbf{R}$  til  $\mathbf{R}$ , og la  $T : V \rightarrow V$  være gitt ved  $T(f) = f' + 1$ .
- La  $V = \mathbf{R}^3$ , la  $W = \mathbf{R}^2$ , og la  $T : V \rightarrow W$  være gitt ved  $T(x, y, z) = (x, y)$ .

2. La  $V$  være vektorrommet av alle kontinuerlige funksjoner  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ . La  $c$  være et fiksert reelt tall, og definer avbildningen  $T : V \rightarrow V$  ved at funksjonen  $T(f)$  oppfyller

$$T(f)(x) = \int_c^x f(t) dt$$

for alle reelle tall  $x$ . Vis at  $T$  er en lineærtransformasjon.

3. La  $V$  være et vektorrom, og definer avbildningen  $T : V \rightarrow \mathbf{R}$  ved at  $T(\mathbf{v}) = 0$  for alle  $\mathbf{v} \in V$ . Vis at  $T$  er en lineærtransformasjon.

## 9.3 Kjerne, rekkevidde og inverse

La  $T : V \rightarrow W$  være en lineærtransformasjon. I samsvar med generell funksjonsterminologi kalles  $T$  for *injektiv* (eller *en-til-en*) hvis det ikke finnes to ulike vektorer  $\mathbf{u}$  og  $\mathbf{v}$  i  $V$  slik at  $T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v})$ . Videre sies  $T$  å være *surjektiv* hvis verdimengden til  $T$  er hele  $W$ . Ofte brukes begrepet “på” som synonym for “surjektiv”. Isteden for å si at  $T$  er surjektiv, sier man da at  $T$  er *på* vektorrommet  $W$ , eller bare at  $T$  er “på”.

Hvis  $D$  er en vilkårlig delmengde av  $V$ , så kaller vi

$$T(D) = \{T(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in D\}$$

for **bildet** av mengden  $D$  under transformasjonen  $T$ . Verdimgden til transformasjonen  $T$  er bildet  $T(V)$  av hele  $V$ , denne kalles kort og godt *bildet* til  $T$ .

Bildet til  $T$  kalles også *rekkevidden* til  $T$ , og det er vanlig å skrive den  $R(T)$ .  
Altså

$$R(T) = T(V) = \{T(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in V\}.$$

Videre har vi følgende definisjon, som jeg spanderer en boks på:

### Definisjon 1 Kjernen

Med *kjernen* til en lineærtransformasjon  $T : V \rightarrow W$  menes mengden av alle vektorer i  $V$  som avbildes på nullelementet  $\mathbf{0}$  i rommet  $W$ . Kjernen til  $T$  skrives  $\ker(T)$ . Altså

$$\ker(T) = \{\mathbf{v} \in V \mid T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}.$$

Vi har tidligere også vært innom begrepet *sammensetning* av funksjoner. Neste teorem viser at sammensetningen av to lineærtransformasjoner blir en ny lineærtransformasjon.

### Teorem 1 Sammensetning av lineærtransformasjoner

Hvis  $T_1 : V \rightarrow V_1$  er en lineærtransformasjon fra  $V$  til  $V_1$ , og  $T_2 : V_1 \rightarrow V_2$  er en lineærtransformasjon videre fra  $V_1$  til  $V_2$ , så vil også den sammensatte avbildningen

$$T_2 \circ T_1 : V \rightarrow V_2$$

definert ved

$$(T_2 \circ T_1)(\mathbf{v}) = T_2(T_1(\mathbf{v})) \quad \text{for alle } \mathbf{v} \in V$$

være en lineærtransformasjon.

**Bevis** Vi skal sjekke at L1 og L2 i definisjon 9.2.1 holder. Hvis  $\mathbf{u}$  og  $\mathbf{v}$  er vektorer i  $V$ , så er

$$\begin{aligned} (T_2 \circ T_1)(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= T_2(T_1(\mathbf{u} + \mathbf{v})) \\ &= T_2(T_1(\mathbf{u}) + T_1(\mathbf{v})) && \text{(fordi } T_1 \text{ er lineær)} \\ &= T_2(T_1(\mathbf{u})) + T_2(T_1(\mathbf{v})) && \text{(fordi } T_2 \text{ er lineær)} \\ &= (T_2 \circ T_1)(\mathbf{u}) + (T_2 \circ T_1)(\mathbf{v}). \end{aligned}$$

Dermed er L1 oppfylt. Hvis  $r$  er en skalar, fås tilsvarende

$$\begin{aligned} (T_2 \circ T_1)(r\mathbf{u}) &= T_2(T_1(r\mathbf{u})) = T_2(rT_1(\mathbf{u})) \\ &= rT_2(T_1(\mathbf{u})) = r(T_2 \circ T_1)(\mathbf{u}). \end{aligned}$$



Dermed er  $L2$  oppfylt også, så  $T_2 \circ T_1$  er en lineærtransformasjon. ■

Sammensetningen  $T_2 \circ T_1$  av  $T_1$  og  $T_2$  kalles også *komposisjonen* av transformasjonene  $T_1$  og  $T_2$ . Vi bruker altså den lille sirkelen  $\circ$  til å betegne sammensetning. Legg merke til at i uttrykket  $T_2 \circ T_1$  er det transformasjonen som representerer “siste etappe”, altså  $T_2$ , som står lengst til venstre. Denne notasjonsrekkefølgen er valgt fordi  $T_2$  står lengst til venstre i uttrykket  $T_2(T_1(\mathbf{v}))$ ; den transformasjonen som skal virke sist må stå ytterst.

Med **identitetstransformasjonen** på et vektorrom  $V$  mener man den transformasjonen  $T$  som ikke gjør noen ting, det vil si som oppfyller  $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$  for alle  $\mathbf{v} \in V$ .

Det er også praktisk å innføre en skrivemåte for å sette sammen den samme transformasjonen med seg selv flere ganger etter hverandre. Hvis  $T : V \rightarrow V$  er en lineærtransformasjon fra et vektorrom  $V$  inn i seg selv, definerer vi

$$T^2 = T \circ T$$

$$T^3 = T \circ T^2 = T \circ (T \circ T)$$

og så videre. Transformasjonen  $T^n$  tilsvarer altså å bruke transformasjonen  $T$  om igjen  $n$  ganger etter hverandre.

### Definisjon 2 Invertible lineærtransformasjoner

La  $V$  og  $W$  være vektorrom. En lineærtransformasjon  $T : V \rightarrow W$  kalles *invertibel* hvis det fins en lineærtransformasjon

$$T^{-1} : W \rightarrow V$$

slik at  $T \circ T^{-1}$  er identitetstransformasjonen på  $W$  og  $T^{-1} \circ T$  er identitetstransformasjonen på  $V$ . I så fall kalles de to transformasjonene  $T$  og  $T^{-1}$  for *inverse* av hverandre.

Hvis  $T : V \rightarrow W$  er en lineærtransformasjon og  $W'$  er en delmengde av  $W$ , så er **inversbildet**  $T^{-1}(W')$  av  $W'$  under  $T$  definert ved

$$T^{-1}(W') = \{\mathbf{v} \in V \mid T(\mathbf{v}) \in W'\}.$$

Med andre ord: Inversbildet  $T^{-1}(W')$  består av alle vektorer i  $V$  som  $T$  avbilder inn i  $W'$ . Merk at dette begrepet er definert uavhengig av om  $T$  har en invers transformasjon  $T^{-1}$  eller ei: Vi bruker skrivemåten  $T^{-1}(W')$  om inversbilder uansett. Hvis  $T$  er inverterbar, kan inversbildet også beskrives ved

$$T^{-1}(W') = \{T^{-1}(\mathbf{w}) \mid \mathbf{w} \in W'\}.$$

Hvis  $T$  ikke er inverterbar, er uttrykket  $T^{-1}(\mathbf{w})$ , der  $\mathbf{w}$  er en enslig vektor i  $W'$ , ikke definert. Likevel vil inverbildet  $T^{-1}(\{\mathbf{w}\})$  være definert; dette er mengden av alle  $\mathbf{v} \in V$  slik at  $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$ . Hvis  $T$  ikke er en-til-en, og dermed ikke inverterbar, kan dette inversbildet bestå av flere elementer.

### **Teorem 2    Bevaring av underrom**

La  $T : V \rightarrow W$  være en lineærtransformasjon. Da gjelder:

1. Hvis  $V'$  er et underrom av  $V$ , så er  $T(V')$  et underrom av  $W$ .
2. Hvis  $W'$  er et underrom av  $W$ , så er inversbildet  $T^{-1}(W')$  et underrom av  $V$ .

**Bevis** (1) Ved teorem 9.2.2 punkt 1 vet vi at  $T$  avbilder nullelement på nullelement. Ergo er nullelementet i  $W$  med i  $T(V')$ . Ved teorem 9.1.5 trenger vi derfor bare vise at  $T(V')$  er lukket under vektoraddisjon og multiplikasjon med skalarer. Vel, la  $T(\mathbf{u})$  og  $T(\mathbf{v})$  være vilkårlige vektorer i  $T(V')$ , der  $\mathbf{u}$  og  $\mathbf{v}$  er vektorer i  $V'$ , og la  $r$  være en skalar. Da har vi

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) &= T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \\ rT(\mathbf{u}) &= T(r\mathbf{u}) \end{aligned}$$

Dette viser at vektorene  $T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$  og  $rT(\mathbf{u})$  også er med i  $T(V')$ , og beviset er ferdig.

(2) Siden  $T$  avbilder  $\mathbf{0}$  på  $\mathbf{0}$ , er  $\mathbf{0} \in T^{-1}(W')$ . Ergo trenger vi ved teorem 9.1.5 bare sjekke at  $T^{-1}(W')$  er lukket under vektoraddisjon og multiplikasjon med skalarer. La  $\mathbf{u}$  og  $\mathbf{v}$  være vektorer i  $T^{-1}(W')$ , og la  $r$  være en skalar. Da ligger  $T(\mathbf{u})$  og  $T(\mathbf{v})$  i  $W'$ , og siden  $W'$  per antakelse er et underrom av  $W$ , ligger også vektoren  $T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$  der. Men

$$T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{u} + \mathbf{v}),$$

noe som viser at  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$  ligger i  $T^{-1}(W')$ . På samme måte får vi at  $rT(\mathbf{u})$  ligger i  $W'$ . Siden  $rT(\mathbf{u}) = T(r\mathbf{u})$ , følger det at  $r\mathbf{u}$  ligger i  $T^{-1}(W')$ . ■

### **Korollar 3    Kjernen og rekkevidden er underrom**

La  $T : V \rightarrow W$  være en lineærtransformasjon. Da er kjernen  $\ker(T)$  et underrom av  $V$ , og rekkevidden  $R(T)$  er et underrom av  $W$ .

**Bevis** Vi vet at  $\{\mathbf{0}\}$  er et underrom av  $W$ , og ved teorem 9.3.2 punkt 2 er dermed

$$\ker(T) = T^{-1}(\{\mathbf{0}\})$$

et underrom av  $V$ . Videre er  $V$  et underrom av seg selv, og ved teorem 9.3.2 punkt 1 er dermed  $R(T) = T(V)$  et underrom av  $W$ . ■

### Definisjon 3 Rangen til en lineæravbildning

Med *rangen* til en lineæravbildning  $T : V \rightarrow W$  menes dimensjonen til kjernen  $\ker(T)$ .

La  $T : V \rightarrow W$  være en lineærtransformasjon. Da er kjernen  $\ker(T)$  løsningsmengden til likningen

$$T(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \quad (1)$$

med ukjent  $\mathbf{v} \in V$ . Denne likningen kaller vi den *homogene likningen* definert av transformasjonen  $T$ . Hvis vi erstatter nullelementet  $\mathbf{0}$  fra  $W$  med en vektor  $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$  fra  $W$ , får vi likningen

$$T(\mathbf{v}) = \mathbf{b}. \quad (2)$$

Dette kaller vi en *inhomogen* likning. Neste teorem viser at hvis vi kan finne løsningsmengden til den homogene likningen (1) og i tillegg en konkret vektor  $\mathbf{v}$  som passer i den inhomogene likningen (2), så kan vi også finne løsningsmengden av (2).

### Teorem 4 Løsningsmengde til inhomogene likninger

La  $T : V \rightarrow W$  være en lineærtransformasjon, og la  $\mathbf{b}$  være en gitt vektor i  $W$ . Anta at  $\mathbf{a}$  er en konkret vektor i  $V$  som er slik at  $T(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$ . Da er løsningsmengden  $L$  til likningen  $T(\mathbf{v}) = \mathbf{b}$  med ukjent  $\mathbf{v}$  gitt ved

$$L = \{\mathbf{a} + \mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in \ker(T)\}.$$

**Bevis** Anta at  $T(\mathbf{v}) = \mathbf{b}$ . Da er

$$T(\mathbf{v} - \mathbf{a}) = T(\mathbf{v}) - T(\mathbf{a}) = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0},$$

så vektoren  $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{a}$  ligger i  $\ker(T)$ . Vi har da  $\mathbf{v} = \mathbf{a} + \mathbf{u}$ , så  $\mathbf{v}$  ligger i mengden  $L$  fra teoremet. Omvendt, anta at  $\mathbf{u} \in L$ . Da er

$$T(\mathbf{a} + \mathbf{u}) = T(\mathbf{a}) + T(\mathbf{u}) = \mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{b},$$

noe som viser at vektoren  $\mathbf{a} + \mathbf{u}$  er en løsning av likningen  $T(\mathbf{v}) = \mathbf{b}$ . ■

**Korollar 5 Kjerner og injektivitet**

La  $T : V \rightarrow W$  være en lineærtransformasjon. Følgende to utsagn er ekvivalente.

1.  $T$  er injektiv (en-til-en).
2.  $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$ .

**Bevis** (1) $\Rightarrow$ (2). Hvis  $T$  er injektiv, har likningen  $T(\mathbf{v}) = \mathbf{b}$  høyst én løsning for hver gitt  $\mathbf{b} \in W$ . Ved teorem 9.3.4 må da mengden

$$\{\mathbf{a} + \mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in \ker(T)\}$$

bestå av høyst ett element. Eneste mulighet er i så fall at  $\ker(T)$  kun inneholder vektoren  $\mathbf{0}$ .

(2) $\Rightarrow$ (1). Omvendt, hvis  $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$  består mengden  $\{\mathbf{a} + \mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in \ker(T)\}$  nevnt i teorem 9.3.4 av kun ett element. Det følger fra teorem 9.3.4 at likningen  $T(\mathbf{v}) = \mathbf{b}$  har høyst én løsning. Dermed er  $T$  injektiv. ■

**Teorem 6 En betingelse for invertibilitet**

En lineærtransformasjon  $T : V \rightarrow W$  er inverterbar hvis og bare hvis den er injektiv og surjektiv på  $W$ .

**Bevis** Det er opplagt at  $T$  har en invers *funksjon*

$$T^{-1} : W \rightarrow V$$

hvis og bare hvis den er injektiv (en-til-en) og surjektiv (verdimengden er hele  $W$ ). Det vi må vise, er bare at dersom  $T$  har en slik invers funksjon  $T^{-1}$ , så er den inverse faktisk en lineærtransformasjon. Vi skal gjøre dette ved å vise at  $T^{-1}$  tilfredsstillter L1 og L2 i definisjon 9.2.1.

La  $\mathbf{w}$  og  $\mathbf{w}'$  være to vilkårlige vektorer i  $W$ , og la  $r$  være en vilkårlig skalar. Vi kan skrive  $\mathbf{w} = T(\mathbf{v})$  og  $\mathbf{w}' = T(\mathbf{v}')$ . Dette gir

$$\begin{aligned} T^{-1}(\mathbf{w} + \mathbf{w}') &= T^{-1}(T(\mathbf{v}) + T(\mathbf{v}')) \\ &= T^{-1}(T(\mathbf{v} + \mathbf{v}')) \\ &= \mathbf{v} + \mathbf{v}' = T^{-1}(\mathbf{w}) + T^{-1}(\mathbf{w}'), \end{aligned}$$

så L1 er oppfylt. På samme måte får vi at L2 er oppfylt:

$$T^{-1}(r\mathbf{w}) = T^{-1}(rT(\mathbf{v})) = T^{-1}(T(r\mathbf{v})) = r\mathbf{v} = rT^{-1}(\mathbf{w}). \quad \blacksquare$$

Ved å sette de to uttrykkene vi nå har for  $\mathbf{x}$  inn i likningen  $\mathbf{x} - \mathbf{x} = \mathbf{0}$ , får vi

$$r_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + r_m \mathbf{v}_m - c_1 \mathbf{u}_1 - \cdots - c_n \mathbf{u}_k = \mathbf{0}.$$

Men dette viser at vektorene i basisen (1) er lineært avhengige, noe som gir en selvmotsigelse. Ergo har vi vist at vektorene i (2) er lineært uavhengige. Det følger nå fra definisjon 9.1.2 at de utgjør en basis for  $R(T)$ . ■

### 9.3 Oppgaver

**1.** Finn kjernen  $\ker(T)$  og rekkevidden  $R(T)$  til følgende lineærtransformasjoner, og avgjør i hvert tilfelle om transformasjonen er injektiv, surjektiv og/eller inverterbar. Angi også dimensjonene til  $\ker(T)$  og  $R(T)$ .

- Transformasjonen  $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$  gitt ved  $T(x, y, z) = (x, y)$ .
- Transformasjonen  $T : P_\infty \rightarrow P_\infty$  gitt ved  $T(f) = 2f$ .
- Transformasjonen  $T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$  gitt ved  $T(x, y) = (x, y, 0)$ .
- Transformasjonen  $T : P_\infty \rightarrow P_\infty$  gitt ved  $T(f) = f'$ .
- Transformasjonen  $T : P_4 \rightarrow P_4$  gitt ved  $T(f) = f'$ .

**2.** La  $T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$  være en lineærtransformasjon gitt ved multiplikasjon med en matrise  $M$  i standardbasis, slik som i seksjon 10.0.0.

- Vis at dimensjonen til rekkevidden  $R(T)$  det samme som rangen til  $M$ .
- Vis at kjernen til  $T$  er det samme som løsningsmengden til likningssystemet  $M\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , der  $\mathbf{x}$  er en ukjent vektor i  $\mathbf{R}^n$  og  $\mathbf{0}$  er nullvektoren i  $\mathbf{R}^m$ .
- Bruk rangteoremet 9.3.7 til å formulere en sammenheng mellom rangen til  $M$  og antall frie parametre i den generelle løsningen av likningssystemet  $M\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

**3.** Et homogent, lineært likningssystem med  $m$  likninger og  $n$  ukjente kan som kjent skrives på matriseformen

$$M\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad (1)$$

der  $M$  er en  $(m \times n)$ -matrise.

- Vis at løsningsmengden til likningssystemet er et underrom av  $\mathbf{R}^n$ . Dette underrommet kalles for *løsningsrommet* til det homogene likningssystemet.
- La  $T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$  være lineærtransformasjonen definert ved  $T(\mathbf{x}) = M \cdot \mathbf{x}$ . Hvilken sammenheng er det mellom løsningsrommet til likningssystemet (1) og kjernen til  $T$ ?

**4.** Et lineært likningssystem med  $m$  likninger og  $n$  ukjente kan skrives på matriseformen

$$M\mathbf{x} = \mathbf{b}. \quad (1)$$

- Anta at  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$  er en basis for kjernen til  $M$ , dvs. en basis for lineærtransformasjonen fra  $\mathbf{R}^n$  til  $\mathbf{R}^m$  gitt ved multiplikasjon med  $M$ . Vis at hvis  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p$  er en spesiell løsning av (1), så kan den generelle løsningen av (1) skrives

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + c_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + c_k \mathbf{v}_k$$

der  $c_1, \dots, c_k$  er skalarer.

- Skriv den generelle løsningen av likningssystemene i oppgave 10.2.2 på formen fra a).

**5.** Finn en basis for kjernen til lineæravbildningen  $T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$  gitt ved følgende matriser  $M$ . (Hint: Hvis du har gjort oppgavene det refereres til før, kan du spare mye arbeid!)

- $M$  er koeffisientmatrisen til likningssystemet i oppgave MIP 10.4.3b.
- $M$  er koeffisientmatrisen til likningssystemet i oppgave MIP 10.4.5b.
- $M$  er koeffisientmatrisen til likningssystemet i oppgave MIP 10.4.5c.

**6.** Finn en basis for løsningsrommet til det homogene likningssystemet som fremkommer fra eksempel 10.2.2 når de tre tallene på høyre side erstattes med 0.

**7.** La  $V$  være vektorrommet av funksjoner  $y : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  som har kontinuerlig annenderivert, og la  $W$  være vektorrommet av kontinuerlige funksjoner fra  $\mathbf{R}$  til  $\mathbf{R}$ . I denne oppgaven skal vi omformulere resultatene fra oppgavene 7.8.8–7.8.12. I hver av disse oppgavene er oppgitt en differensiallikning på formen

$$ay'' + by' + cy = f,$$

der  $a, b, c$  er reelle tall og  $f$  er en funksjon.

- a) For hver av 7.8.8–7.8.12, definer avbildningen  $T : V \rightarrow W$  ved  $T(y) = ay'' + by' + cy$ . Vis at  $T$  er en lineærtransformasjon.
- b) Finn, for hver av oppgavene, en basis for kjernen til  $T$ . Finn dimensjonen til kjernen.
- c) Skriv i hvert av tilfellene den generelle løsningen av likningen  $T(y) = f$  på formen  $\mathbf{y} = \mathbf{y}_s + c_1\mathbf{u}_1 + \dots + c_n\mathbf{u}_k$ , der

$\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$  er en basis for kjernen til  $T$ .

**8.** La  $T : V \rightarrow V$  være en lineærtransformasjon fra et vektorrom  $V$  inn i seg selv.

a)  $T \circ (T \circ T) = (T \circ T) \circ T$ .

b) Vis at for alle naturlige tall  $n, \geq 1$  er

$$T^{n+m} = T^n \circ T^m \quad \text{og} \quad (T^n)^m = T^{nm}$$

## 9.4 Basiser og koordinatvektorer

La  $V$  være et vektorrom av endelig dimensjon  $n$ . Per definisjon av begrepet dimensjon har da  $V$  en basis

$$B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$$

bestående av  $n$  vektorer. Vi skal nå bruke basisen  $B$  til å organisere vektorrommet  $V$ . Hvis  $\mathbf{v}$  er et vilkårlig element i  $V$ , så kan det ved teorem 9.1.3 uttrykkes

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \dots + a_n\mathbf{u}_n$$

der skalarene  $a_i$  er entydig bestemt. Vi uttrykker nå dette ved å si at *koordinatvektoren*  $[\mathbf{v}]_B$  til  $\mathbf{v}$  i basisen  $B$  er gitt ved

$$[\mathbf{v}]_B = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = [a_1, a_2, \dots, a_n].$$

På denne måten vil alle elementer i vektorrommet få hver sin koordinatvektor i basisen  $B$ . Merk at koordinatvektoren til  $\mathbf{0}$  må bli

$$[\mathbf{0}]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = [0, \dots, 0].$$

Resultatet av dette er at når vi først har bestemt oss for basisen  $B$ , så kan vi skrive alle elementene i  $V$  på akkurat samme måte som vi gjør for elementene i vektorrommet  $\mathbf{R}^n$ . Det viser seg at vektorrommet  $V$  på en viss måte har akkurat samme struktur som vektorrommet  $\mathbf{R}^n$ . For å kunne uttrykke dette mer presist, skal vi innføre begrepet *isomorfi* mellom vektorrom.

**Definisjon 1 Isomorfi**

En lineærtransformasjon  $T : V \rightarrow W$  mellom to vektorrom kalles en **isomorfi** hvis den er injektiv og surjektiv på  $W$ . Hvis det finnes en isomorfi mellom to vektorrom  $V$  og  $W$ , sier vi at de to vektorrommene er *isomorfe*.

Ordet “isomorf” stammer fra gresk, og betyr “samme struktur”. Fra teorem 9.3.6 får vi at en lineærtransformasjon er en isomorfi hvis og bare hvis den er inverterbar. Vi kan nå bevise følgende teorem.

**Teorem 1 Isomorfitheoremet**

La  $V$  være et vektorrom av endelig dimensjon  $n$ , der  $n \geq 1$  er et helt tall. Da er  $V$  isomorft med vektorrommet  $\mathbf{R}^n$ .

**Bevis** Vi velger oss en basis  $B = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$  i  $V$ . Deretter definerer vi en funksjon  $T : V \rightarrow \mathbf{R}^n$  ved å avbilde hvert element  $\mathbf{v} \in V$  over til koordinatvektoren til  $\mathbf{v}$  i basisen  $B$ , altså

$$T(\mathbf{v}) = [\mathbf{v}]_B \quad \text{for alle } \mathbf{v} \in V.$$

Koordinatvektoren  $[\mathbf{v}]_B$  er et element i  $\mathbf{R}^n$ , så dette gir mening. Jeg skal vise at  $T$  er en isomorfi.

Først må vi vise at  $T$  er en lineærtransformasjon. La  $\mathbf{a}$  og  $\mathbf{b}$  være to vilkårlige vektorer i  $V$ , og la  $r$  være en skalar. Hvis

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{u}_1 + \dots + a_n\mathbf{u}_n \quad \text{og} \quad \mathbf{b} = b_1\mathbf{u}_1 + \dots + b_n\mathbf{u}_n,$$

så er

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1)\mathbf{u}_1 + \dots + (a_n + b_n)\mathbf{u}_n.$$

Dermed er

$$\begin{aligned} T(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= [a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n] \\ &= [a_1, \dots, a_n] + [b_1, \dots, b_n] && \text{(regnerregel i } \mathbf{R}^n) \\ &= T(\mathbf{a}) + T(\mathbf{b}). \end{aligned}$$

Tilsvarende får vi at

$$r\mathbf{a} = r(a_1\mathbf{u}_1 + \dots + a_n\mathbf{u}_n) = ra_1\mathbf{u}_1 + \dots + ra_n\mathbf{u}_n,$$

noe som gir

$$T(r\mathbf{a}) = [ra_1, \dots, ra_n] = r[a_1, \dots, a_n] = rT(\mathbf{a}).$$

Dermed har vi vist at  $T$  er en lineærtransformasjon.

Det gjenstår å vise at  $T$  er injektiv og surjektiv. For å vise at den er surjektiv, la  $[c_1, \dots, c_n]$  være et vilkårlig element i  $\mathbf{R}^n$ . Vi må finne en  $\mathbf{v} \in V$  slik at  $T(\mathbf{v}) = [c_1, \dots, c_n]$ . Da kan vi velge

$$\mathbf{v} = c_1 \mathbf{u}_1 + \dots + c_n \mathbf{u}_n.$$

For å vise at  $T$  er injektiv, la  $\mathbf{a}$  og  $\mathbf{b}$  være to elementer i  $V$ . Vi kan igjen skrive

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{u}_1 + \dots + a_n \mathbf{u}_n \quad \text{og} \quad \mathbf{b} = b_1 \mathbf{u}_1 + \dots + b_n \mathbf{u}_n. \quad (1)$$

Hvis  $T(\mathbf{a}) = T(\mathbf{b})$ , så er

$$[a_1, \dots, a_n] = [b_1, \dots, b_n].$$

Dette medfører at  $a_i = b_i$  for alle  $1 \leq i \leq n$ , og da følger det av (1) at  $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ . Ergo er  $T$  injektiv. ■

## Matriserepresentasjoner

La

$$T : V \rightarrow V'$$

være en lineærtransformasjon mellom to vektorrom av endelige dimensjoner  $n$  og  $m$ , henholdsvis. Vi velger oss basiser

$$B = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\} \quad \text{og} \quad B' = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$$

i hvert av de to rommene  $V$  og  $V'$ . Vi skal nå bruke disse to basisene til å beskrive lineærtransformasjonen  $T$ . Vi begynner da med å se hva  $T$  gjør med basisvektorene  $\mathbf{u}_j$ . Siden  $T(\mathbf{u}_1), \dots, T(\mathbf{u}_n)$  blir vektorer i  $V'$ , kan de uttrykkes i basisen  $B'$ . Med andre ord fins det unike skalarer  $a_{ij}$  slik at

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u}_1) &= a_{11}\mathbf{v}_1 + a_{21}\mathbf{v}_2 + \dots + a_{m1}\mathbf{v}_m \\ T(\mathbf{u}_2) &= a_{12}\mathbf{v}_1 + a_{22}\mathbf{v}_2 + \dots + a_{m2}\mathbf{v}_m \\ &\vdots \\ T(\mathbf{u}_n) &= a_{1n}\mathbf{v}_1 + a_{2n}\mathbf{v}_2 + \dots + a_{mn}\mathbf{v}_m \end{aligned} \quad (1)$$

Her dannes det en matrise av skalarer  $a_{ij}$ . Ut fra dette definerer man det som kalles *matrisen* til transformasjonen  $T$  i basisene  $B$  og  $B'$ . Denne matrisen skrives  $[T]_{B'}^B$ , og den er gitt ved

$$[T]_{B'}^B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$



Som du ser, er denne matrisen faktisk den *transponerte* av den matrisen man får ved bare å lese av koeffisienter i likningene vi fant ovenfor. Man kan spørre seg hvorfor det er *dette* som kalles matrisen til transformasjonen  $T$ . Grunnen er at hvis du kjenner koordinatvektoren  $[v]_B$  til et element  $\mathbf{x} \in V$  i basisen  $B$ , så finner du koordinatvektoren

$$[T(\mathbf{v})]_{B'}$$

til elementet  $T(\mathbf{x})$  i basisen  $B'$  ved å gange med denne transponerte matrisen. Dette forklares i neste teorem.

### Teorem 2 Bruk av matriserepresentasjoner

La  $T : V \rightarrow V'$  være en lineærtransformasjon mellom to vektorrom  $V$  og  $V'$  av dimensjoner henholdsvis  $n$  og  $m$ . La  $B$  og  $B'$  være basiser i  $V$  og  $W$ , respektivt. For alle  $\mathbf{x} \in V$  gjelder da

$$[T(\mathbf{x})]_{B'} = [T]_{B'}^B \cdot [\mathbf{x}]_B$$

der prikken til høyre betyr matrisemultiplikasjon mellom matrisen  $[T]_{B'}^B$  og søylevektoren  $[\mathbf{x}]_B$ .

**Bevis** La  $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ ,  $B' = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$  og

$$[\mathbf{x}]_B = [x_1, \dots, x_n].$$

Da er

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}) &= T(x_1 \mathbf{u}_1) + \dots + x_n \mathbf{u}_n \\ &= x_1 T(\mathbf{u}_1) + \dots + x_n T(\mathbf{u}_n) \\ &= x_1 (a_{11} \mathbf{v}_1 + \dots + a_{m1} \mathbf{v}_m) + \dots + x_n (a_{1n} \mathbf{v}_1 + \dots + a_{mn} \mathbf{v}_m) \\ &= (a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n) \mathbf{v}_1 + \dots + (a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n) \mathbf{v}_m. \end{aligned}$$

Dette betyr at

$$\begin{aligned} [T(\mathbf{x})]_{B'} &= \begin{bmatrix} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ &= [T]_{B'}^B \cdot [\mathbf{x}]_B. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

## Hvordan finne matriserepresentasjoner

La  $T : V \rightarrow V'$  være en lineærtransformasjon mellom endeligdimensjonale vektorrom med basiser henholdsvis  $B = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$  og  $B' = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ . Definisjonen av matrisen

$$[T]_{B'}^B$$

til  $T$  i disse to basiseene gir én måte man kan bruke for å finne denne matrisen. Metoden er slik:

- Finn ut hva transformasjonen  $T$  gjør med basisvektorene  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  fra  $V$ , det vil si regn ut  $T(\mathbf{u}_1), \dots, T(\mathbf{u}_n)$ . Uttrykk svarene dine ved de basisvektorene i  $V'$ , slik som i (1).
- Les av matrisen  $[T]_{B'}^B$  ved å se på koeffisientene  $a_{ij}$  i (1). Husk å transponere.

Neste teorem gir en alternativ måte å betrakte dette på.

### Teorem 3 Søylevektorene i transformasjonens matrise

La  $T : V \rightarrow V'$  være en lineærtransformasjon mellom endeligdimensjonale vektorrom med basiser henholdsvis  $B = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$  og  $B' = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ . Da er søyle nummer  $j$  i matrisen  $[T]_{B'}^B$  koordinatvektoren til  $T(\mathbf{u}_j)$  i basisen  $B'$ . Altså:

$$[T]_{B'}^B = \begin{bmatrix} [T(\mathbf{u}_1)]_{B'} & \cdots & [T(\mathbf{u}_n)]_{B'} \end{bmatrix}.$$

**Bevis** Nøkkelen her er å uttrykke basisvektorene fra basisen  $B$  i sin egen basis. Vi har

$$\mathbf{u}_1 = 1\mathbf{u}_1 + 0\mathbf{u}_2 + 0\mathbf{u}_3 + \cdots + 0\mathbf{u}_n.$$

I basisen  $B$  har derfor  $\mathbf{u}_1$  koordinatvektoren  $[\mathbf{u}_1]_B = [1, 0, \dots, 0]$ . Dette betyr at, med notasjonen fra i sted,

$$\begin{aligned} [T(\mathbf{u}_1)]_{B'} &= [T]_{B'}^B \cdot [\mathbf{u}_1]_B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} = \text{første søyle i } [T]_{B'}^B. \end{aligned}$$

Tilsvarende har  $\mathbf{u}_2$  koordinatvektoren

$$[\mathbf{u}_2]_B = [0, 1, 0, \dots, 0].$$

Når  $[T]_{B'}^B$  ganges med denne, blir resultatet annen søyle i  $[T]_{B'}^B$ . Og så videre. ■

## Matrisen til en sammensatt transformasjon

La

$$T_1 : V \rightarrow V'$$

være en lineærtransformasjon fra vektorrommet  $V$  til vektorrommet  $V'$ , og la

$$T_2 : V' \rightarrow V''$$

være en lineærtransformasjon videre fra vektorrommet  $V'$  til vektorrommet  $V''$ . Ved teorem 9.3.1 vet vi da at den sammensatte transformasjonen

$$(T_2 \circ T_1) : V \rightarrow V''$$

definert ved

$$(T_2 \circ T_1)(\mathbf{v}) = T_2(T_1(\mathbf{v})),$$

også er en lineærtransformasjon. Anta at alle de tre vektorrommene  $V$ ,  $V'$  og  $V''$  er endeligdimensjonale, og la oss velge oss basiser  $B$ ,  $B_1$  og  $B_2$  i dem respektivt. Siden  $T_2 \circ T_1$  er en lineærtransformasjon fra  $V$  til  $V''$ , må den ha en matrise

$$[T_2 \circ T_1]_{B''}^B$$

med hensyn på basisene  $B$  og  $B''$ . Man kan lure på hvordan denne matrisen henger sammen med de matrisene

$$[T_1]_{B'}^B \quad \text{og} \quad [T_2]_{B''}^{B'}$$

som svarer til hver av de to etappene. Neste teorem gir svaret.

### Teorem 4 Matrisene til sammensetninger

I situasjonen beskrevet ovenfor vil matrisen  $[T_2 \circ T_1]_{B''}^B$  være *matriseproduktet* av de to matrisene  $[T_2]_{B''}^{B'}$  og  $[T_1]_{B'}^B$ , altså

$$[T_2 \circ T_1]_{B''}^B = [T_2]_{B''}^{B'} \cdot [T_1]_{B'}^B.$$

**Bevis** La  $\mathbf{v} \in V$  være et vilkårlig element. Da er

$$[T_1(\mathbf{v})]_{B'} = [T_1]_{B'}^B \cdot [\mathbf{v}]_B. \quad (1)$$

Videre er

$$\begin{aligned} [T_2(T_1(\mathbf{v}))]_{B''} &= [T_2]_{B''}^{B'} \cdot [T_1(\mathbf{v})]_{B'} \\ &= [T_2]_{B''}^{B'} \cdot \left( [T_1]_{B'}^B \cdot [\mathbf{v}]_B \right) && \text{(likning (1) innsatt)} \\ &= \left( [T_2]_{B''}^{B'} \cdot [T_1]_{B'}^B \right) \cdot [\mathbf{v}]_B && \text{(teorem 1.13.4 punkt 5).} \end{aligned}$$

Dette betyr at matrisen

$$[T_2]_{B''}^{B'} \cdot [T_1]_{B'}^B$$

tilsvarer overgangen fra  $[\mathbf{v}]_B$  til  $[T_2(T_1(\mathbf{v}))]_{B''}$  for en vilkårlig koordinatvektor  $[\mathbf{v}]_B$  i  $\mathbf{R}^n$ . Men da må denne matrisen være matrisen

$$[T_2 \circ T_1]_{B''}^B. \quad \blacksquare$$

**Eksempel 1** La  $V$ ,  $V'$  og  $V''$  være tre vektorrom med basiser henholdsvis  $B$ ,  $B'$  og  $B''$ . La  $T_1 : V \rightarrow V'$  og  $T_2 : V' \rightarrow V''$  være lineærtransformasjoner, og anta at

$$\begin{aligned} [T_1]_{B'}^B &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \\ [T_2]_{B''}^{B'} &= \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Finn matrisen  $[T_2 \circ T_1]_{B''}^B$ .

**Løsning** Ved teorem 9.4.4 får vi

$$\begin{aligned} [T_2 \circ T_1]_{B''}^B &= [T_2]_{B''}^{B'} \cdot [T_1]_{B'}^B \\ &= \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -1 & 22 \\ 4 & -2 & 6 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

### Korollar 5 Matrisene til inverse transformasjoner

La  $T : V \rightarrow V'$  være en invertibel lineærtransformasjon mellom to vektorrom  $V$  og  $V'$  av samme endelige dimensjon  $n$ , og la  $B$  og  $B'$  være basiser for henholdsvis  $V$  og  $V'$ . Da er matrisen til den inverse transformasjonen  $T^{-1} : V' \rightarrow V$  med hensyn på  $B'$  og  $B$  lik den inverse av matrisen til  $T$  med hensyn på  $B$  og  $B'$ . Uttrykt ved symboler:

$$[T^{-1}]_{B'}^B = \left( [T]_{B'}^B \right)^{-1}.$$

**Bevis** Ved teorem 9.4.4 fås at

$$[T^{-1} \circ T]_B^B = [T^{-1}]_{B'}^{B'} \cdot [T]_{B'}^B$$

Men siden sammensetningen  $T^{-1} \circ T$  er identitetstransformasjonen på vektorrommet  $V$ , må jo

$$[T^{-1} \circ T]_B^B = I,$$

der  $I$  er identitetsmatrisen av størrelse  $(n \times n)$ . Dette viser at

$$[T^{-1}]_{B'}^{B'} \cdot [T]_{B'}^B = I.$$

Ved å se på sammensetningen

$$T \circ T^{-1},$$

kan man på helt tilsvarende måte utlede at produktet av disse to matrisene blir  $I$  også når du multipliseres i omvendt rekkefølge. Ergo er de inverse av hverandre. ■

## 9.4 Oppgaver

1. La  $T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$  være transformasjonen gitt ved

$$T(x, y) = (x, y, x + y).$$

Finn matrisen

$$[T]_{B'}^B$$

for  $T$  når  $B$  er standardbasisen i  $\mathbf{R}^2$  og  $B'$  er standardbasisen i  $\mathbf{R}^3$ .

2. La som før  $P_n$  være vektorrommet av polynomer med grad høyst  $n$ . Betrakt basisene  $B = \{1, x, x^2\}$  for  $P_2$  og  $B' = \{1, x, x^2, x^3\}$  for  $P_3$ . Definer avbildningen  $T : P_2 \rightarrow P_3$  ved  $T(f) = xf$ , altså  $(Tf)(x) = x \cdot f(x)$ .

- Vis at  $T$  er en lineærtransformasjon.
- Finn matrisen  $[T]_{B'}^B$  for  $T$  med hensyn på basisene  $B$  og  $B'$ .

3. Definer lineærtransformasjonen  $T : P_2 \rightarrow P_2$  ved  $T(f) = f'$ .

- Finn matrisen  $[T]_B^B$  for  $T$  med hensyn på basisen  $B = \{1, x, x^2\}$ .
- Finn inversbildet  $T^{-1}(\{0\})$ . Er  $T$  inverterbar?
- La  $T^2 : P_3 \rightarrow P_3$  være lineærtransformasjonen vi får ved å sette  $T$  sammen med seg selv, altså  $T^2 = T \circ T$ . Finn

matrisen  $[T^2]_B^B$  for  $T^2$  med hensyn på basisen  $B$ .

d) Vis at  $B' = \{2, x + x^2, x^2\}$  også er en basis for  $P_3$ , og finn matrisene  $[T]_{B'}^{B'}$  og  $[T^2]_{B'}^{B'}$  for  $T$  og  $T^2$  med hensyn på basisen  $B'$ .

e) Finn til slutt  $[T]_{B'}^{B'}$ .

4. Vis at vektorrommet  $P_n$  av polynomer som har grad høyst  $n$ , er isomorft med  $\mathbf{R}^{n+1}$ .

5. La  $T : V \rightarrow W$  være en lineærtransformasjon mellom to vektorrom av endelig dimensjon  $n$ . La  $B$  og  $B'$  være basiser for  $V$  og  $W$ , respektivt. Vis at  $T$  er inverterbar hvis og bare hvis matrisen  $[T]_{B'}^B$  er inverterbar.

6. Som kjent er  $B = \{1, x, x^2\}$  en basis for vektorrommet  $P_3$  av polynomer med grad høyst 3. Definer en lineæravbildning  $T : P_3 \rightarrow P_3$  ved at  $T(1) = x^2$ ,  $T(x) = 1$  og  $T(x^2) = x$ .

- Forklar hvorfor man kan definere en lineærtransformasjon på denne måten, det vil si ved bare å oppgi hva den skal gjøre med vektorene i en fritt valgt basis.
- Finn matrisen  $[T]_B^B$ .
- Vis at  $T$  er inverterbar, og finn matrisen  $[T^{-1}]_B^B$ .

## 9.5 Overgangsmatriser

La  $id : V \rightarrow V$  være identitetstransformasjonen på vektorrommet  $V$ , altså avbildningen som oppfyller  $id(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$  for alle  $\mathbf{v}$ . Setter vi inn  $T = id$  og  $V = V'$  i teorem 9.4.2, får vi at

$$[id(\mathbf{v})]_{B'} = [id]_{B'}^B \cdot [\mathbf{v}]_B,$$

der  $B$  og  $B'$  nå må tolkes som to (muligens ulike) basiser i det samme vektorrommet  $V$ . Siden  $id(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ , forenkler dette seg til

$$[\mathbf{v}]_{B'} = [id]_{B'}^B \cdot [\mathbf{v}]_B.$$

Matrisen  $[id]_{B'}^B$  gir oss altså overgangen fra koordinatvektoren  $[\mathbf{v}]_B$  for  $\mathbf{v}$  i basisen  $B$ , til koordinatvektoren  $[\mathbf{v}]_{B'}$  for  $\mathbf{v}$  i basisen  $B'$ . Derfor kalles matrisen

$$[id]_{B'}^B$$

for *overgangsmatrisen* fra basisen  $B$  til basisen  $B'$ . Hvis du kjenner koordinatvektoren  $[\mathbf{v}]_B$ , kan du altså finne  $[\mathbf{v}]_{B'}$  ved å gange med denne overgangsmatrisen. Vi skal nå se på noen metoder man kan bruke for å finne denne matrisen.

### Teorem 1 Hvordan finne overgangsmatriser

La  $B = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$  og  $B' = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  være to basiser for et vektorrom  $V$  av endelig dimensjon  $n$ . Her er to metoder som kan brukes for å finne overgangsmatrisen  $[id]_{B'}^B$ :

1. *Direkte metode.* Søylene i overgangsmatrisen vil være koordinatvektorene til basisvektorene fra  $B$  uttrykt i basisen  $B'$ :

$$[id]_{B'}^B = \begin{bmatrix} [\mathbf{u}_1]_{B'} & \cdots & [\mathbf{u}_n]_{B'} \end{bmatrix}$$

2. *Indirekte metode.* Her går vi innom en tredje basis for  $V$  som vi velger å kalle *standardbasis*, og som vi forkorter *std*. Grunnen til denne terminologien er at i tilfellet  $V = \mathbf{R}^n$  er det ofte aktuelt å bruke standardbasen i  $\mathbf{R}^n$  til dette formålet. Vi har at

$$\begin{aligned} [id]_{B'}^B &= [id]_{B'}^{std} \cdot [id]_{std}^B \\ &= ([id]_{std}^{B'})^{-1} \cdot [id]_{std}^B \\ &= \begin{bmatrix} [\mathbf{v}_1]_{std} & \cdots & [\mathbf{v}_n]_{std} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} [\mathbf{u}_1]_{std} & \cdots & [\mathbf{u}_n]_{std} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**Bevis** (1) Innsetting av  $T(\mathbf{u}_i) = id(\mathbf{u}_i) = \mathbf{u}_i$  i teorem 9.4.3.

(2) Hvis  $\mathbf{a}$  er en vektor i  $V$ , så gjelder

$$\begin{aligned} [\mathbf{a}]_{B'} &= [id]_{B'}^{std} \cdot [\mathbf{a}]_{std} \\ &= [id]_{B'}^{std} \cdot ([id]_{std}^B \cdot [\mathbf{a}]_B) \\ &= ([id]_{B'}^{std} \cdot [id]_{std}^B) \cdot [\mathbf{a}]_B \end{aligned}$$

fordi matrisemultiplikasjon er assosiativt (teorem 10.4 punkt 5). Det følger fra dette at

$$[id]_{B'}^{std} \cdot [id]_{std}^B = [id]_{B'}^B,$$

som er den første likheten i (2). Ved korollar 9.4.5 er videre

$$[id]_{B'}^{std} = ([id]_{std}^B)^{-1},$$

og innsatt gir dette den andre likheten i (2). Den siste likheten fås ved innsetting i punkt (1), som vi nettopp har bevist. ■

Av disse metodene er den siste likheten i (2) ofte å foretrekke i situasjoner der du i utgangspunktet *kjenner* koordinatvektorene  $[\mathbf{u}_i]_{std}$  og  $[\mathbf{v}_i]_{std}$  til alle basisvektorene  $\mathbf{u}_i$  og  $\mathbf{v}_i$  fra  $B$  og  $B'$  i “standardbasisen”  $std$ . Da er det bare å sette opp de to matrisene som har disse koordinatvektorene som søyler, invertere den ene matrisen, og gange sammen.

Til slutt en oppsummering om sammenhengen mellom stoffet i denne seksjonen og stoffet i den forrige. I forrige seksjon studerte vi matrisen

$$[T]_{B'}^B$$

til en lineærtransformasjon  $T : V \rightarrow V'$  med hensyn på to valgte basiser  $B$  for rommet  $V$  og  $B'$  for rommet  $V'$ . Husk at det vi gjorde i denne seksjonen altså egentlig bare var et meget sært spesialtilfelle av dette: Vi lot  $V = V'$  og lot  $T$  være identitetstransformasjonen på  $V$ .

## 9.5 Oppgaver

**1.** Betrakt  $B = \{[1, 0, 1], [0, 2, 1], [-1, 1, 0]\}$  som en basis for  $\mathbf{R}^3$ .

- Regn ut overgangsmatrisen  $[id]_{std}^B$  fra  $B$  til standardbasis i  $\mathbf{R}^3$ .
- Finn overgangsmatrisen  $[id]_B^{std}$  fra standardbasis til  $B$ .

**2.** Betrakt basisene  $B = \{[1, 0], [1, 1]\}$  og  $B' = \{[2, 1], [9, 4]\}$

for  $\mathbf{R}^2$ . Finn overgangsmatrisen  $[id]_{B'}^B$  fra  $B$  til  $B'$ .

**3.** La  $B = \{[1, 0, 0], [1, 1, 0], [1, 1, 1]\}$  og  $B' = \{[1, 2, 1], [2, 5, 0], [3, 3, 8]\}$ . Finn overgangsmatrisen  $[id]_{B'}^B$  fra  $B$  til  $B'$ .

**4.** Gitt basisene  $B = \{1, 1 + 2x, 1 + 2x + 3x^2\}$  og  $B' = \{1, x, x^2\}$  for rommet  $P_2$  av polynomer med grad høyst 2. Finn overgangsmatrisen  $[id]_{B'}^B$  fra  $B$  til  $B'$ .

## 9.6 Egenverdier og egenrom

I kapittel 10 fra MIP og i seksjon 1.13 definerte vi begrepene *egenverdier* og *egenvektorer* for en matrise. Vi skal nå generalisere dette til vilkårlige lineærtransformasjoner fra et vektorrom  $V$  inn i seg selv.

### Definisjon 1 Egenverdier og egenvektorer

La  $T : V \rightarrow V$  være en lineærtransformasjon, la  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  være en vektor i  $V$ , og la  $\lambda$  være en skalar. Hvis

$$T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v},$$

kalles  $\mathbf{v}$  en **egenvektor** for transformasjonen  $T$ . Skalaren  $\lambda$  kalles en **egenverdi** for transformasjonen.

Som tilfellet var for matriser, sier vi gjerne at egenvektoren  $\mathbf{v}$  i definisjonen ovenfor *hører til* egenverdien  $\lambda$ , og omvendt.

### Teorem 1 Egenrom

La  $T : V \rightarrow W$  være en lineærtransformasjon, og anta at  $\lambda$  er en egenverdi for  $T$ . La  $E_\lambda$  være mengden av alle vektorer  $\mathbf{v} \in V$  som er egenvektorer for  $T$  med tilhørende egenverdi  $\lambda$ . Da er  $E_\lambda$  et underrom av  $V$ . Vi kaller  $E_\lambda$  for *egenrommet* tilhørende  $\lambda$ .

**Bevis** Vi må vise at  $E_\lambda$  er lukket under vektoraddisjon og multiplikasjon med skalarer. Anta at  $\mathbf{u}$  og  $\mathbf{v}$  ligger i  $E_\lambda$ . Da er

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v} = \lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}),$$

der jeg brukte L1 i første overgang, antakelsen om at  $\mathbf{u}$  og  $\mathbf{v}$  ligger i  $E_\lambda$  i annen overgang, og A9 i tredje overgang. Ergo er  $\mathbf{x} + \mathbf{y}$  en egenvektor for  $T$  med egenverdi  $\lambda$ , så  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$  ligger i  $E_\lambda$ . På samme måte finner vi at dersom  $r$  er en skalar, så er

$$T(r\mathbf{u}) = rT(\mathbf{u}) = r(\lambda\mathbf{u}) = (r\lambda)\mathbf{u} = \lambda(r\mathbf{u}),$$

der jeg brukte L2 og A7. Ergo er  $r\mathbf{u}$  også i  $E_\lambda$ . ■

## Sammenhengen med matriser

Hvis vektorrommet  $V$  er endeligdimensjonalt med dimensjon  $n$ , kan vi velge en basis  $B$  for  $V$ . Hvis  $\mathbf{v}$  er en egenvektor for transformasjonen  $T : V \rightarrow V$ ,



gjelder da

$$[T(\mathbf{v})]_B = [\lambda\mathbf{v}]_B.$$

Setter vi inn at  $[T(\mathbf{v})]_B = [T]_B^B \mathbf{v}$  og at  $[\lambda\mathbf{v}]_B = \lambda[\mathbf{v}]_B$ , blir dette

$$[T]_B^B [\mathbf{v}]_B = \lambda [\mathbf{v}]_B.$$

Dette betyr at koordinatvektoren  $[\mathbf{v}]_B$  til vektoren  $\mathbf{v}$  er en egenvektor for matrisen  $[T]_B^B$  til transformasjonen i basisen  $B$ . Med andre ord er vi tilbake i situasjonen fra kapittel 10. Vi kan finne egenvektorer og egenverdier for transformasjonen  $T$  ved å

- finne en basis  $B$  for  $V$
- finne matrisen  $M = [T]_B^B$  til transformasjonen i denne basisen
- finne egenverdier og egenvektorer for  $(n \times n)$ -matrisen  $M$ .

Etter dette har vi bestemt koordinatvektorene til egenvektorene i basisen  $B$ , og det er vi fornøyde med.

Selve regningen man gjør for å finne egenvektorer og egenverdier til en  $(n \times n)$ -matrise  $M$ , gjennomgikk vi i kapittel 10. Her og nå skal jeg bare knytte litt mer notasjon og terminologi til metoden. Vi starter med likningen

$$M\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x},$$

der  $\mathbf{x}$  er en ukjent vektor i  $\mathbf{R}^n$ . Hvis vi lar  $I$  være identitetsmatrisen av størrelse  $(n \times n)$ , kan vi skrive denne likningen om slik:

$$\begin{aligned} M\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} &= \mathbf{0} \\ M\mathbf{x} - \lambda I\mathbf{x} &= \mathbf{0} \\ (M - \lambda I)\mathbf{x} &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Den siste likningen vi kom frem til her, kan oppfattes som et lineært liknings-system med koeffisientmatrise  $M - \lambda I$ . Likningssystemet har  $n$  likninger og  $n$  ukjente, og det er homogent. Fra kapittel 10 vet vi derfor at systemet har ikke-trivielle løsninger  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  hvis og bare hvis determinanten til koeffisientmatrisen er 0, altså

$$|M - \lambda I| = 0.$$

Determinanten som inngår her, er rett og slett den som fås fra determinanten til  $M$  ved å trekke fra  $\lambda$  nedover diagonalen. Vi sper nå på med litt mer terminologiknyttet til dette:

**Definisjon 2 Karakteristisk polynom**

Med *det karakteristiske polynomet*  $p(\lambda)$  til en  $(n \times n)$ -matrise  $M$  med elementer  $a_{ij}$  menes determinantuttrykket

$$p(\lambda) = \det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

Determinantuttrykket oppgitt for  $p(\lambda)$  blir et polynom

$$p(\lambda) = c_n \lambda^n + c_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + c_1 \lambda + c_0 \quad (1)$$

av grad  $n$  i variabelen  $\lambda$ , der der koeffisientene  $c_1, \dots, c_n$  er reelle tall. Dette så vi i eksemplene i kapittel 10, og man kan bevise det generelt ved induksjon. (Se oppgave 10.0.0.) Ved algebraens fundamentalteorem kan polynomet  $p(\lambda)$  gitt ved (1) faktoriseres

$$p(\lambda) = c_n (\lambda - \lambda_1) \cdot (\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n) \quad (2)$$

der de  $n$  røttene  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  er skrevet opp med sin multiplisitet.

**Definisjon 3 Karakteristiske røtter**

Røttene  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  i likning (2) kalles de *karakteristiske røttene* til matrisen  $M$ .

Merk at de karakteristiske røttene kan være komplekse. Hvis en karakteristisk rot for  $M$  er reell, er den en egenverdi for  $M$ . I motsatt fall er den det ikke.

**Definisjon 4 Algebraisk og geometrisk multiplisitet**

Multiplisiteten til en karakteristisk rot  $\lambda_i$  i faktoriseringen (2), altså antall ganger den forekommer, kalles den *algebraiske multiplisiteten* til denne roten. Med den *geometriske* multiplisiteten til roten  $\lambda_i$  menes dimensjonen til egenrommet  $E_{\lambda_i}$ , dersom dette finnes.

Vi skal senere se på sammenhenger mellom disse to multiplisitetsbegrepene. Merk at dersom  $\lambda_i$  er kompleks, så har den ikke noe egenrom. Dette er en effekt som opptrer fordi vi studerer *reelle* vektorrom, den vil forsvinne i kapittel 11 om

komplekse vektorrom. I tilfellet reelle vektorrom definerer vi den geometriske multiplisiteten til  $\lambda_i$  som 0 dersom  $\lambda_i$  er kompleks.

### **Teorem 2 Karakteriske røtter og determinanten**

La  $M$  være en  $(n \times n)$ -matrise. Da er produktet av de karakteristiske røttene til  $M$  lik determinanten til  $M$ . I notasjonen ovenfor er altså

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n = \det M.$$

**Bevis** Sammenlikning av (1) og (2) med  $\lambda = 0$  gir at

$$c_0 = c_n \cdot (-\lambda_1) \cdot (-\lambda_2) \cdots (-\lambda_n). \quad (3)$$

Videre kan vi se fra determinantuttrykket i definisjon 9.6.2 at koeffisienten  $c_n$  foran leddet  $\lambda^n$  i (1) alltid er  $(-1)^n$ ; grunnen er at leddet med  $\lambda^n$  vil fremkomme ved multiplikasjon av alle uttrykkene  $(a_{ii} - \lambda)$  nedover diagonalen, og der er  $n$  stykker av dem. Likningen (3) inneholder  $n$  faktorer med et minustegn i, så siden  $c_n = (-1)^n$  får vi

$$c_0 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n.$$

På den annen side følger det fra (1) at  $p(0) = c_0$ . Men ved definisjon 9.6.2 er  $p(0)$  rett og slett determinanten til  $M$ . ■

## 9.6 Oppgaver

1. Finn basiser for egenrommene til matrisene i oppgave 10.7.2a og d. Angi også dimensjonene til egenrommene.
2. Finn basiser for egenrommene til matrisen i oppgave 10.7.3c. Angi også dimensjonene til egenrommene.
3. Finn det karakteristiske polynomet til

$$M = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Finn så alle de karakteristiske røttene til  $M$ . Verifiser at produktet av de karakteristiske røttene er lik determinanten til  $M$ .

4. La  $P_2$  være vektorrommet av polynomer med grad høyst 2. Definer lineærtransformasjonen  $T : P_2 \rightarrow P_2$  ved at  $T(1) = 1$ ,  $T(x) = 4x^2 + 2x + 2$  og  $T(x^2) = 2x^2 + 1$ . Finn eventuelle egenverdier og basiser for egenrommene til  $T$ . (Hint: 2 er en egenverdi.)

5. La  $V$  være vektorrommet av funksjoner  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  som er uendelig mange ganger deriverbare. La  $T : V \rightarrow V$  være lineærtransformasjonen gitt ved  $T(f) = f'$ . Har  $T$  noen egenvektorer? Hvis den har, så bestem alle egenverdier og egenvektorer for  $T$ .

6. La  $P_\infty$  være vektorrommet av alle polynomer, og la  $T : P_\infty \rightarrow P_\infty$  være lineærtransformasjonen gitt ved  $T(f) = f'$ . Har  $T$  noen egenvektorer? Hvis den har, så bestem alle egenverdier og egenvektorer for  $T$ .

7. I denne oppgaven skal vi bevise ved induksjon at determinantuttrykket for det karakteristiske polynomet  $p(\lambda)$  gitt i definisjon 9.6.2 blir et polynom av grad  $n$  i variabelen  $\lambda$ , som angitt i likning (1).

- a) Vis at dette holder for  $n = 1$ .
- b) Anta at det holder for  $n = k$ . Vis at det da holder for  $n = k + 1$  også. (Hint: Løs opp etter første linje.)

## 9.7 Similære matriser

La  $T : V \rightarrow V$  være en lineærtransformasjon av et endeligdimensjonalt vektorrom  $V$  inn i seg selv. Anta at vi har to basiser

$$B = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\} \quad \text{og} \quad B' = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$$

for  $V$ , der  $n$  er dimensjonen til  $V$ . Da vil transformasjonen  $T$  ha matriser

$$[T]_B^B \quad \text{og} \quad [T]_{B'}^{B'}$$

med hensyn på disse to basisene. Man kan spørre hva sammenhengen vil være mellom disse to matrisene. Vel, vi kan utlede dette ved å bruke overgangsmatriser frem og tilbake mellom de to basisene. Vi har

$$[T]_{B'}^{B'} = [id]_{B'}^B [T]_B^B [id]_B^{B'}.$$

Videre er  $[id]_{B'}^B$  og  $[id]_B^{B'}$  inverse av hverandre, så hvis vi døper  $C = [id]_B^{B'}$  har vi

$$[T]_{B'}^{B'} = C^{-1} [T]_B^B C.$$

Dette inspirerer til følgende definisjon.

### Definisjon 1 Similære matriser

To  $(n \times n)$ -matriser  $M$  og  $N$  kalles *similære* hvis det finnes en inverterbar  $(n \times n)$ -matrise  $C$  slik at

$$M = C^{-1} N C.$$

Resonnementet vi gjorde i sted, viser at matriser som representerer *samme lineærtransformasjon* i hver sin basis, er similære. Dette holder omvendt også:

### Teorem 1 Similaritet og lineærtransformasjoner

To  $(n \times n)$ -matriser  $M$  og  $N$  er similære hvis og bare hvis det finnes en lineærtransformasjon  $T : V \rightarrow V$  av et  $n$ -dimensjonalt vektorrom  $V$  inn i seg selv og to basiser  $B$  og  $B'$  for  $V$  slik at

$$M = [T]_B^B \quad \text{og} \quad N = [T]_{B'}^{B'}.$$

**Bevis** Vi har allerede vist resultatet den ene veien. For å vise det motsatt vei, anta at  $M$  og  $N$  er similære. Da finnes det en  $(n \times n)$ -matrise  $C$  slik at

$$N = C^{-1} M C.$$

La  $V = \mathbf{R}^n$ , og la  $T : V \rightarrow V$  være transformasjonen gitt ved multiplikasjon med  $M$  i standardbasis, altså  $T(\mathbf{x}) = M\mathbf{x}$ . Da er  $[T]_{std}^{std} = M$ . Siden  $C$  er en inverterbar matrise, utgjør søylevektorene i  $C$  basis  $B$  for  $\mathbf{R}^n$ . Vi har

$$[id]_{std}^B = C \quad \text{og} \quad [id]_B^{std} = C^{-1},$$

så det følger at

$$N = C^{-1}MC = [id]_B^{std}[T]_{std}^{std}[id]_{std}^B = [T]_B^B. \quad \blacksquare$$

Fra dette følger en rekke resultater om similære matriser:

### **Teorem 2 Egenskaper ved similære matriser**

La  $M$  og  $N$  være to similære  $(n \times n)$ -matriser. Da gjelder:

1.  $M$  og  $N$  har samme determinant
2.  $M$  og  $N$  har de samme egenverdiene
3.  $M$  er inverterbar hvis og bare hvis  $N$  er inverterbar.

**Bevis** (1) Siden  $M$  og  $N$  er similære, finnes en  $(n \times n)$ -matrise  $C$  slik at  $N = C^{-1}MC$ . Tar vi determinanten på begge sider, får vi

$$\det N = \det(C^{-1}MC) = (\det C^{-1}) \cdot (\det M) \cdot (\det C).$$

Men  $(\det C) \cdot (\det C^{-1}) = \det I = 1$ , så resultatet følger.

(2) Siden  $M$  og  $N$  er similære, finnes det ved teorem 9.7.1 et vektorrom  $V$  og en lineærtransformasjon  $T : V \rightarrow V$  som de begge representerer. At  $M$  og  $N$  har de samme egenverdiene, følger dermed fra definisjon 9.6.1 som vi startet med. Egenverdiene til  $T$  er jo definert uavhengig av basis, og vi har vist at man kan finne dem ved å bestemme egenverdiene til matrisen  $[T]_B^B$  for  $T$  i en vilkårlig basis  $B$  for vektorrommet  $V$ .

(3) Dette følger direkte fra (1).  $\blacksquare$

## 9.7 Oppgaver

**1.** Begrunn at hvis  $T : V \rightarrow V$  er en lineærtransformasjon fra et endeligdimensjonalt vektorrom inn i seg selv, så vil alle matriser som representerer  $T$  i en eller annen basis ha samme determinant. Den felles determinant-verdien kalles *determinanten til lineærtransformasjonen*  $T$ .

**2.** Vis at hvis  $M_1, M_2$  og  $M_3$  er kvadratiske matriser slik at  $M_1$  er similær med  $M_2$  og  $M_2$  er similær med  $M_3$ , så er  $M_1$  similær med  $M_3$ .

**3.** Hvilke matriser er similære med identitetsmatrisen av størrelse  $(n \times n)$ ?

4. Vis at to simillære matriser alltid har samme rang.
5. Finn en *diagonal* matrise som er simillær med matrisen

$$M = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Hint: La  $T$  være transformasjonen fra  $\mathbf{R}^2$  til  $\mathbf{R}^2$  gitt ved multiplikasjon med  $M$  i standardbasis. Prøv å finne en basis  $B$  for  $\mathbf{R}^2$  bestående av egenvektorer for  $M$ . Hvordan vil matrisen  $[T]_B^B$  se ut?

## 9.8 Diagonalisering

I våre eksempler om matrisedynamikk i kapittel 10 brukte vi teknikken med å “skrive startvektoren som en sum av egenvektorer for overgangsmatrisen”. Ved hjelp av dette trikket kunne vi rene oss  $n$  steg fremover i tiden. Men hvordan kan man være sikker på at det *lar seg gjøre* å uttrykke en hvilken som helst startvektor  $\mathbf{x}$  ved egenvektorer for overgangsmatrisen? I denne seksjonen skal vi fokusere på dette spørsmålet. Nøkkelen er følgende begrep:

### Definisjon 1 Egenbasis

La  $T : V \rightarrow V$  være en lineærtransformasjon. Med en **egenbasis** for transformasjonen  $T$  menes en basis for  $V$  bestående av kun egenvektorer for  $T$ .

Overgangsmatrisen  $M$  i et matrisedynamisk system representerer en lineærtransformasjon  $T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  ved at

$$T(\mathbf{x}) = M\mathbf{x}.$$

Vi har  $M = [T]_{std}^{std}$ . Hvis transformasjonen  $T$  har en egenbasis

$$B = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\},$$

så kan, siden  $B$  er en basis for  $\mathbf{R}^n$ , enhver startvektor  $\mathbf{x}$  skrives som en lineærkombinasjon

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_n\mathbf{v}_n.$$

Siden vektorene  $\mathbf{v}_i$  er egenvektorer for matrisen  $M$ , vil også vektorene  $c_i\mathbf{v}_i$  være det. Dette betyr at enhver startvektor  $\mathbf{x}$  kan skrives som en “sum av egenvektorer for  $M$ ” i vår betydning fra kapittel 10. Det er altså av interesse å finne kriterier som sikrer at en gitt lineærtransformasjon har en egenbasis. Vi begynner med å fastsette litt terminologi.

**Teorem 1 Diagonal matrise i egenbasis**

La  $T : V \rightarrow V$  være en lineærtransformasjon fra et endeligdimensjonalt vektorrom til seg selv, og la  $B = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  være en egenbasis for  $T$ . Da er matrisen  $[T]_B^B$  til transformasjonen  $T$  i basisen  $B$  gitt ved

$$[T]_B^B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

der  $\lambda_i$  er egenverdien tilhørende egenvektoren  $\mathbf{v}_i$  for hver  $1 \leq i \leq n$ . Matrisen til  $T$  i basisen  $B$  er altså *diagonal* med egenverdiene til  $T$  plassert nedover diagonalen.

**Bevis** Egenvektoren  $\mathbf{v}_1$  har koordinatvektoren

$$[\mathbf{v}_1]_B = [1, 0, 0, \dots, 0].$$

i basisen  $B$ , og vi har  $T(\mathbf{v}_1) = \lambda_1 \mathbf{v}_1$ . Ergo er

$$[T(\mathbf{v}_1)]_B = [\lambda_1, 0, 0, \dots, 0]$$

Men ifølge teorem 10.0.0 er denne vektoren første søyle i matrisen  $[T]_B^B$ . På tilsvarende måte får vi at de øvrige søylene stemmer med den diagonale matrisen i angitt i teoremet ovenfor. ■

Dette inspirerer til følgende definisjon:

**Definisjon 2 Diagonaliserbarhet av lineærtransformasjoner**

En lineærtransformasjon  $T : V \rightarrow V$  fra et endeligdimensjonalt vektorrom inn i seg selv kalles *diagonaliserbar* hvis det finnes en basis  $B$  for  $T$  der matrisen  $[T]_B^B$  er diagonal.

Ved forrige teorem er en lineærtransformasjon diagonaliserbar hvis og bare hvis den har en egenbasis.

**Definisjon 3 Diagonaliserbarhet av matriser**

En  $(n \times n)$ -matrise  $M$  kalles *diagonaliserbar* hvis lineærtransformasjonen  $T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  definert ved multiplikasjon med  $M$  i standardbasis, er diagonaliserbar.

Vi kan så bevise følgende lille teorem:

### **Teorem 2 Similaritet og diagonalisering**

En  $(n \times n)$ -matrise  $M$  er diagonaliserbar hvis og bare hvis den er similær med en diagonal matrise, det vil si hvis og bare hvis det finnes en inverterbar  $(n \times n)$ -matrise  $C$  og en diagonal  $(n \times n)$ -matrise  $D$  slik at

$$M = CDC^{-1}, \quad \text{eller ekvivalent,} \quad D = C^{-1}MC.$$

**Bevis** La  $T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  være lineærtransformasjonen gitt ved multiplikasjon med  $M$  i standardbasis. Anta først at  $M$  er diagonaliserbar. Da finnes en basis  $B$  for  $\mathbf{R}^n$  bestående av kun egenvektorer for  $M$ . Da er matrisen  $D = [T]_B^B$  diagonal. La  $C$  være matrisen med vektorene i basisen  $B$  som søyler. Ved teorem 9.5.1 er da  $C$  overgangsmatrisen fra  $B$  standardbasisen til, og  $C^{-1}$  er overgangsmatrisen tilbake fra standardbasisen til  $B$ . Dette gir

$$M = [T]_{std}^{std} = [id]_{std}^B [T]_B^B [id]_B^{std} = CDC^{-1}.$$

Ved å multiplisere likningen  $M = CDC^{-1}$  fra høyre med  $C$  og deretter fra venstre med  $C^{-1}$ , får vi  $C^{-1}MC = D$ .

Omvendt, anta at det finnes en inverterbar  $(n \times n)$ -matrise  $C$  og en diagonal  $(n \times n)$ -matrise  $D$  at  $M = CDC^{-1}$ . Ved teorem 10.17 er da søylene i  $C$  lineært uavhengige vektorer, så de utgjør en basis  $B$  for  $\mathbf{R}^n$ . Det følger at  $C = [id]_{std}^B$  og  $C^{-1} = [id]_B^{std}$ . Altså

$$M = [T]_{std}^{std} = CDC^{-1} = [id]_{std}^B D [id]_B^{std},$$

som viser at  $D = [T]_B^B$ . Per antakelse er  $D$  diagonal, og teoremet er bevist. ■

La  $M$  og  $C$  være  $(n \times n)$ -matriser. Hvis matrisen

$$D = C^{-1}MC$$

er diagonal, sier vi at matrisen  $C$  diagonaliserer matrisen  $M$ , og at  $C$  er en diagonaliserende matrise for  $M$ .

### **Teorem 3 Egenvektorer og diagonaliserende matriser**

La  $M$  være en  $(n \times n)$ -matrise som har en egenbasis, og la matrisen  $C$  være  $(n \times n)$ -matrisen som har vektorene fra denne basisen som søyler. Da vil  $C$  diagonalisere  $M$ , dvs. matrisen  $D = C^{-1}MC$  er diagonal.

**Bevis** Se beviset for teorem 9.8.2. ■



Neste teorem viser at hvis man har diagonalisert en matrise, er det meget enkelt å regne ut potenser av den.

#### **Teorem 4 Potenser av diagonaliserbare matriser**

La  $M$ ,  $C$  og  $D$  være  $(n \times n)$ -matriser slik at

$$M = CDC^{-1},$$

der  $D$  er diagonal. For hvert heltall  $k > 1$  er da

$$M^k = CD^kC^{-1}.$$

**Bevis** Vi får

$$M^k = (CDC^{-1})^k = (CDC^{-1})(CDC^{-1})(CDC^{-1}) \cdots (CDC^{-1}).$$

Siden matrisemultiplikasjon er assosiativt, vil får vi her en rekke produkter  $C^{-1}C = I$  av matriser som kansellerer hverandre, og vi står igjen med bare

$$M^k = CDIDI \cdots IDC^{-1}. \quad \blacksquare$$

#### **Teorem 5 Egenvektorer med ulike egenverdier er lineært uavhengige**

La  $M$  være en  $(n \times n)$ -matrise, la  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  være  $k$  ulike egenverdier for  $M$ , og la  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  være egenvektorer til hver av de  $k$  egenverdiene. Da er disse egenvektorene lineært uavhengige.

**Bevis** Anta at de er lineært avhengige. Da kan minst en av dem skrives som en lineærkombinasjon av de øvrige. La  $\mathbf{v}_r$  være den første vektoren i rekken som har denne egenskapen. Da er

$$\mathbf{v}_r = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_{r-1}\mathbf{v}_{r-1} \quad (1)$$

der  $c_1, \dots, c_{r-1}$  er skalarer. Ganger vi likning (1) med  $\lambda_r$  på begge sider, får vi

$$\lambda_r\mathbf{v}_r = c_1\lambda_r\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_r\mathbf{v}_2 + \cdots + c_{r-1}\lambda_r\mathbf{v}_{r-1}. \quad (2)$$

På den annen side: Multiplikasjon av (1) med matrisen  $M$  på begge sider gir

$$\lambda_r\mathbf{v}_r = c_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_{r-1}\lambda_{r-1}\mathbf{v}_{r-1}. \quad (3)$$

Subtraherer vi likning (3) fra likning (2), får vi

$$\mathbf{0} = c_1(\lambda_r - \lambda_1)\mathbf{v}_1 + c_2(\lambda_r - \lambda_2)\mathbf{v}_2 + \cdots + c_{r-1}(\lambda_r - \lambda_{r-1})\mathbf{v}_{r-1}.$$

Siden alle egenverdiene er ulike, viser dette at vektorene

$$\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{r-1}$$

også er lineært uavhengige. Dette betyr at en av dem kan skrives som en lineærkombinasjon av de øvrige, noe som motsier antakelsen om  $\mathbf{v}_r$ . ■

### **Teorem 6 Diagonaliserbarhet av matriser med $n$ ulike egenverdier**

La  $M$  være en  $(n \times n)$ -matrise som har  $n$  ulike, reelle tall som egenverdier. Da gjelder:

1.  $M$  er diagonaliserbar.
2. Man finner en egenbasis for  $M$  ved å plukke en egenvektor for hver egenverdi.

**Bevis** Ved teorem 9.8.5 har matrisen vår  $n$  lineært uavhengige egenvektorer. Disse utgjør dermed en basis for  $\mathbf{R}^n$ , og  $M$  er diagonaliserbar. ■

Dette siste teoremet sikrer at alle de konkrete overgangsmatrisene vi jobbet med i kapittel 10, har en egenbasis. Dermed vet vi at enhver startvektor skrives som en lineærkombinasjon av egenvektorer for disse matrisene.

## 9.8 Oppgaver

1. I denne oppgaven skal vi studere matrisen

$$M = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

altså overgangsmatrisen i studenteksemplet fra seksjon 10.0.0.

- a) Finn en inverterbar matrise  $C$  og en diagonal matrise  $D$  slik at  $M = CDC^{-1}$ .
- b) Beregn matrisen  $M^n$ , der  $n \geq 1$  er et naturlig tall.
- c) Bruk resultatet fra forrige punkt til å finne

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} = M^n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 500 \end{bmatrix}$$

2. Gjør det samme som i forrige oppgave med overgangsmatrisen  $M$  fra oppgave 10.0.0 om Myrkdalen.

3. Gjør det samme som i forrige oppgave med overgangsmatrisen  $M$  fra oppgave 10.0.0 (kattokolonien).

4. Vis, ved å gi et eksempel, at en matrise ikke trenger å være inverterbar fordi den er digonaliserbar.

5. Betrakt lineærtransformasjonen  $T : P_2 \rightarrow P_2$  gitt i oppgave 9.6.4. Finn en basis  $B$  for  $P_2$  slik at matrisen  $[T]_B^B$  er diagonal.

6. Vis at hvis matrisen  $M$  er både inverterbar og diagonaliserbar, så er  $M^{-1}$  også diagonaliserbar.

## 9.9 Anvendelse: Lineære differensiallikningssystemer

I et **differensiallikningssystem** har man flere likninger og flere ukjente funksjoner. Vi studerte slike systemer i MIP kapittel 11. Vi skal nå generalisere noen av metodene vi brukte der. Fortsatt skal de ukjente funksjonene våre være funksjoner av én variabel  $t$  som i anvendelser typisk vil være tiden. Vi tar utgangspunkt i differensiallikningssystemer på formen

$$\begin{aligned}x_1' &= a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\x_2' &= a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n \\&\vdots \\x_n' &= a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n,\end{aligned}\tag{1}$$

der  $x_1, \dots, x_n$  er de ukjente funksjonene og der koeffisientene  $a_{ij}$  er reelle tall. Med en *løsning* av systemet (1) mener vi et sett av funksjoner som tilfredsstillers (1) på et intervall  $t \in I$ . Merk at slik systemet (1) står skrevet, åpnes det for at den deriverte av de ukjente funksjonene kan avhenge ikke bare av den enkelte funksjon selv, men også av de andre funksjonene. Vi sier at systemet kan være *koblet*.

Imidlertid finnes det et spesialtilfelle av (1) som vi kan løse direkte: Hvis  $(n \times n)$ -matrisen dannet av koeffisientene  $a_{ij}$  er *diagonal*, blir systemet (1) ganske enkelt

$$\begin{aligned}x_1' &= a_{11}x_1 \\x_2' &= a_{22}x_2 \\&\vdots \\x_n' &= a_{nn}x_n\end{aligned}\tag{2}$$

Dette systemet kan vi lett løse; det blir bare å løse hver av de  $n$  likningene for seg. Ved resultatene i MIP kapittel 9 er den generelle løsningen av (2) gitt ved

$$\begin{aligned}x_1(t) &= c_1 e^{a_{11}t} \\x_2(t) &= c_2 e^{a_{22}t} \\&\vdots \\x_n(t) &= c_n e^{a_{nn}t}\end{aligned}$$

der  $c_1, \dots, c_n$  er reelle integrasjonskonstanter. For å finne ut hva vi skal gjøre hvis koeffisientmatrisen ikke er diagonal, begynner vi å skrive (1) på matrisform. Systemet kan skrives

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

der

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Som du ser, kan vi oppfatte  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  som en vektorfunksjon av  $t$ . I anvendelsene vil  $t$  typisk representere tid. Vi antar nå at matrisen  $A$  er diagonaliserbar, slik at den har en egenbasis  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$  av  $n$  lineært uavhengige egenvektorer. La  $C$  være matrisen som har vektorene fra denne basisen som søyler, altså

$$C = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{u}_n].$$

Da vet vi at  $A = CDC^{-1}$ , der  $D$  er en diagonal matrise. Vi innfører nå en ny vektorfunksjon  $\mathbf{y}$  ved å sette

$$\mathbf{x}(t) = C\mathbf{y}(t), \quad \text{eller ekvivalent} \quad \mathbf{y}(t) = C^{-1}\mathbf{x}(t).$$

Innsatt i likningen  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$  gir dette

$$(C\mathbf{y})' = A(C\mathbf{y}) = (CDC^{-1})C\mathbf{y} = CD\mathbf{y}.$$

På den annen side er  $(C\mathbf{y})' = C\mathbf{y}'$ , siden  $C$  er en konstant matrise. Altså

$$C\mathbf{y}' = CD\mathbf{y}.$$

Ganger vi med  $C^{-1}$  fra venstre på begge sider, får vi

$$\mathbf{y}' = D\mathbf{y}.$$

Dette betyr at  $\mathbf{y}$  tilfredsstillere et *diagonalt* system av den typen vi kan løse. Omvendt, hvis vi har en vektor  $\mathbf{y}$  som tilfredsstillere  $\mathbf{y}' = D\mathbf{y}$ , så kan vi ved å reversere resonnetet ovenfor vise at  $\mathbf{x} = C\mathbf{y}$  vil tilfredsstillere  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ . Med andre ord: Hvis  $\mathbf{y}$  er den generelle løsningen av  $\mathbf{y}' = D\mathbf{y}$ , så er  $\mathbf{x} = C\mathbf{y}$  den generelle løsningen av  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ .

Vi vet at tallene nedover diagonalen i  $D$  er egenverdiene til  $A$ , så i utskrevet form blir systemet  $\mathbf{y}' = D\mathbf{y}$  til

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

der  $\lambda$ -ene er egenverdiene. Den generelle løsningen av dette systemet er

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}.$$

Etter å ha løst dette, kan vi så finne den generelle løsningen av  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$  ved å sette

$$\mathbf{x} = C\mathbf{y} = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{u}_n] \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} = c_1 \mathbf{u}_1 e^{\lambda_1 t} + \cdots + c_n \mathbf{u}_n e^{\lambda_n t}.$$

Vi har nå en fullstendig oppskrift for løsning av systemet (1) som vi startet med.

**Metode for å løse differensiallikningssystemer** Anta at vi skal løse differensiallikningssystemet

$$x_1' = a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n$$

$$x_2' = a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n$$

$$\vdots$$

$$x_n' = a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n$$

1. Skriv systemet på matriseformen

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}.$$

2. Finn egenverdiene og en egenbasis  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  for matrisen  $A$ . Metoden forutsetter at en slik egenbasis fins. Hvis  $A$  har  $n$  ulike reelle egenverdier, kan du lage en egenbasis ved å plukke én egenvektor for hver egenverdi.
3. Den generelle løsningen av differensiallikningssystemet er

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{u}_1e^{\lambda_1 t} + \cdots + c_n\mathbf{u}_ne^{\lambda_n t},$$

der  $\lambda_i$  er egenverdien tilhørende egenvektoren  $\mathbf{u}_i$  for hver  $i$ , og tallene  $c_1, \dots, c_n$  er integrasjonskonstanter. Tilfredsstill eventuelle initialkrav ved å tilpasse integrasjonskonstantene.

En ting ved metoden som er verdt å filosofere over, er at den generelle løsningen rett og slett er en vilkårlig lineærkombinasjon av de  $n$  vektorfunksjonene

$$\mathbf{u}_1e^{\lambda_1 t}, \dots, \mathbf{u}_ne^{\lambda_n t}. \quad (3)$$

Med andre ord: Hvis vi lar  $V$  være vektorrommet av funksjoner fra  $\mathbf{R}$  til  $\mathbf{R}^n$  utstyrt med de vanlige operasjonene, så kan løsningsmengden  $L$  til vårt differensiallikningssystem rett og slett beskrives som *underrommet* av  $V$  utspent av disse  $n$  vektorene. Siden vektorene  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  er lineært uavhengige vektorer, følger det at de  $n$  funksjonene i (3) er lineært uavhengige som elementer av funksjonsrommet  $V$ . Ergo:

- Løsningsmengden  $L$  av differensiallikningssystemet (1), altså systemet i boksen ovenfor, er et  $n$ -dimensjonalt underrom av funksjonsrommet  $V$ .

Dette er det ofte nyttig å vite. Husk at den eneste forutsetningen vi har gjort, er at matrisen  $A$  har en egenbasis.

**Eksempel 1** Løs differensiallikningssystemet

$$\begin{cases} x' = 5x + 8y \\ y' = -x - y \end{cases}$$

med initialkrav  $x(0) = -10$  og  $y(0) = 3$ .

**Løsning** Vi følger metoden, og setter  $\mathbf{x} = [x, y]$ .

1. På matriseform  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$  blir systemet

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \text{dvs.} \quad A = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

2. Vanlig regning gir at egenverdiene til  $A$  blir  $\lambda_1 = 3$  med  $\mathbf{u}_1 = [-4, 1]$  som en tilhørende egenvektor, og  $\lambda_2 = 1$  med  $\mathbf{u}_2 = [-2, 1]$  som en tilhørende egenvektor.

3. Den generelle løsningen blir

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} e^t,$$

eller med andre ord  $x(t) = -4c_1 e^{3t} - 2c_2 e^t$  og  $y(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^t$ .  
Initialkravene gir

$$x(0) = -4c_1 - 2c_2 = -10 \quad \text{og} \quad y(0) = c_1 + c_2 = 3.$$

Dette er et likningssystem med to likninger og to ukjente  $c_1$  og  $c_2$ . Løsning gir at  $c_1 = 2$  og  $c_2 = 1$ . Så løsningen er

$$x(t) = -8e^{3t} - 2e^t, \quad y(t) = 2e^{3t} + e^t. \quad \blacksquare$$

## Inhomogene differensiallikningssystemer

Systemene vi så på i forrige avsnitt, kalles *homogene* differensiallikningssystemer. Et tilsvarende *inhomogent* system kan skrives på formen

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{b},$$

der  $A$  er en konstant  $(n \times n)$ -matrise,  $\mathbf{x}$  er vektoren av våre  $n$  ukjente funksjoner og  $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$  er en konstant vektor i  $\mathbf{R}^n$ . Nøkkelen til å løse dette systemet er:

### Teorem 1 Løsning av inhomogene difflikningssystemer

La  $\mathbf{x}_s$  være en løsning av det inhomogene systemet  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ . Da vil en funksjonsvektor  $\mathbf{x}_h$  oppfylle det tilsvarende homogene systemet  $\mathbf{x}'_h = A\mathbf{x}_h$  hvis og bare hvis  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_h + \mathbf{x}_s$  løser  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ .

**Bevis** Anta at  $\mathbf{x}'_h = A\mathbf{x}_h$ . Da er

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= (\mathbf{x}_h + \mathbf{x}_s)' = \mathbf{x}'_h + \mathbf{x}'_s \\ &= A\mathbf{x}_h + (A\mathbf{x}_s + \mathbf{b}) \\ &= A(\mathbf{x}_h + \mathbf{x}_s) + \mathbf{b} \\ &= A\mathbf{x} + \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Omvendt, hvis  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_h + \mathbf{x}_s$  oppfyller  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ , så er

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'_h &= (\mathbf{x} - \mathbf{x}_s)' = \mathbf{x}' - \mathbf{x}'_s \\ &= (A\mathbf{x} + \mathbf{b}) - (A\mathbf{x}_s + \mathbf{b}) \\ &= A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) \\ &= A\mathbf{x}_h. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Vi har nå følgende oppskrift for inhomogene differensiallikningsystemer:

#### Hvordan løse inhomogene systemer på formen $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$

1. Finn en spesiell løsning  $\mathbf{x}_s$  av det inhomogene systemet. Vanligvis fungerer det best å finne en såkalt *likevektsløsning*. Dette er en løsning der  $\mathbf{x}'_s = \mathbf{0}$ , så den oppfyller

$$A\mathbf{x}_s + \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Dette vil gi deg et lineært, inhomogent likningsystem med  $n$  likninger og  $n$  ukjente tall. Finner du en løsning  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$  av det, blir konstantløsningen din  $\mathbf{x}_s = [\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n]$ .

2. Finn egenverdiene og en egenbasis  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  for matrisen  $A$ . Metoden forutsetter at en slik egenbasis fins. Hvis  $A$  har  $n$  ulike reelle egenverdier, kan du lage en egenbasis ved å plukke én egenvektor for hver egenverdi.
3. Den generelle løsningen av det inhomogene systemet er

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{u}_1e^{\lambda_1 t} + \dots + c_n\mathbf{u}_ne^{\lambda_n t} + \mathbf{x}_s,$$

der  $\lambda_i$  er egenverdien tilhørende egenvektoren  $\mathbf{u}_i$  for hver  $i$ , og tallene  $c_1, \dots, c_n$  er integrasjonskonstanter. Tilfredsstill eventuelle initialkrav ved å tilpasse integrasjonskonstantene.

La meg til slutt nevne at metodene vi har sett på i denne seksjonen lar seg generalisere i mange retninger. Det er for eksempel ikke nødvendig at koeffisientmatrisen  $A$  til differensiallikningsystemene våre har en egenbasis for at de skal la seg løse. Man kan etablere en mer generell løsningsprosedyre ved å bruke den såkalte **Jordan-formen** for en matrise. Vi skal ikke gå inn på dette.

**Eksempel 2** Løs differensiallikningssystemet

$$\begin{cases} x' = 5x + 8y - 2 \\ y' = -x - y + 1 \end{cases}$$

med initialkrav  $x(0) = -4$  og  $y(0) = 1$ .

**Løsning** Systemet er identisk med det i forrige eksempel, bortsett fra at vi nå har ledd som gjør systemet inhomogent. Vi setter  $\mathbf{x} = [x, y]$ , skriver systemet på formen  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Her er altså

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1. Vi prøver å finne en spesiell løsning  $\mathbf{x}_s = [x, y]$  av systemet. Vi leter da etter en likevektsløsning med  $\mathbf{x}'_s = \mathbf{0}$ . Skal den passe i systemet, må den oppfylle  $A\mathbf{x}_s + \mathbf{b} = \mathbf{0}$ , det vil si

$$\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dette gir to likninger med to ukjente  $x$  og  $y$ , og løsning gir  $\bar{x} = 2$  og  $\bar{y} = -1$ .

2. Identisk med eksempel 1.
3. Den generelle løsningen blir som i eksempel 1, bortsett fra at likevektsløsningen  $\mathbf{x}_s = [\bar{x}, \bar{y}]$  slenges på bakerst:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Initialkravene gir

$$x(0) = -4c_1 - 2c_2 + 2 = -4 \quad \text{og} \quad y(0) = c_1 + c_2 - 1 = 1.$$

Fra dette får vi  $c_1 = c_2 = 1$ . Så løsningen er

$$x(t) = -4e^{3t} - e^t + 2, \quad y(t) = e^{3t} + e^t - 1. \quad \blacksquare$$



## 9.9 Oppgaver

1. Løs differensiallikningssystemet

$$\begin{cases} x' = 6x - 2y \\ y' = 4x - 3y \end{cases}$$

med initialkrav  $x(0) = 3$  og  $y(0) = -3$ .

2. Løs differensiallikningssystemet

$$\begin{cases} x' = 6x - 2y - 8 \\ y' = 4x - 3y + 3 \end{cases}$$

med initialkrav  $x(0) = 4$  og  $y(0) = 2$ .

3. Finn den generelle løsningen av difflikningssystemet

$$\begin{cases} x' = 3x - 3y - 6 \\ y' = 12x + 3y - 54 \end{cases}$$

4. Finn den generelle løsningen av differensiallikningssystemet

$$\begin{cases} x'_1 = 4x_1 + x_3 \\ x'_2 = -2x_1 + x_2 \\ x'_3 = -2x_1 + x_3 - 1 \end{cases}$$

5. La  $x(t)$  og  $y(t)$  være to funksjoner definert for alle reelle tall  $t$ . Anta videre at vekstraten til  $x(t)$  er lik

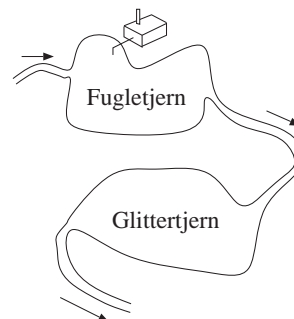
$$2y(t) + 8,$$

mens vekstraten til  $y(t)$  er lik

$$x(t) + y(t) + 5.$$

Bruk de gitte opplysningene til å sette opp et differensiallikningssystem for  $x(t)$  og  $y(t)$ , og finn funksjonene  $x(t)$  og  $y(t)$  ved å løse systemet.

6. Betrakt figuren under. Fabrikken slipper ut 6 kg gift i Fugletjern pr. døgn, og giften blander seg raskt utover i vannet. Hver av de tre elvene frakter  $3 \cdot 10^8$  liter vann pr. døgn. La  $x(t)$  og  $y(t)$  være giftinnholdet i henholdsvis Fugletjern og Glittertjern ved tid  $t$ , der tiden  $t$  måles i døgn. Tiden det tar for vannet å renne fra Fugletjern til Glittertjern er bare ca. 10 minutter, så denne tiden kan vi neglisjere i modellen vår. Vannet som renner inn i Fugletjern via elven til venstre er giftfritt.



a) Sett opp et differensiallikningssystem for  $x(t)$  og  $y(t)$  basert på antakelsene ovenfor. Hint: Merk analogien med eksemplet side 194.

b) Løs systemet med initialbetingelser  $x(0) = y(0) = 0$ . Hva vil giftmengden i de to tjernene stabilisere seg på?

7. Du har havnet på sykehus, og får en sprøyte med 10 mg av et medikament i blodet. La  $x(t)$  være medikamentmengden i blodet ditt ved tid  $t$ , målt i mg. Vi setter  $t = 0$  idet sprøyten settes, og måler tiden i timer. La videre  $y(t)$  være mengden medikament (målt i mg) som er absorbert i vevet ditt ved tid  $t$ . Vi antar at medikamentet absorberes i vevet med en rate som er proporsjonal med mengden medikament i blodet. Samtidig vil imidlertid medikament flyte tilbake fra vevet til blodet, og vi antar at dette skjer med en rate som er proporsjonal med mengden medikament i vevet. Noe av medikamentet i blodet vil dessuten utskilles til urin via leveren, og vi antar at også dette skjer med en rate som er proporsjonal med medikamentmengden i blodet.

a) Begrunn at forutsetningene i teksten ovenfor leder til et differensiallikningssystem på formen

$$\begin{cases} x' = ay - (b + c)x \\ y' = bx - ay \end{cases}$$

der  $a, b, c, d$  er positive konstanter. Hvilken initialbetingelse har vi?

b) Løs systemet når  $a = 2, b = 4$  og  $c = 1$  (alle målt i  $\text{h}^{-1}$ ), med den aktuelle initialbetingelsen. Hva skjer i grensen  $t \rightarrow \infty$ ?

## 9.10 Anvendelse: Lineære differensiallikninger

I denne seksjonen skal vi se på en spesiell type differensiallikninger som kalles *lineære differensiallikninger med konstante koeffisienter*. De har én funksjon  $y = y(t)$  som ukjent, og de *homogene* utgavene av disse systemene kan skrives på formen

$$c_n y^{(n)} + \cdots + c_3 y^{(3)} + c_2 y'' + c_1 y' + c_0 y = 0. \quad (1)$$

Hvis  $c_n \neq 0$ , sier man at *ordenen* til likningen (1) er  $n$ . Vi så på tilfellet  $n = 2$  i seksjon 10.0.0. Vi skal nå se at man generelt kan omforme likningen (1) til et differensiallikningssystem av den typen vi studerte i forrige seksjon. Trikket er å innføre nye funksjoner

$$x_1(t) = y(t), \quad x_2(t) = y'(t), \quad x_3(t) = y''(t), \quad \dots \quad x_n = y^{(n-1)}(t).$$

Da vil funksjonene  $x_j$  oppfylle systemet

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ &\vdots \\ x_{n-1}' &= x_n \\ c_n x_n' + c_{n-1} x_n + \cdots + c_2 x_3 + c_1 x_2 + c_0 x_1 &= 0. \end{aligned}$$

I den siste likningen kan man flytte alle leddene unntatt det første over på høyre side, og fordi  $c_n \neq 0$  kan man også dele på  $c_n$  og derved få  $x_n'$  alene på venstre side. Systemet havner da i formen  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$  som vi studerte i forrige seksjon, og du kan bruke teknikkene derfra for å løse det.

### Inhomogene likninger

La oss nå se på den inhomogene likningen

$$c_n y^{(n)} + \cdots + c_3 y^{(3)} + c_2 y'' + c_1 y' + c_0 y = f(t). \quad (2)$$

der  $f(t)$  er en gitt funksjon av  $t$  som ikke er identisk lik null for alle  $t$ . Vi forutsetter fortsatt at koeffisientene  $c_j$  er konstante tall, med  $c_n \neq 0$ . Prinsippene for å løse (2) er helt analoge til prinsippene for løsning av inhomogene differensiallikningssystemer som vi så på i forrige seksjon. Du kan gå frem slik:

1. Finn en spesiell løsning  $y_s(t)$  av den inhomogene likningen (2). Prøv for eksempel med et polynom av grad  $n$ . Av og til må du øke graden.

2. Finn den generelle løsningen  $x_h(t)$  av den tilsvarende homogene likningen du får fra (1) når  $f(t)$  erstattes med 0. Metoden for dette ble beskrevet ovenfor.
3. Den generelle løsningen av den inhomogene likningen (2) er

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_h(t) + \mathbf{x}_s(t).$$

Her vil den generelle løsningen  $\mathbf{x}_h(t)$  av den homogene likningen inneholde integrasjonskonstanter, og disse kan vi bruke til å tilfredsstille eventuelle initialbetingelser.

## 9.10 Oppgaver

### 1. Gitt differensiallikningen

$$y'' + 4y' + 4y = 0. \quad (1)$$

- a) Vis at hvis vi lar  $x_1 = y$  og  $x_2 = y'$ , så er (1) ekvivalent med

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -4x_1 - 4x_2 \end{cases} \quad (2)$$

- b) Finn generell løsning av (2), og bruk dette til å finne den generelle løsning av (1). Sammenlikne svaret med eksempel MIP 9.9.1.

### 2. Finn den generelle løsningen av difflikningen

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 3t.$$

### 3. I denne oppgaven skal vi studere likningen

$$y'' + ay' + by = 0, \quad (1)$$

der  $a$  og  $b$  er reelle konstanter.

- a) Vis at hvis  $x_1 = y$  og  $x_2 = y'$ , er (1) ekvivalent med

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -bx_1 - ax_2 \end{cases} \quad (2)$$

- b) Vis at egenverdiene  $\lambda$  til koeffisientmatrisen i (1) er gitt ved likningen

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0. \quad (3)$$

- c) Anta at likningen (3) har to ulike reelle egenverdier  $\lambda_1$  og  $\lambda_2$ . Vis at den generelle løsningen av (1) da er

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t},$$

der  $c_1$  og  $c_2$  er integrasjonskonstanter. (Vi har dermed vist teorem MIP 9.9.1 i tilfellet to ulike reelle egenverdier.)

### 4. I denne oppgaven skal vi studere likningen

$$y''' + ay'' + by' + cy = 0, \quad (1)$$

der  $a$ ,  $b$  og  $c$  er reelle konstanter.

- a) Vis at hvis  $x_1 = y$ ,  $x_2 = y'$  og  $x_3 = y''$  er (1) ekvivalent med

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ x_3' = -cx_1 - bx_2 - ax_3 \end{cases} \quad (2)$$

- b) Vis at egenverdiene  $\lambda$  til koeffisientmatrisen i (1) er gitt ved likningen

$$\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0. \quad (3)$$

- c) Anta at likningen (3) har tre ulike reelle egenverdier  $\lambda_1$  og  $\lambda_2$ . Vis at den generelle løsningen av (1) da er

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 e^{\lambda_3 t},$$

der  $c_1$  og  $c_2$  er integrasjonskonstanter.



# Kapittel 10

## Reelle indreproduktrom

---

*Dette kapitlet bygger på kapitlene 1, 5, 6 og 9 samt hele MIP.*

---

## 10.1 Indreprodukter

Også i dette kapitlet skal begrepet “vektorrom” bety et *reelt* vektorrom, se definisjonene i begynnelsen av forrige kapittel. I våre generelle teori for reelle vektorrom har vi foreløpig ikke introdusert noen analogi til *prikkproduktet*

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

av to vektorer i  $\mathbf{R}^n$ . Dette skal vi gjøre nå, ved at vi innfører begrepet *indreprodukt* i et generelt vektorrom. Vi skal bruke notasjonen

$$\langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle$$

for indreproduktet av to vektorer i et vilkårlig vektorrom  $V$ . Vi innfører begrepet ved å sette opp aksiomer som krever at indreproduktet har en del egenskaper som vi vet at prikkproduktet i  $\mathbf{R}^n$  har.

### Definisjon 1 Indreproduktrom

Et **indreprodukt** på et vektorrom  $V$  er en funksjon som til hvert par av vektorer  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$  tilordner et reelt tall  $\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle$ , slik at følgende aksiomer er oppfylt for alle  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$  og alle skalarer  $r$ :

$$I1 \quad \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v} | \mathbf{u} \rangle$$

$$I2 \quad \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u} | \mathbf{w} \rangle$$

$$I3 \quad \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = r \langle \mathbf{u} | r\mathbf{v} \rangle$$

$$I4 \quad \langle \mathbf{u} | \mathbf{u} \rangle \geq 0, \text{ og } \langle \mathbf{u} | \mathbf{u} \rangle = 0 \text{ hvis og bare hvis } \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Med et **indreproduktrom** menes et vektorrom  $V$  der det er spesifisert et indreprodukt.

Aksiomene I2 og I3 kan oppsummeres ved å si at indreproduktet er lineært i andre faktor. Kombinerer man disse aksiomene med I1, kan man vise at det er lineært i første faktor også. For eksempel fås

$$\langle \mathbf{u} + \mathbf{v} | \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{w} | \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{w} | \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{w} | \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u} | \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v} | \mathbf{w} \rangle.$$

Neste definisjon gir analogien til *lengden*  $|\mathbf{v}|$  av en vektor i  $\mathbf{R}^n$ .

### Definisjon 2 Norm og avstand

La  $V$  være et indreproduktrom. Med **normen**  $\|\mathbf{v}\|$  til en vektor  $\mathbf{v}$  menes

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v} | \mathbf{v} \rangle}.$$

Med *avstanden* fra  $\mathbf{v}$  til en annen vektor  $\mathbf{w}$  i  $V$  menes normen av vektoren  $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ , altså  $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$ .

**Eksempel 1** La  $V = \mathbf{R}^n$  med indreprodukt  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  som det vanlige prikkproduktet. Normen av en vektor  $\mathbf{a}$  er da

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\langle \mathbf{a} | \mathbf{a} \rangle} = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{|\mathbf{a}|^2} = |\mathbf{a}|.$$

Normen til  $\mathbf{a}$  er altså det samme som lengden til vektoren  $\mathbf{a}$ . ■

### Teorem 1 Egenskaper ved normer

La  $V$  være et indreproduktrom, la  $\mathbf{u}$  og  $\mathbf{v}$  være vektorer i  $V$ , og la  $r$  være en skalar. Da gjelder:

1.  $\|r\mathbf{u}\| = |r| \|\mathbf{u}\|$
2.  $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$  (Cauchy-Schwarz-ulikheten)
3.  $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$  (Trekantulikheten)

**Bevis** (1): Vi har

$$\begin{aligned} \|r\mathbf{u}\| &= \langle r\mathbf{u} | r\mathbf{u} \rangle \\ &= r \langle \mathbf{u} | r\mathbf{u} \rangle = r^2 \langle \mathbf{u} | \mathbf{u} \rangle \quad (\text{ved I3, to ganger}) \\ &= r^2 \|\mathbf{u}\|^2 \quad (\text{ved definisjon 10.1.2}). \end{aligned}$$

(2) og (3): Disse bevises på akkurat samme måte som teorem 10.0.0 punkt 8 og 9. Reglene som brukes for prikkproduktet  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  i disse bevisene gjelder også for generelle indreprodukter  $\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle$ , så det er bare å erstatte  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  med  $\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle$  overalt. ■

Neste definisjon er også i full analogi med situasjonen i  $\mathbf{R}^n$ , se definisjonen gitt i MIP 10.1.2.

### Definisjon 3 Vinkel mellom vektorer, ortogonalitet

Med *vinkelen* mellom to vektorer  $\mathbf{u}$  og  $\mathbf{v}$  i et indreproduktrom menes

$$\theta = \arccos \frac{\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}.$$

Hvis  $\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = 0$ , sies vektorene  $\mathbf{u}$  og  $\mathbf{v}$  å være *ortogonale*.

At  $\mathbf{u}$  og  $\mathbf{v}$  er ortogonale, tilsvarer altså at vinkelen  $\theta$  mellom vektorene er  $\theta = \arccos 0 = \pi/2$ , som seg hør og bør.

**Definisjon 4 Ortonormale og ortogonale basiser**

En basis  $B$  for et indreproduktrom  $V$  kalles *ortogonal* dersom alle basisvektorene i  $B$  er parvis ortogonale. Hvis alle basisvektorene i tillegg har norm 1, kalles basisen *ortonormal*.

Neste teorem viser at i et endeligdimensjonalt indreproduktrom med en ortonormal basis  $B$  kan man finne komponentene til en vektor  $\mathbf{v}$  i basisen  $B$  ved å ta indreproduktet av  $\mathbf{v}$  med de ulike basisvektorene.

**Teorem 2 Komponenter i ortonormale basiser**

La  $V$  være et endeligdimensjonalt indreproduktrom av dimensjon  $n$ , og anta at  $B = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$  er en ortonormal basis for  $V$ . Hvis  $\mathbf{v}$  er en vilkårlig vektor i  $V$ , gjelder

$$\mathbf{v} = \langle \mathbf{b}_1 | \mathbf{v} \rangle \mathbf{b}_1 + \langle \mathbf{b}_2 | \mathbf{v} \rangle \mathbf{b}_2 + \dots + \langle \mathbf{b}_n | \mathbf{v} \rangle \mathbf{b}_n$$

Med andre ord, koordinatvektoren til  $\mathbf{v}$  i basisen  $B$  er

$$[\mathbf{v}]_B = [\langle \mathbf{b}_1 | \mathbf{v} \rangle, \langle \mathbf{b}_2 | \mathbf{v} \rangle, \dots, \langle \mathbf{b}_n | \mathbf{v} \rangle].$$

**Bevis** Siden  $B$  er en basis for  $V$ , finnes det skalarer  $c_i$  slik at

$$\mathbf{v} = c_1 \mathbf{b}_1 + c_2 \mathbf{b}_2 + \dots + c_n \mathbf{b}_n.$$

Tar vi indreproduktet med  $\mathbf{b}_1$  på begge sider av denne likningen, får vi

$$\langle \mathbf{b}_1 | \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{b}_1 | c_1 \mathbf{b}_1 + c_2 \mathbf{b}_2 + \dots + c_n \mathbf{b}_n \rangle.$$

Ved bruk av I1 og I2 får vi at dette kan skrives

$$\langle \mathbf{b}_1 | \mathbf{v} \rangle = c_1 \langle \mathbf{b}_1 | \mathbf{b}_1 \rangle + c_2 \langle \mathbf{b}_1 | \mathbf{b}_2 \rangle + \dots + c_n \langle \mathbf{b}_1 | \mathbf{b}_n \rangle.$$

Men siden basisen  $B$  er ortogonal, er alle indreproduktene på høyre side unntatt det første lik 0. Vi har  $\langle \mathbf{b}_1 | \mathbf{b}_1 \rangle = 1$ , så konklusjonen er  $\langle \mathbf{b}_1 | \mathbf{v} \rangle = c_1$ . På tilsvarende måte får vi  $\langle \mathbf{b}_i | \mathbf{v} \rangle = c_i$  for  $2 \leq i \leq n$ . ■

I en ortonormal basis for et endeligdimensjonalt indreproduktrom kan indreproduktet av to vektorer regnes ut på den måten vi forventer:



Men siden vektorene  $\mathbf{v}_i$  er parvis ortogonale, er alle indreproduktene på venstre side unntatt det første lik 0. Konklusjonen er at

$$c_1 \langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_1 \rangle = 0.$$

Siden  $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$ , er  $\langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_1 \rangle \neq 0$  ved I4. Ergo er  $c_1 = 0$ . På akkurat samme måte kan vi vise at  $c_2, \dots, c_k$  er 0 også. Dette er en selvmotsigelse, så vi har vist at vektorene i  $S$  ikke er lineært avhengige. ■

## 10.1 Oppgaver

**1.** Avgjør om det oppgitte forslag til  $\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle$  definerer et indreprodukt på vektorrommet  $\mathbf{R}^2$ . Hvis det ikke er et indreprodukt, så oppgi et aksiom blant I1–I4 som ikke holder. Vi setter  $\mathbf{u} = [u_1, u_2]$  og  $\mathbf{v} = [v_1, v_2]$ .

- $\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = u_1 u_2 + v_1 v_2$
- $\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 + 2u_2 v_2$

**2.** I denne oppgaven skal vi definere et indreprodukt på vektorrommet  $P_\infty$  av alle polynomfunksjoner. Hvis  $f$  og  $g$  er elementer i  $P_\infty$ , definerer vi

$$\langle f | g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt.$$

- Vis at aksiomene I1–I3 er oppfylt for dette indreproduktet.
- Begrunn at et polynom  $f$  kan være oppfylle  $f(t) = 0$  kun for et endelig antall punkter.
- Bruk forrige punkt til å begrunne at også aksiom I4 er oppfylt for indreproduktet vi har definert på  $P_\infty$ .
- Finn  $\langle t^2 - 1 | t^3 \rangle$ .
- Finn  $\|t^2 - 1\|$  og  $\|t^3\|$ .
- Finn avstanden mellom de to polynomene  $f(t) = t^2 - 1$  og  $g(t) = t^3$ .
- Finn vinkelen mellom de to polynomene  $f(t) = t^2 - 1$  og  $g(t) = t^3$ .

**3.** Avgjør om det oppgitte forslag til  $\langle f | g \rangle$  definerer et indreprodukt på vektorrommet  $P_\infty$  av polynomer. Hvis det ikke er et indreprodukt, så oppgi hvilke av aksiomene I1–I4 som ikke holder.

- $\langle f | g \rangle = f(0)g(0)$
- $\langle f | g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)e^{-t} dt$

**4.** I oppgave 10.1.2 var intervallet  $[0, 1]$  temmelig tilfeldig valgt. Ved akkurat samme teknikk kan man vise at

$$\langle f | g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt$$

definerer et indreprodukt på vektorrommet  $P_2$  av polynomer med grad høyst 2. Vis at med dette indreproduktet er

$$B = \{\sqrt{1/2}, (\sqrt{3/2})t, \sqrt{5/8}(t^2 - 1/3)\}$$

en ortonormal basis for  $P_2$ . Finn komponentvektoren  $[p]_B$  til polynomet  $p(t) = t^2$  i basisen  $B$ , og bruk så teorem 10.1.3 til å beregne normen  $\|p\|$  til  $p$ . Kontroller svaret ved å beregne normen til  $p$  direkte som  $\|p\| = \langle p | p \rangle^{1/2}$ .

**5.** Vis at for alle vektorer  $\mathbf{u}$  og  $\mathbf{v}$  i et indreproduktrom gjelder

- $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + 2\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle$
- $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 4\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle$
- $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2$
- $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$
- $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \geq \|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\|$

**6.** *Generalisering av cosinus-setningen.* Vis at hvis  $\mathbf{u}$  og  $\mathbf{v}$  er to elementer i et indreproduktrom som danner vinkelen  $\theta$  med hverandre, så gjelder

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2 \cdot \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos \theta.$$

**7.** La  $C[a, b]$  være vektorrommet av kontinuerlige funksjoner  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ , og la  $w \in C[a, b]$  være en funksjon som oppfyller  $w(x) > 0$  for alle  $x \in [a, b]$ . For alle  $f$  og  $g$  i  $C[a, b]$ , la

$$\langle f | g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)w(x) dx$$

Vis at dette er et indreprodukt på  $C[a, b]$ . (Man kaller  $w$  *vektfunksjonen* for indreproduktet.)

**8.** Anta at  $T : V \rightarrow W$  er en isomorfi mellom to vektorrom, og at  $W$  er et indreproduktrom. For alle  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$  definerer vi

$$\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = \langle T(\mathbf{u}) | T(\mathbf{v}) \rangle.$$

Vis at dette gir oss et indreprodukt på  $V$ .

**9.** La  $P_2$  være vektorrommet av polynomer med grad høyst 2, utstyrt med indreproduktet  $\langle f | g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt$ . La  $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow P_2$  være avbildningen gitt ved at  $[a, b, c]$  er koordinatvektoren til  $T([a, b, c])$  i basisen  $\{1, x, x^2\}$  for  $P_2$ .

a) Vis at  $T$  er en isomorfi.

Vi definerer et nytt indreprodukt på  $\mathbf{R}^3$  ved å bruke konstruksjonen fra forrige oppgave, dvs. vi definerer  $\langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle = \langle T(\mathbf{a}) | T(\mathbf{b}) \rangle$  for alle  $\mathbf{a}$  og  $\mathbf{b}$  i  $\mathbf{R}^3$ .

b) Finn  $\langle [1, 0, 0] | [0, 1, 0] \rangle$  i henhold til dette nye indreproduktet.

## 10.2 Gram-Schmidt-prosessen

Hovedresultatet i denne seksjonen er følgende teorem, som forteller oss hvordan vi kan konstruere en ortonormal basis ut fra en vilkårlig, gitt basis.

### **Teorem 1 Gram-Schmidt-prosessen**

La  $U$  være et endeligdimensjonalt underrom av et indreproduktrom  $V$ , og la  $B = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k\}$  være en basis for  $U$ . Da kan vi konstruere en ortonormal basis  $B' = \{\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_k\}$  for  $U$  på følgende måte: Først setter vi

$$\mathbf{m}_1 = \mathbf{a}_1$$

og  $\mathbf{q}_1 = \mathbf{m}_1 / \|\mathbf{m}_1\|$ . Så setter vi

$$\mathbf{m}_2 = \mathbf{a}_2 - \langle \mathbf{q}_1 | \mathbf{a}_2 \rangle \mathbf{q}_1$$

og  $\mathbf{q}_2 = \mathbf{m}_2 / \|\mathbf{m}_2\|$ . Så setter vi

$$\mathbf{m}_3 = \mathbf{a}_3 - \langle \mathbf{q}_1 | \mathbf{a}_3 \rangle \mathbf{q}_1 - \langle \mathbf{q}_2 | \mathbf{a}_3 \rangle \mathbf{q}_2$$

og  $\mathbf{q}_3 = \mathbf{m}_3 / \|\mathbf{m}_3\|$ . Slik fortsetter vi opp til  $\mathbf{b}_k$ .

**Bevis** Vektorene  $\mathbf{q}_i$  har alle norm 1, fordi

$$\|\mathbf{q}_i\| = \|\mathbf{m}_i\| / \|\mathbf{m}_i\| = 1$$

ved bruk av teorem 10.1.1 punkt 1. Ved teorem 10.1.4 gjenstår det bare å vise at de er parvis ortogonale. Siden vektoren  $\mathbf{q}_i$  er lik mellomregningsvektoren  $\mathbf{m}_i$  ganget med en skalar, holder det da å sjekke at hver ny vektor  $\mathbf{m}_i$  som dannes i prosessen er ortogonal på de foregående vektorene  $\mathbf{q}_j$  for  $j < i$ . Vi har

$$\mathbf{m}_i = \mathbf{a}_i - \langle \mathbf{q}_1 | \mathbf{a}_i \rangle \mathbf{q}_1 - \dots - \langle \mathbf{q}_{i-1} | \mathbf{a}_i \rangle \mathbf{q}_{i-1}.$$

Tar vi indreproduktet med  $\mathbf{q}_j$  på begge sider og bruker egenskapene I2 og I3, får vi

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{q}_j | \mathbf{m}_i \rangle &= \left\langle \mathbf{q}_j \left| \mathbf{a}_i - \langle \mathbf{q}_i | \mathbf{a}_i \rangle \mathbf{q}_1 - \cdots - \langle \mathbf{q}_{i-1} | \mathbf{a}_i \rangle \mathbf{q}_{i-1} \right. \right\rangle \\ &= \langle \mathbf{q}_j | \mathbf{a}_i \rangle - \langle \mathbf{q}_1 | \mathbf{a}_i \rangle \langle \mathbf{q}_j | \mathbf{q}_1 \rangle - \cdots - \langle \mathbf{q}_{i-1} | \mathbf{a}_i \rangle \langle \mathbf{q}_j | \mathbf{q}_{i-1} \rangle.\end{aligned}$$

Ved induksjonshypotesen er  $\mathbf{q}_j$  ortogonal på alle de tidligere vektorene  $\mathbf{q}_k$  for  $j \neq k$ , der  $k \leq i$ . Ergo det kun leddet med  $\langle \mathbf{q}_j, \mathbf{q}_j \rangle$  som overlever blant de leddene som trekkes fra på høyre side:

$$\langle \mathbf{q}_j | \mathbf{m}_i \rangle = \langle \mathbf{q}_j | \mathbf{a}_i \rangle - \langle \mathbf{q}_j | \mathbf{a}_i \rangle \langle \mathbf{q}_j, \mathbf{q}_j \rangle.$$

Setter vi inn at  $\langle \mathbf{q}_j, \mathbf{q}_j \rangle = 1$ , får vi her at  $\langle \mathbf{q}_j | \mathbf{m}_i \rangle = 0$ . ■

### Korollar 2 Utvidelse til ortonormal basis

Hvis  $S$  er en samling parvis ortogonale vektorer av lengde 1 i et endeligdimensjonalt indreproduktrom  $V$ , så finnes det en ortonormal basis for  $V$  der alle vektorene fra  $S$  er med.

**Bevis** Ved teorem 9.1.7 kan  $S$  utvides til en basis for  $V$ . Denne basisen kan så gjøres ortonormal ved Gram-Schmidt-prosessen. Hvis vi sørger for at vektorene fra  $S$  kommer først i Gram-Schmidt-prosessen, blir disse vektorene ikke endret i prosessen. ■

## QR-faktorisering

Vi skal nå se på en konsekvens av Gram-Schmidt-teoremet som er viktig i forbindelse med numeriske beregninger. En matrise kalles *øvre triangulær* hvis den har kun nuller under diagonalen. Tilsvarende kalles en matrise *nedre triangulær* hvis den har kun nuller over diagonalen. En matrise som både er øvre triangulær og nedre triangulær, kan ha elementer forskjellig fra 0 kun langs diagonalen. En slik matrise kalles *diagonal*. Neste teorem viser at en  $(n \times k)$ -matrise  $A$  med lineært uavhengige søyler alltid kan skrives som et produkt

$$A = QR,$$

der  $Q$  er en  $(n \times k)$ -matrise med ortonormale kolonnevektorer  $\mathbf{q}_i$ , og  $R$  er en øvre-triangulær, invertibel  $(k \times k)$ -matrise.

**Teorem 3 QR-faktorisering**

La  $A$  være en  $(n \times k)$ -matrise med lineært uavhengige søylevektorer, altså

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_k \end{bmatrix}$$

der  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$  er lineært uavhengige vektorer i  $\mathbf{R}^n$ . Hvis  $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_k$  er vektorene vi får når vi bruker Gram-Schmidt (teorem 10.2.1) på  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ , har vi

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 & \cdots & \mathbf{q}_k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \langle \mathbf{q}_1 | \mathbf{a}_1 \rangle & \langle \mathbf{q}_1 | \mathbf{a}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{q}_1 | \mathbf{a}_k \rangle \\ 0 & \langle \mathbf{q}_2 | \mathbf{a}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{q}_2 | \mathbf{a}_k \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \langle \mathbf{q}_k | \mathbf{a}_k \rangle \end{bmatrix}$$

**Bevis** Vi bruker Gram-Schmidt-prosessen med vektorene  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$  som utgangspunkt. På stadium  $j$  i prosessen har vi funnet vektorene  $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_j$ . Vi har

$$\text{Sp} \{ \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_j \} = \text{Sp} \{ \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_j \},$$

rett og slett fordi vi godt kunne gjort prosessen med kun vektorene  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_j$  som utgangspunkt. Ergo kan vektoren  $\mathbf{a}_j$  skrives som en lineærkombinasjon av vektorene  $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_j$ . Ved teorem 10.1.2 har vi da

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= \langle \mathbf{q}_1 | \mathbf{a}_1 \rangle \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{a}_2 &= \langle \mathbf{q}_1 | \mathbf{a}_2 \rangle \mathbf{q}_1 + \langle \mathbf{q}_2 | \mathbf{a}_2 \rangle \mathbf{q}_2, \end{aligned}$$

og så videre. Dette er resultatet som er uttrykt i QR-faktoriseringen angitt i teorem 10.2.1. Sjekk det ved å gange sammen matrisene  $Q$  og  $R$ . Siden hver  $\mathbf{a}_j$  ligger i  $\text{Sp} \{ \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_j \}$  men ikke i  $\text{Sp} \{ \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{j-1} \}$ , er alle tallene  $\langle \mathbf{q}_j | \mathbf{a}_j \rangle$  langs diagonalen i matrisen  $R$  forskjellig fra 0. Ergo er  $R$  inverterbar. ■

**10.2 Oppgaver**

**1.** Bruk Gram-Schmidt-prosessen med utgangspunkt i vektorene  $\mathbf{a}_1 = [1, 1, 1]$ ,  $\mathbf{a}_2 = [1, 1, 0]$  og  $\mathbf{a}_3 = [1, 0, 0]$  til å finne en ortonormal basis for vektorrommet  $\mathbf{R}^3$ .

**2.** Finn en ortonormal basis for underrommet av  $\mathbf{R}^3$  utspent av de to vektorene  $[1, 0, 1]$  og  $[1, 1, 1]$ .

**3.** Finn en ortonormal basis for underrommet av  $\mathbf{R}^4$  utspent av de

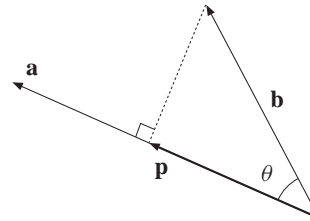
tre vektorene  $[1, 2, 0, 2]$ ,  $[2, 1, 1, 1]$  og  $[1, 0, 1, 1]$ .

**4.** Bruk resultatet av forrige oppgave til å finne en QR-faktorisering av matrisen

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

## 10.3 Prosjeksjoner

Vi skal begynne med å definere hva som menes med *projeksjonen* av en vektor  $\mathbf{b}$  langs en annen vektor  $\mathbf{a}$ , der både  $\mathbf{a}$  og  $\mathbf{b}$  ligger i et felles vektorrom  $V$ . Dette begrepet har en intuitiv geometrisk tolkning i tilfellet  $V = \mathbf{R}^2$ , se figuren under.



Vi ønsker at projeksjonen av vektoren  $\mathbf{b}$  på vektoren  $\mathbf{a}$  skal være vektoren  $\mathbf{p}$  på figuren. De tre vektorene  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  og  $\mathbf{p}$  tenkes alle å starte i det felles punktet helt til høyre på figuren. Vektoren  $\mathbf{p}$  skal altså være parallell med  $\mathbf{a}$ , og lengden av  $\mathbf{p}$  skal være “komponenten” til  $\mathbf{b}$  parallellt med  $\mathbf{a}$ . Vi ser fra figuren at i så fall må lengden av  $\mathbf{p}$  være  $\|\mathbf{b}\| \cos \theta$ , der  $\theta$  er vinkelen mellom  $\mathbf{a}$  og  $\mathbf{b}$ . Altså

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \|\mathbf{b}\| \cos \theta \cdot (\text{enhetsvektoren med samme retning som } \mathbf{a}) \\ &= \|\mathbf{b}\| \cdot \cos \theta \cdot \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} = \|\mathbf{b}\| \cdot \frac{\langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|} \cdot \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} \\ &= \frac{\langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{a}\|} \mathbf{a} = \frac{\langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle}{\langle \mathbf{a} | \mathbf{a} \rangle} \mathbf{a} \end{aligned}$$

Dette bruker vi som *definisjon* av projeksjonen i et vilkårlig vektorrom:

### Definisjon 1 Prosjeksjon av en vektor langs en vektor

La  $V$  være et indreproduktrom, og la  $\mathbf{a}$  og  $\mathbf{b}$  være vektorer i  $V$ . Med *projeksjonen* av vektoren  $\mathbf{b}$  langs vektoren  $\mathbf{a}$  menes da vektoren  $\mathbf{p}$  gitt ved

$$\mathbf{p} = \frac{\langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle}{\langle \mathbf{a} | \mathbf{a} \rangle} \mathbf{a}.$$

Vi skal også definere hva som menes med projeksjonen av en vektor *på et underrom*. Da trenger vi følgende begrep.

**Definisjon 2 Ortogonalt komplement**

La  $V$  være et vektorrom, og la  $U$  være et underrom av  $V$ . Mengden av vektorer  $\mathbf{v} \in V$  som er ortogonale til *alle* vektorene i  $U$ , kalles det *ortogonale komplementet* til underrommet  $U$  og betegnes med  $U^\perp$ .

De viktigste egenskapene ved det ortogonale komplementet  $U^\perp$  til et underrom  $U$  er oppsummert i neste teorem.

**Teorem 1 Egenskaper ved det ortogonale komplementet**

La  $V$  være et vektorrom, og la  $U$  være et underrom av  $V$ . Da gjelder:

1.  $U^\perp$  er et underrom av vektorrommet  $V$
2. Hvis  $U$  er endeligdimesjonalt, finnes det til hver vektor  $\mathbf{v} \in V$  en unik vektor  $\mathbf{v}_U$  i underrommet  $U$  og en unik vektor  $\mathbf{v}_{U^\perp}$  i det ortogonale komplementet slik at

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_U + \mathbf{v}_{U^\perp}.$$

Videre er normen  $\|\mathbf{v}\|$  gitt ved den "Pythagoreiske" formelen

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{v}_U\|^2 + \|\mathbf{v}_{U^\perp}\|^2.$$

**Bevis** (1) Ved teorem 9.1.5 holder det å sjekke at  $U^\perp$  er lukket under vektoraddisjon og multiplikasjon med skalarer. For å sjekke det første, anta at  $\mathbf{a}$  og  $\mathbf{b}$  ligger i  $U^\perp$ . La  $\mathbf{v}$  være en vilkårlig vektor i  $V$ . Da er

$$\langle \mathbf{v} | \mathbf{a} + \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{v} | \mathbf{a} \rangle + \langle \mathbf{v} | \mathbf{b} \rangle = 0 + 0 = 0$$

ved bruk av I2 fra definisjon 10.1.1 i annen overgang. Ergo er  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  i  $U^\perp$ . Tilsvarende får vi at  $r\mathbf{a}$  ligger i  $U^\perp$ , fordi ved I3 er

$$\langle \mathbf{v} | r\mathbf{a} \rangle = r\langle \mathbf{v} | \mathbf{a} \rangle = r \cdot 0 = 0.$$

(2) Ved teorem 10.2.1 har  $U$  en ortonormal basis  $B = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ . Gitt  $\mathbf{v} \in V$ , definer vektorene  $\mathbf{v}_U$  og  $\mathbf{v}_{U^\perp}$  ved

$$\mathbf{v}_U = \langle \mathbf{b}_1 | \mathbf{v} \rangle \mathbf{b}_1 + \dots + \langle \mathbf{b}_n | \mathbf{v} \rangle \mathbf{b}_n \quad (3)$$

og  $\mathbf{v}_{U^\perp} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_U$ . Siden  $\mathbf{v}_U$  er en lineærkombinasjon av basiselementene i  $B$ , ligger  $\mathbf{v}_U$  i underrommet  $U$ . For å bevise at  $\mathbf{v}_{U^\perp}$  ligger i  $U^\perp$ , tar vi indreproduktet av  $\mathbf{v}_{U^\perp}$  med en vilkårlig basisvektor  $\mathbf{b}_i$  fra basisen  $B$ . Vi får da

$$\langle \mathbf{b}_i | \mathbf{v}_{U^\perp} \rangle = \langle \mathbf{b}_i | \mathbf{v} - \mathbf{v}_U \rangle = \langle \mathbf{b}_i | \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{b}_i | \mathbf{v}_U \rangle.$$

Men fra (3) følger ved teorem 10.1.2 at  $\langle \mathbf{b}_i | \mathbf{v}_U \rangle = \langle \mathbf{b}_i | \mathbf{v} \rangle$ , så

$$\langle \mathbf{b}_i | \mathbf{v}_{U^\perp} \rangle = \langle \mathbf{b}_i | \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{b}_i | \mathbf{v} \rangle = 0.$$

Ergo er  $\mathbf{v}_{U^\perp}$  ortogonal til alle basisvektorene i basisen  $B$  for underrommet  $U$ . Hvis da  $\mathbf{u} = c_1 \mathbf{b}_1 + \cdots + c_n \mathbf{b}_n$  er en vilkårlig vektor i underrommet  $U$ , får vi

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}_{U^\perp} | \mathbf{u} \rangle &= \langle \mathbf{v}_{U^\perp} | c_1 \mathbf{b}_1 + \cdots + c_n \mathbf{b}_n \rangle \\ &= c_1 \langle \mathbf{v}_{U^\perp} | \mathbf{b}_1 \rangle + \cdots + c_n \langle \mathbf{v}_{U^\perp} | \mathbf{b}_n \rangle = 0. \end{aligned}$$

Ergo er  $\mathbf{v}_{U^\perp}$  ortogonal til samtlige vektorer i  $U$ , slik at  $\mathbf{v}_{U^\perp}$  ligger i  $U^\perp$ .

Vi skal nå bevise at oppsplittingen  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_U + \mathbf{v}_{U^\perp}$  er unik. Anta at  $\mathbf{v}$  har to slike oppsplittinger, det vil si

$$\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{x}^\perp \quad \text{og} \quad \mathbf{v} = \mathbf{y} + \mathbf{y}^\perp$$

der  $\mathbf{x}$  og  $\mathbf{y}$  ligger i  $U$  og  $\mathbf{x}^\perp$  og  $\mathbf{y}^\perp$  ligger i  $U^\perp$ . Vi får

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = (\mathbf{v} - \mathbf{x}^\perp) - (\mathbf{v} - \mathbf{y}^\perp) = \mathbf{y}^\perp - \mathbf{x}^\perp.$$

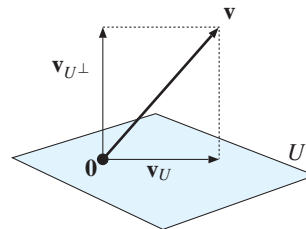
Ved (1) er  $U^\perp$  et underrom av  $V$ , så dette betyr at  $\mathbf{x} - \mathbf{y}$  er i  $U^\perp$ . Men samtidig ligger  $\mathbf{x} - \mathbf{y}$  i  $U$ , siden  $U$  er et underrom. Det eneste elementet i  $V$  som ligger i både  $U$  og  $U^\perp$  er nullvektoren  $\mathbf{0}$ , fordi denne er det eneste elementet i  $V$  som er ortogonalt til seg selv. Ergo er

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{0}, \quad \text{så} \quad \mathbf{x} = \mathbf{y}.$$

Dette viser at at splittingen  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_U + \mathbf{v}_{U^\perp}$  er unik. Til slutt får vi

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|^2 &= \langle \mathbf{v} | \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}_U + \mathbf{v}_{U^\perp}, \mathbf{v}_U + \mathbf{v}_{U^\perp} \rangle \\ &= \langle \mathbf{v}_U | \mathbf{v}_U \rangle + \langle \mathbf{v}_U | \mathbf{v}_{U^\perp} \rangle + \langle \mathbf{v}_{U^\perp} | \mathbf{v}_U \rangle + \langle \mathbf{v}_{U^\perp} | \mathbf{v}_{U^\perp} \rangle \\ &= \|\mathbf{v}_U\|^2 + 0 + 0 + \|\mathbf{v}_{U^\perp}\|^2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Likningen  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_U + \mathbf{v}_{U^\perp}$  i forrige teorem kan illustreres som på figuren under.



Vektoren  $\mathbf{v}_U$  ligger i underrommet  $U$ , og står vinkelrett på  $\mathbf{v}_{U^\perp}$ . Med andre ord oppfører  $\mathbf{v}_U$  seg som “skyggen” av  $\mathbf{v}$  ned på underrommet  $U$  når lyskilden er plassert vinkelrett ned mot på  $U$ . Vektoren  $\mathbf{v}_U$  er akkurat det vi ønsker å definere som projeksjonen av  $\mathbf{v}$  på underrommet  $U$ . Ved likning (3) i beviset ovenfor kan vi formulere definisjonen som følger:

### Definisjon 3    Projeksjon på underrom

La  $V$  være et indreproduktrom, la  $U$  være et endeligdimensjonalt underrom av  $V$ , og la  $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$  være en ortonormal basis for  $U$ . Med *projeksjonen* av en vektor  $\mathbf{v} \in V$  på underrommet  $U$  menes da vektoren  $\mathbf{v}_U$  gitt ved

$$\mathbf{v}_U = \langle \mathbf{b}_1 | \mathbf{v} \rangle \mathbf{b}_1 + \langle \mathbf{b}_2 | \mathbf{v} \rangle \mathbf{b}_2 + \dots + \langle \mathbf{b}_n | \mathbf{v} \rangle \mathbf{b}_n$$

Denne definisjonen gir oss en direkte oppskrift for hvordan vi kan finne projeksjonen av en gitt vektor  $\mathbf{v}$  på et gitt underrom  $U$ : Hvis vi kan finne en ortonormal basis for  $U$ , så kan vi regne ut  $\mathbf{v}_U$  ved hjelp av likningen i definisjonen.

Neste teorem gir grunnlag for mange anvendelser av projeksjoner på underrom. Vi skal se på en slik anvendelse i seksjon 10.6.

### Teorem 2    Approksimasjonsteoremet

La  $V$  være et indreproduktrom, la  $U$  være et endeligdimensjonalt underrom av  $V$ , og la  $\mathbf{x}$  være et vilkårlig element i  $V$ . Da er projeksjonen  $\mathbf{v}_U$  av  $\mathbf{v}$  på underrommet  $U$  nærmere  $\mathbf{v}$  enn noe annet element i  $U$ , det vil si

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{v}_U\| < \|\mathbf{v} - \mathbf{x}\| \quad \text{for alle } \mathbf{x} \neq \mathbf{v}_U \text{ i underrommet } U.$$

**Bevis** La  $\mathbf{x}$  ligge i underrommet  $U$ . Vi kan skrive

$$\mathbf{v} - \mathbf{x} = (\mathbf{v} - \mathbf{v}_U) + (\mathbf{v}_U - \mathbf{x}). \quad (1)$$

Men  $\mathbf{v} - \mathbf{v}_U = \mathbf{v}_{U^\perp}$ , så  $\mathbf{v} - \mathbf{v}_U$  ligger i  $U^\perp$ . Videre ligger vektoren  $\mathbf{v}_U - \mathbf{x}$  i underrommet  $U$ . Dermed er (1) en oppsplitting av den typen punkt 2 i teorem 10.3.1 uttaler seg om, og ved den Pythagoreiske formelen i det teoremet følger dermed at

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_U\|^2 + \|\mathbf{v}_U - \mathbf{x}\|^2.$$

Resultatet følger direkte fra dette, fordi  $\|\mathbf{v}_U - \mathbf{x}\| = 0$  hvis og bare hvis  $\mathbf{x} = \mathbf{v}_U$ . ■

Neste teorem er også intuitivt rimelig. Det sier at hvis to vektorer har samme



indreprodukt med hver av vektorene i en samling som spenner underrommet  $U$ , så har de to vektorene samme projeksjon på  $U$ .

### Teorem 3 Likhet mellom projeksjoner

La  $V$  være et endeligdimensjonalt indreproduktrom, og la  $U$  være et underrom av  $V$ . Anta at vektorene  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$  spenner ut  $U$ . Hvis  $\mathbf{x}$  og  $\mathbf{y}$  er to elementer i  $V$  som har samme indreprodukt med hver av vektorene  $\mathbf{u}_i$ , altså

$$\langle \mathbf{u}_i | \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{u}_i | \mathbf{y} \rangle \quad \text{for } 1 \leq i \leq k,$$

så er projeksjonene av  $\mathbf{x}$  og  $\mathbf{y}$  på  $U$  like, altså  $\mathbf{x}_U = \mathbf{y}_U$ .

**Bevis** La  $B = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r\}$  være en ortonormal basis for  $U$ . Ved teorem 10.3.3 holder det å vise at

$$\langle \mathbf{b}_i | \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{b}_i | \mathbf{y} \rangle \quad \text{for } 1 \leq i \leq r.$$

Vel, la  $i$  være gitt. Siden vektorene  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$  spenner ut  $U$ , kan vi skrive

$$\mathbf{b}_i = c_{i1}\mathbf{u}_1 + c_{i2}\mathbf{u}_2 + \dots + c_{ik}\mathbf{u}_k.$$

der  $c$ -ene er skalarer. Dette betyr at

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{b}_i | \mathbf{x} \rangle &= \langle c_{i1}\mathbf{u}_1 + c_{i2}\mathbf{u}_2 + \dots + c_{ik}\mathbf{u}_k | \mathbf{x} \rangle \\ &= c_{i1}\langle \mathbf{u}_1 | \mathbf{x} \rangle + c_{i2}\langle \mathbf{u}_2 | \mathbf{x} \rangle + \dots + c_{ik}\langle \mathbf{u}_k | \mathbf{x} \rangle \\ &= c_{i1}\langle \mathbf{u}_1 | \mathbf{y} \rangle + c_{i2}\langle \mathbf{u}_2 | \mathbf{y} \rangle + \dots + c_{ik}\langle \mathbf{u}_k | \mathbf{y} \rangle \\ &= \langle c_{i1}\mathbf{u}_1 + c_{i2}\mathbf{u}_2 + \dots + c_{ik}\mathbf{u}_k | \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{b}_i | \mathbf{y} \rangle. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

### Teorem 4 Prosjeksjoner er lineærtransformasjoner

La  $V$  være et indreproduktrom, og la  $U$  være et endeligdimensjonalt underrom av  $V$ . Da er projeksjonsavbildningen  $P : V \rightarrow V$  definert ved

$$P(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_U$$

en lineærtransformasjon.

**Bevis** Vi sjekker at L1 og L2 fra definisjon 9.2.1 er oppfylt. La  $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$  være en ortonormal basis for  $U$ , og la  $\mathbf{u}$  og  $\mathbf{v}$  være elementer i  $V$ . Ved definisjon

10.3.3 er da

$$\begin{aligned} P(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= \langle \mathbf{b}_1 | \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle \mathbf{b}_1 + \cdots + \langle \mathbf{b}_n | \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle \mathbf{b}_n \\ &= \left( \langle \mathbf{b}_1 | \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{b}_1 | \mathbf{v} \rangle \right) \mathbf{b}_1 + \cdots + \left( \langle \mathbf{b}_n | \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{b}_n | \mathbf{v} \rangle \right) \mathbf{b}_n \\ &= \left( \langle \mathbf{b}_1 | \mathbf{u} \rangle \mathbf{b}_1 + \cdots + \langle \mathbf{b}_n | \mathbf{u} \rangle \mathbf{b}_n \right) + \left( \langle \mathbf{b}_1 | \mathbf{v} \rangle \mathbf{b}_1 + \cdots + \langle \mathbf{b}_n | \mathbf{v} \rangle \mathbf{b}_n \right) \\ &= P(\mathbf{u}) + P(\mathbf{v}), \end{aligned}$$

der jeg brukte I1 og I2 fra definisjon 10.1.1. På tilsvarende måte vises at  $P(r\mathbf{u}) = rP(\mathbf{u})$  hvis  $r$  er en skalar. ■

Teoremet ovenfor er nyttig, fordi det gjør at vi kan bruke all vår teori for lineærtransformasjoner på projeksjoner. Blant annet vet vi at lineærtransformasjoner kan representeres med matriser. Her kommer et teorem som beskriver matrisene til en projeksjoner.

### Teorem 5 Matrisen til en projeksjon i ortonormal basis

La  $V$  være et endeligdimensjonalt indreproduktrom med ortonormal basis  $B = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ , la  $U$  være et underrom av  $V$ , og la  $B' = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$  være en ortonormal basis for  $U$ . La  $A$  være matrisen med koordinatvektorene

$$[\mathbf{u}_1]_B, \dots, [\mathbf{u}_k]_B$$

som søyler, og la  $P : V \rightarrow V$  være projeksjonen av vektorrommet  $V$  på underrommet  $U$ . Da er

$$[P]_B^B = A \cdot A^t$$

**Bevis** La  $\mathbf{v} \in V$  være vilkårlig. Ved definisjon 10.3.3 er

$$P(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{u}_1 | \mathbf{v} \rangle \mathbf{u}_1 + \cdots + \langle \mathbf{u}_k | \mathbf{v} \rangle \mathbf{u}_k.$$

Dette medfører at

$$\begin{aligned} [P(\mathbf{v})]_B &= \left[ \langle \mathbf{u}_1 | \mathbf{v} \rangle \mathbf{u}_1 + \cdots + \langle \mathbf{u}_k | \mathbf{v} \rangle \mathbf{u}_k \right]_B \\ &= \langle \mathbf{u}_1 | \mathbf{v} \rangle [\mathbf{u}_1]_B + \cdots + \langle \mathbf{u}_k | \mathbf{v} \rangle [\mathbf{u}_k]_B, \end{aligned}$$

siste overgang fordi avbildningen  $\mathbf{x} \mapsto [\mathbf{x}]_B$  er en lineærtransformasjon fra  $V$  til  $\mathbf{R}^n$ , se beviset for teorem 9.4.1. Dette kan vi uttrykke ved et matriseprodukt:

$$[P(\mathbf{v})]_B = \begin{bmatrix} [\mathbf{u}_1]_B & \cdots & [\mathbf{u}_k]_B \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v} \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{v} \rangle \end{bmatrix}.$$

Ved teorem 10.1.3 er

$$\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{v} \rangle = [\mathbf{u}]_B \cdot [\mathbf{v}]_B.$$

Ved å sette inn dette kan vi skrive resultatet ovenfor om til

$$[P(\mathbf{v})]_B = \begin{bmatrix} [\mathbf{u}_1]_B & \cdots & [\mathbf{u}_k]_B \end{bmatrix} \cdot \left( \begin{bmatrix} [\mathbf{u}_1]_B \\ \vdots \\ [\mathbf{u}_k]_B \end{bmatrix} \cdot [\mathbf{v}]_B \right).$$

Siden matrisemultiplikasjon er assosiativt, følger likningen i teoremet fra det vi kom frem til nå. ■

### 10.3 Oppgaver

**1.** Finn projeksjonen av den gitte vektoren  $\mathbf{b}$  langs vektoren  $\mathbf{a}$  i vektorrommet  $\mathbf{R}^3$ , når  $\mathbf{R}^3$  er utstyrt med sitt vanlige indreprodukt.

- a)  $\mathbf{a} = [1, 0, 0]$ ,  $\mathbf{b} = [3, 4, 2]$   
 b)  $\mathbf{a} = [2, -1, 3]$ ,  $\mathbf{b} = [3, 3, 3]$

**2.** Finn projeksjonen  $\mathbf{v}_U$  av vektoren  $v = [1, 3, 5]$  på underrommet  $U$  gitt ved  $xy$ -planet i  $\mathbf{R}^3$ . Finn også  $\mathbf{v}_{U^\perp}$ .

**3.** Finn projeksjonen av vektoren  $v = [-2, -1]$  på underrommet  $U$  gitt ved  $x$ -aksen i  $\mathbf{R}^2$ . Finn også  $\mathbf{v}_{U^\perp}$ .

**4.** Finn projeksjonen  $\mathbf{v}_U$  av vektoren  $v \in \mathbf{R}^3$  på underrommet  $U \subseteq \mathbf{R}^3$  utspent av de oppgitte vektorene  $\mathbf{u}_1$  og  $\mathbf{u}_2$ . Finn også  $\mathbf{v}_{U^\perp}$ .

- a)  $\mathbf{v} = [1, 1, 1]$ ,  $\mathbf{u}_1 = [1, 1, 0]$ ,  $\mathbf{u}_2 = [0, 0, 1]$   
 b)  $\mathbf{v} = [5, 3, 1]$ ,  $\mathbf{u}_1 = [4, 1, 5]$ ,  $\mathbf{u}_2 = [2, -3, -1]$   
 c)  $\mathbf{v} = [9, 11, -15]$ ,  $\mathbf{u}_1 = [5, 0, 3]$ ,  $\mathbf{u}_2 = [-2, 3, 1]$

**5.** Finn den vektoren i underrommet  $U$  utspent av vektorene  $[0, 1, 0]$  og  $[1, 0, 1]$  som ligger nærmest vektoren  $[-4, 3, 2]$  i  $\mathbf{R}^3$ .

**6.** Gitt vektorrommet  $P_\infty$  av polynomer, med indreproduktet

$$\langle f | g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx.$$

a) Finn projeksjonen av polynomet  $f(x) = x$  langs polynomet  $g(x) = x^2$ .

b) Finn projeksjonen  $f_U$  av polynomet  $f(x) = x^2$  på underrommet  $U$  utspent av polynomene  $p_1(x) = 1$  og  $p_2(x) = x$ .

**7.** Bruk teorem 10.3.5 til å finne projeksjonsmatrisen for projeksjon på  $xy$ -planet i  $\mathbf{R}^3$  uttrykt i standardbasis, når  $\mathbf{R}^3$  er utstyrt med sitt vanlige indreprodukt. Virker resultatet rimelig?

**8.** En lineærtransformasjon  $T : V \rightarrow V$  fra et vektorrom  $V$  inn i seg selv kalles *idempotent* dersom

$$T^2 = T.$$

Anta at  $V$  er et indreproduktrom og at  $T : V \rightarrow V$  er projeksjon på et endeligdimensjonalt underrom. Vis at da er  $T$  idempotent.

**9.** En  $(n \times n)$ -matrise  $M$  kalles *idempotent* dersom  $M^2 = M$ .

a) Anta at  $V$  er et endeligdimensjonalt indreproduktrom og at  $T : V \rightarrow V$  er projeksjon på et underrom. Vis hvis  $B$  er en basis for  $V$ , så er matrisen  $[T]_B^B$  idempotent.

b) Vis at hvis  $A$  og  $B$  er  $(n \times n)$ -matriser slik at  $AB = A$  og  $BA = B$ , så er både  $A$  og  $B$  idempotente.

**10.** Vis at hvis  $V$  er et endeligdimensjonalt vektorrom og  $U$  er et underrom av  $V$ , så er

$$\dim U + \dim U^\perp = \dim V.$$

## 10.4 Symmetriske lineærtransformasjoner

Vi skal nå definere et begrep som viser seg å være generelle lineærtransformasjoners motstykke til symmetriske matriser.

### Definisjon 1 Symmetriske transformasjoner

En lineærtransformasjon  $T : V \rightarrow V$  fra et indreproduktrom til seg selv kalles *symmetrisk* hvis

$$\langle T(\mathbf{u}) | \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u} | T(\mathbf{v}) \rangle \quad \text{for alle } \mathbf{u} \text{ og } \mathbf{v} \text{ i } V.$$

Sagt i en litt mer verbal form: Transformasjonen  $T$  er symmetrisk hvis indreproduktet av  $T(\mathbf{u})$  med  $\mathbf{v}$  er lik indreproduktet av  $\mathbf{u}$  med  $T(\mathbf{v})$  for alle  $\mathbf{u}$  og  $\mathbf{v}$ .

Neste teorem sier at en lineærtransformasjon er symmetrisk hvis og bare hvis matrisen dens i en ortonormal basis er symmetrisk.

### Teorem 1 Symmetriske transformasjoner og symmetriske matriser

La  $T : V \rightarrow V$  være en lineærtransformasjon fra et endeligdimensjonalt indreproduktrom til seg selv, og la

$$B = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$$

være en ortonormal basis for  $V$ . Da er  $T$  symmetrisk hvis og bare hvis matrisen  $[T]_B^B$  til  $T$  i basen  $B$  er symmetrisk.

**Bevis** Anta først at  $T$  er en symmetrisk transformasjon. Ved teorem 9.4.3 er da

$$[T]_B^B = \begin{bmatrix} [T(\mathbf{b}_1)]_B & \cdots & [T(\mathbf{b}_n)]_B \end{bmatrix}.$$

Ved teorem 10.1.2 kan søylevektorene skrives ut slik:

$$[T]_B^B = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{b}_1 | T(\mathbf{b}_1) \rangle & \langle \mathbf{b}_1 | T(\mathbf{b}_2) \rangle & \cdots & \langle \mathbf{b}_1 | T(\mathbf{b}_n) \rangle \\ \langle \mathbf{b}_2 | T(\mathbf{b}_1) \rangle & \langle \mathbf{b}_2 | T(\mathbf{b}_2) \rangle & \cdots & \langle \mathbf{b}_2 | T(\mathbf{b}_n) \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathbf{b}_n | T(\mathbf{b}_1) \rangle & \langle \mathbf{b}_n | T(\mathbf{b}_2) \rangle & \cdots & \langle \mathbf{b}_n | T(\mathbf{b}_n) \rangle \end{bmatrix}$$

Siden  $\langle T(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, T(\mathbf{y}) \rangle$  for alle  $\mathbf{x}$  og  $\mathbf{y}$ , ser vi at  $[T]_B^B$  er symmetrisk. Omvendt, anta at  $[T]_B^B$  er symmetrisk. For alle  $\mathbf{x}$  og  $\mathbf{y}$  i  $V$  gjelder da

$$\begin{aligned}
\langle T(\mathbf{x}) \mid \mathbf{y} \rangle &= [T(\mathbf{x})]_B \cdot [\mathbf{y}]_B && \text{(teorem 10.1.3)} \\
&= ([T(\mathbf{x})]_B)^t [\mathbf{y}]_B = ([T]_B^B [\mathbf{x}]_B)^t [\mathbf{y}]_B \\
&= ([\mathbf{x}]_B)^t ([T]_B^B)^t [\mathbf{y}]_B && \text{(teorem 10.9)} \\
&= ([\mathbf{x}]_B)^t [T]_B^B [\mathbf{y}]_B && \text{(matrisen symmetrisk)} \\
&= [\mathbf{x}]_B \cdot ([T]_B^B [\mathbf{y}]_B) \\
&= [\mathbf{x}]_B \cdot [T(\mathbf{y})]_B = \langle \mathbf{x}, T(\mathbf{y}) \rangle. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Symmetriske transformasjoner er viktige fordi det viser seg at vi har en rekke pene resultater om egenvektorer for dem. Vi skal nå se på dette.

### Teorem 2 Symmetri gir ortogonalitet av egenvektorer

La  $T : V \rightarrow V$  være en symmetrisk lineærtransformasjon fra et indreproduktrom  $V$  til seg selv, og la

$$\lambda_1 \quad \text{og} \quad \lambda_2$$

være to ulike egenverdier for  $T$  med egenvektorer  $\mathbf{v}_1$  og  $\mathbf{v}_2$  respektivt. Da er  $\mathbf{v}_1$  og  $\mathbf{v}_2$  ortogonale, altså

$$\langle \mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v}_2 \rangle = 0.$$

**Bevis** Siden  $T$  er symmetrisk, har vi

$$\begin{aligned}
0 &= \langle T(\mathbf{v}_1) \mid \mathbf{v}_2 \rangle - \langle \mathbf{v}_1 \mid T(\mathbf{v}_2) \rangle \\
&= \langle \lambda_1 \mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v}_2 \rangle - \langle \mathbf{v}_1 \mid \lambda_2 \mathbf{v}_2 \rangle \\
&= \lambda_1 \langle \mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v}_2 \rangle - \lambda_2 \langle \mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v}_2 \rangle \\
&= (\lambda_1 - \lambda_2) \langle \mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v}_2 \rangle.
\end{aligned}$$

Siden  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , medfører dette at  $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = 0$ .  $\blacksquare$

Fra våre studier i matrisedynamikk vet vi at eksistens av en *egenbasis* for overgangsmatrisen er av avgjørende betydning. En slik egenbasis gjør at vi kan skrive enhver startvektor som lineærkombinasjon av egenvektorer for matrisen, og derigjennom regne oss  $n$  steg fremover i tiden. Neste teorem viser at en egenbasis finnes for for alle symmetriske overgangsmatriser.

**Teorem 3 Symmetri gir reelle egenverdier og egenbasis**

Anta at  $T : V \rightarrow V$  er en symmetrisk lineærtransformasjon fra et  $n$ -dimensjonalt indreproduktrom  $V$  til seg selv. Alle de  $n$  karakteristiske røttene til  $T$  er da reelle tall. Så  $T$  har kun reelle egenverdier, og den har minst en slik egenverdi. Videre har  $T$  en egenbasis.

**Bevis** Dette utsetter vi til neste kapittel. Se diskusjonen etterfølgende teorem 11.3.9. ■

**Teorem 4 Symmetriske transformasjoner har ortonormal egenbasis**

Anta at  $T : V \rightarrow V$  er en symmetrisk lineærtransformasjon fra et  $n$ -dimensjonalt indreproduktrom  $V$  til seg selv. Da har  $T$  en ortonormal egenbasis.

**Bevis** Ved teorem 10.4.3 har  $T$  en egenbasis bestående av  $n$  vektorer. Hver vektor i denne basisen vil tilhøre et av egenrommene for  $T$ . Ved Gram-Schmidt-prosessen kan vi finne ortonormale basiser for hvert av disse egenrommene. Ved teorem 10.4.2 vil unionen av alle disse ortonormale basisene være en samling  $S$  vektorer som er parvis ortogonale. Til sammen er det  $n$  vektorer i samlingen  $S$ . Ved teorem 10.1.4 er  $S$  lineært uavhengig, så det følger at  $S$  er en ortonormal basis for  $V$ . ■

**10.4 Oppgaver**

1. Gitt matrisen

$$M = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

- Hvorfor kan man se med et raskt blick at  $M$  har en ortonormal egenbasis?
- Finn en ortonormal egenbasis for  $M$ .

2. Vis at hvis  $T$  er en symmetrisk lineærtransformasjon, så er også  $T^2$  symmetrisk.

3. I denne oppgaven skal vi vise at alle projeksjoner på endeligdimensjonale underrom er *symmetriske* lineærtransformasjoner, og at de eneste egenverdiene de kan ha er 0 og 1.

La  $V$  være et indreproduktrom, og la  $U$  være et endeligdimensjonalt underrom av  $V$ . La  $T : V \rightarrow V$  være projeksjonen definert ved

$$T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_U \quad \text{for alle } \mathbf{v} \in U.$$

- Vis at projeksjonen  $T$  er en symmetrisk lineærtransformasjon.
- Vis at de eneste egenverdiene  $T$  kan ha er 0 og 1, og at  $T$  har minst ett av disse tallene som egenverdi.

4. La  $V$  være et indreproduktrom, la  $T : V \rightarrow V$  være en lineærtransformasjon, og la  $B$  være en ortonormal basis for  $V$ . La  $M$  være matrisen til  $T$  i basisen  $B$ , altså  $M = [T]_B^B$ .

- Vis at  $M$  har følgende to egenskaper:
  - $M^2 = M$
  - $M$  er symmetrisk.
- Vis at hvis  $M$  er en  $(n \times n)$ -matrise som oppfyller begge kravene i (a), så finnes det et underrom  $U$  i  $\mathbf{R}^n$  slik at  $M$  representerer projeksjonen på  $U$  i standardbasis. (Hint: La  $U$  være bildet til  $M$ .)

## 10.5 Ortogonale lineærtransformasjoner

Lineærabildninger i  $\mathbf{R}^2$  eller  $\mathbf{R}^3$  som er rene *rotasjoner* eller *speilinger* om origo eller en linje gjennom origo, er typiske eksempler på det som kalles *ortogonale* lineærtransformasjoner. Slike transformasjoner bevarer lengden av alle vektorer og avstanden mellom alle punkter. Vi skal nå definere begrepet ortogonal transformasjon generelt for et indreproduktrom.

### Definisjon 1 Ortogonale lineærtransformasjoner

En lineærtransformasjon  $T : V \rightarrow V$  fra et indreproduktrom til seg selv kalles *ortogonal* hvis

$$\langle T(\mathbf{u}) \mid T(\mathbf{v}) \rangle = \langle \mathbf{u} \mid \mathbf{v} \rangle \quad \text{for alle } \mathbf{u} \text{ og } \mathbf{v} \text{ i } V.$$

Definisjonen ovenfor sier at en ortogonal transformasjon er en transformasjon som bevarer indreproduktet. Derfor er det rimlig å gjette at slike transformasjoner også bevarer normer og avstander. Neste teorem bekrefter dette.

### Teorem 1 Ortogonale transformasjoner bevarer norm og avstand

La  $T : V \rightarrow V$  være en ortogonal lineærtransformasjon. For alle  $\mathbf{u}$  og  $\mathbf{v}$  i  $V$  gjelder da:

1.  $\|T(\mathbf{u})\| = \|\mathbf{u}\|$
2.  $\|T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v})\| = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$
3.  $T$  er invertibel, og  $T^{-1}$  er også ortogonal.

**Bevis** (1) Vi har

$$\|T(\mathbf{u})\|^2 = \langle T(\mathbf{u}) \mid T(\mathbf{u}) \rangle = \langle \mathbf{u} \mid \mathbf{u} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2.$$

Ta så kvadratroten på begge sider.

(2) Vi har

$$\|T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v})\| = \|T(\mathbf{u} - \mathbf{v})\| = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|,$$

der jeg brukte (1) i siste overgang.

(3) Fra (2) får vi at  $T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$  medfører  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ . Ergo er

$$\ker T = \{\mathbf{0}\},$$

så  $T$  er inverterbar. Hvis  $\mathbf{u}$  og  $\mathbf{v}$  er gitte vektorer i  $V$ , kan vi skrive  $\mathbf{u} = T(\mathbf{x})$  og  $\mathbf{v} = T(\mathbf{y})$ . Dette gir

$$\langle T^{-1}(\mathbf{u}) \mid T^{-1}(\mathbf{v}) \rangle = \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = \langle T(\mathbf{x}) \mid T(\mathbf{y}) \rangle = \langle \mathbf{u} \mid \mathbf{v} \rangle. \quad \blacksquare$$

Hvis vi bruker rotasjoner og speilinger som vår intuitive guide for ortogonale transformasjoner, er følgende teorem intuitivt rimelig.

### **Teorem 2 Egenverdier og egenvektorer for ortogonale transformasjoner**

La  $T : V \rightarrow V$  være en ortogonal lineærtransformasjon.

1. Hvis  $\lambda$  er en egenverdi for  $T$ , så er  $|\lambda| = 1$ .
2. Hvis  $\mathbf{v}_1$  og  $\mathbf{v}_2$  er egenvektorer tilhørende ulike egenverdier  $\lambda_1$  og  $\lambda_2$  for  $T$ , så er  $\mathbf{u}$  og  $\mathbf{v}$  ortogonale.

**Bevis** (1) La  $\mathbf{u}$  være en egenvektor med egenverdi  $\lambda$ . Da er

$$\langle T(\mathbf{u}) \mid T(\mathbf{u}) \rangle = \langle \lambda \mathbf{u} \mid \lambda \mathbf{u} \rangle = \lambda^2 \langle \mathbf{u} \mid \mathbf{u} \rangle.$$

Siden  $\langle T(\mathbf{u}) \mid T(\mathbf{u}) \rangle = \lambda^2 \langle \mathbf{u} \mid \mathbf{u} \rangle$ , følger at  $\lambda^2 = 1$ .

(2) Vi har

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v}_2 \rangle &= \langle T(\mathbf{v}_1) \mid T(\mathbf{v}_2) \rangle = \langle \lambda_1 \mathbf{v}_1 \mid \lambda_2 \mathbf{v}_2 \rangle \\ &= \lambda_1 \lambda_2 \langle \mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v}_2 \rangle, \end{aligned}$$

så hvis ikke  $\langle \mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v}_2 \rangle = 0$  har vi  $\lambda_1 \lambda_2 = 1$ . Men hvis  $\lambda_1 \lambda_2 = 1$  må  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$  ved (1). Dette er mot forutsetningen.  $\blacksquare$

Neste teorem viser at vi kan teste om en lineærtransformasjon er ortogonal ved å se på hva den gjør med vektorene i en gitt basis.

### **Teorem 3 Kriterium for ortogonalitet av transformasjoner**

La  $T : V \rightarrow V$  være en ortogonal lineærtransformasjon fra et  $n$ -dimensjonalt indreproduktrom til seg selv, og la  $B = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$  være en basis for  $V$ . Da er transformasjonen  $T$  ortogonal hvis og bare hvis den bevarer indreproduktene mellom basisvektorene, altså

$$\langle T(\mathbf{b}_i) \mid T(\mathbf{b}_j) \rangle = \langle \mathbf{b}_i \mid \mathbf{b}_j \rangle \quad \text{for alle } 1 \leq i, j \leq n.$$

**Bevis** Det følger direkte fra definisjonen 10.5.1 av ortogonale transformasjoner at dersom  $T$  er ortogonal, så er  $\langle T(\mathbf{b}_i) \mid T(\mathbf{b}_j) \rangle = \langle \mathbf{b}_i \mid \mathbf{b}_j \rangle$  for alle



$1 \leq i, j \leq n$ . Omvendt, anta at dette er tilfelle. La  $\mathbf{u}$  og  $\mathbf{v}$  være to vilkårlige elementer i  $V$ . Siden  $B$  er en basis for  $V$ , kan vi skrive

$$\mathbf{u} = c_1 \mathbf{b}_1 + \cdots + c_n \mathbf{b}_n \quad \text{og} \quad \mathbf{v} = d_1 \mathbf{b}_1 + \cdots + d_n \mathbf{b}_n$$

der  $c$ -ene og  $d$ -ene er skalarer. Dette gir

$$\begin{aligned} \langle T(\mathbf{u}) \mid T(\mathbf{v}) \rangle &= \langle T(c_1 \mathbf{b}_1 + \cdots + c_n \mathbf{b}_n) \mid T(d_1 \mathbf{b}_1 + \cdots + d_n \mathbf{b}_n) \rangle \\ &= \langle c_1 T(\mathbf{b}_1) + \cdots + c_n T(\mathbf{b}_n) \mid d_1 T(\mathbf{b}_1) + \cdots + d_n T(\mathbf{b}_n) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i d_j \langle T(\mathbf{b}_i) \mid T(\mathbf{b}_j) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i d_j \langle \mathbf{b}_i \mid \mathbf{b}_j \rangle \\ &= \langle c_1 \mathbf{b}_1 + \cdots + c_n \mathbf{b}_n \mid d_1 \mathbf{b}_1 + \cdots + d_n \mathbf{b}_n \rangle = \langle \mathbf{u} \mid \mathbf{v} \rangle. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Vi skal nå knytte ortogonale transformasjoner til matriser. Det viser seg at matrisene som kommer inn i bildet er de som omtales i neste definisjon.

### Definisjon 2 Ortogonale matriser

En  $(n \times n)$ -matrise kalles *ortogonal* hvis søylevektorene utgjør en ortonormal basis for  $\mathbf{R}^n$ .

Dessverre er denne betegnelsen ganske dum; disse matrisene burde selvsagt vært kalt *ortonormale* istedenfor ortogonale. Men det er vanskelig å endre terminologi som er så etablert som dette. Derfor skal vi bruke definisjon 10.5.2 som den er.

### Teorem 4 Ortogonale transformasjoner har ortogonale matriser

La  $T : V \rightarrow V$  være en ortogonal lineærtransformasjon fra et  $n$ -dimensjonalt indreproduktrom til seg selv, og la  $B = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$  være en ortonormal basis for  $V$ . Da er transformasjonen  $T$  ortogonal hvis og bare hvis matrisen  $[T]_B^B$  til  $T$  i basisen  $B$  er ortogonal.

**Bevis** Anta at  $T$  er en ortogonal transformasjon. Søyelene i  $[T]_B^B$  er koordinatvektorene  $[T(\mathbf{b}_i)]_B$  til bildene av basisvektorene  $\mathbf{b}_i$  i basisen  $B$ . Siden basisen  $B$  er ortonormal og  $T$  bevarer indreprodukter og lengder, må disse søyene være ortonormale. Ergo er

$$[T]_B^B$$

en ortogonal matrise.

Omvendt, hvis  $[T]_B^B$  er en ortogonal matrise, representerer søylene

$$[T(\mathbf{b}_i)]_B$$

i matrisen en ortonormal samling vektorer. Disse vektorene er transformasjonens bilder av basisvektorene i basisen  $B$ , og vi har altså

$$\langle T(\mathbf{b}_i) | T(\mathbf{b}_j) \rangle = \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{hvis } i = j \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Ergo er kriteriet i teorem 10.5.3 oppfylt i basisen  $B$ , og  $T$  er en ortogonal transformasjon. ■

Her kommer en meget elegant karakterisering av ortogonale matriser:

### **Teorem 5 Ortogonale matriser har transponerte som inverse**

En  $(n \times n)$ -matrise  $M$  er ortogonal hvis og bare hvis  $M$  er inverterbar og den inverse av  $M$  er lik den transponerte av  $M$ , altså

$$M^{-1} = M^t.$$

**Bevis** La  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  være søylevektorene i  $M$ . La oss se på matriseproduktet

$$M^t M.$$

Elementet  $M_{ij}$  på plass  $(i, j)$  i denne matrisen er prikkproduktet mellom linje nummer  $i$  fra matrisen  $M^t$  og søyle nummer  $j$  fra matrisen  $M$ . Men linje nummer  $i$  i  $M^t$  er vektoren  $\mathbf{u}_i$ , så

$$M_{ij} = \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j.$$

Hvis matrisen er ortogonal, blir dette prikkproduktet 1 hvis  $i = j$  og 0 ellers. Ergo blir produktmatrisen  $M^t M$  identitetsmatrisen. Omvendt, hvis produktet  $M^t M$  blir identitetsmatrisen må søylevektorene i  $M$  være ortonormale, slik at  $M$  er en ortogonal matrise. ■

Vårt siste teorem i denne seksjonen uttrykker resultater som, i lys av forrige teorem, intuitivt sett er svært rimelige.

### **Teorem 6 Egenskaper ved ortogonale matriser**

La  $M$  være en ortogonal  $(n \times n)$ -matrise. Da gjelder:

1. Den transponerte matrisen  $M^t$  er også ortogonal.
2.  $\det M = \pm 1$ .

**Bevis** Det følger fra teorem 10.5.1 punkt 3 at den inverse av transformasjonen

$$T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$$

representert ved matrisen  $M$  også er en ortogonal transformasjon. Denne transformasjonen er representert ved den inverse matrisen  $M^{-1}$ , som vi ved teorem 10.5.5 vet at er lik  $M^t$ . Ved teorem 10.5.4 følger at matrisen  $M^t$  er ortogonal.

(2) Ved teorem 10.5.5 har vi  $A \cdot A^t = I$ , der  $I$  er identitetsmatrisen. Så ved produktregelen for determinanter følger at

$$(\det A) \cdot (\det A^t) = 1.$$

Men ved oppgave 6 side 10.0.0 er determinanten til  $A$  lik determinanten til  $A^t$ , så det følger at  $(\det A)^2 = 1$ . Ergo blir  $\det A = \pm 1$ . ■

## 10.5 Oppgaver

**1.** Vis at hvis lineærtransformasjonen  $T$  er ortogonal, så er også transformasjonen  $T^2$  ortogonal.

**2.** La  $T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  være lineærtransformasjonen som tilsvare rotasjon en vinkel  $\theta$  om origo, med positiv omløpsretning mot klokken.

a) Vis at matrisen til  $T$  i standardbasis er

$$[T]_{std}^{std} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

b) Finn den inverse til matrisen  $[T]_{std}^{std}$ .

c) Vis at matrisen  $[T]_{std}^{std}$  er ortogonal.

d) Vis at  $T$  er en ortogonal lineærtransformasjon.

**3.** La  $T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  være lineærtransformasjonen som tilsvare speiling  $y$ -aksen, altså  $T(x, y) = (x, -y)$ .

a) Finn matrisen til  $T$  i standardbasis, og vist at den er ortogonal.

b) Vis at  $T$  er en ortogonal lineærtransformasjon.

**4.** La  $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  være lineærtransformasjonen som tilsvare speiling  $xy$ -planet, altså  $T(x, y, z) = (x, y, -z)$ .

a) Finn matrisen til  $T$  i standardbasis, og vist at den er ortogonal.

b) Vis at  $T$  er en ortogonal lineærtransformasjon.

**5.** La  $V$  være et indreproduktrom, la  $T : V \rightarrow V$  være en ortogonal lineærtransformasjon, og la  $B = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  være en basis for  $V$ . Vis at da er

$$T(B) = \{T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n)\}$$

også en ortonormal basis for  $V$ .

**6.** Vi så i forrige seksjon at alle symmetriske matriser har en ortonormal basis av egenvektorer. Bruk dette til å vise at hvis  $M$  er en symmetrisk matrise, så finnes det en *ortogonal* matrise  $C$  slik at matrisen

$$D = C^{-1}MC$$

er diagonal. Vi sier at matrisen  $C$  diagonaliserer matrisen  $M$  *ortogonalt*, og at  $M$  er *ortogonalt diagonaliserbar*.

**7.** Finn en matrise som diagonaliserer matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ortogonalt.

**8.** Vis at hvis  $M$  er en ortogonal  $(2 \times 2)$ -matrise, så er  $M$  på en av de to formene

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad \text{eller} \quad \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Hva kan du etter dette si om ortogonale lineærtransformasjoner i  $\mathbf{R}^2$ ?

## 10.6 Anvendelse: Selvmotsigende likningssystemer

Vi har tidligere sett at et lineært likningssystem med  $n$  likninger og  $k$  reelle tall som ukjente, kan skrives på matriseformen

$$A\mathbf{r} = \mathbf{b}, \quad (1)$$

der høyresiden  $\mathbf{b}$  er en vektor i  $\mathbf{R}^n$ , der vektoren  $\mathbf{x}$  av ukjente ligger i  $\mathbf{R}^k$ , og der koeffisientmatrisen  $A$  er en  $(n \times k)$ -matrise. Vi har også sett at et slikt likningssystem kan vise seg å være *selvmotsigende*, det vil si, ikke ha løsninger. For eksempel kan dette lett skje hvis  $k > n$ , slik at antall likninger er større enn antall ukjente. Likningssystemet kalles da *overbestemt*.

I denne seksjonen skal vi se hvordan man kan bruke teorien for indreprodukter til å finne *tilnærmede* løsninger av selvmotsigende lineære likningssystemer. Gitt systemet (1) gir vi da opp å finne en vektor  $\mathbf{r}$  slik at vektoren  $A\mathbf{r}$  er *nøyaktig lik* vektoren  $\mathbf{b}$ , isteden prøver vi å finne en vektor  $\mathbf{r}$  slik at  $A\mathbf{r} \approx \mathbf{b}$ , det vil si, slik at vektoren  $A\mathbf{r}$  ligger noenlunde nær vektoren  $\mathbf{b}$  i rommet  $\mathbf{R}^n$ . Teoremet under uttrykker dette presist.

### Teorem 1 Tilnærmet løsning av selvmotsigende likningssystemer

La  $\mathbf{b}$  og  $\mathbf{r}$  være søylevektorer i henholdsvis  $\mathbf{R}^n$  og  $\mathbf{R}^k$ , og la  $A$  være en  $(n \times k)$ -matrise. Anta at vi skal løse problemet

$$A\mathbf{r} \approx \mathbf{b}$$

i den forstand at vi ønsker å finne en vektor  $\mathbf{r}$  i  $\mathbf{R}^k$  som gjør avstanden mellom vektorene  $A\mathbf{r}$  og  $\mathbf{b}$  i  $\mathbf{R}^n$  minst mulig. En vektor  $\mathbf{r}$  har denne avstandsminimaliserende egenskapen hvis og bare hvis

$$(A^t A)\mathbf{r} = A^t \mathbf{b}.$$

Det finnes alltid vektorer  $\mathbf{r}$  med denne egenskapen. Hvis søylene i matrisen  $A$  er lineært uavhengige, er vektoren  $\mathbf{r}$  entydig.

**Bevis** La  $\mathbf{r} \in \mathbf{R}^k$  være vilkårlig. Vektorene  $A\mathbf{r}$  og  $\mathbf{b}$  ligger begge i  $\mathbf{R}^n$ , og vektoren  $A\mathbf{r}$  ligger i bildet til matrisen  $A$ . Dette er et underrom  $U$  av  $\mathbf{R}^n$  utspent av søylevektorene i matrisen  $A$ . At

$$A^t(A\mathbf{r}) = A^t \mathbf{b} \quad (1)$$

er ekvivalent med at vektorene  $A\mathbf{r}$  og  $\mathbf{b}$  samme indreprodukt med samtlige linjevektorer i  $A^t$ . Siden linjevektorene i  $A^t$  spanner ut  $U$ , gir teorem 10.3.3 at

dette er ekvivalent med at projeksjonene  $(A\mathbf{r})_U$  og  $\mathbf{b}_U$  er like. Siden  $A\mathbf{r}$  ligger i  $U$ , er  $(A\mathbf{r})_U = A\mathbf{r}$ . Ergo er (1) ekvivalent med at

$$\mathbf{b}_U = A\mathbf{r},$$

altså at projeksjonen av  $\mathbf{b}$  på bildet til  $A$  er lik  $A\mathbf{r}$ . Ved teorem 10.3.2 ligger projeksjonen  $\mathbf{b}_U$  av  $\mathbf{b}$  på  $U$  nærmere  $\mathbf{b}$  enn noe annet punkt i underrommet  $U$ . Vi har dermed vist ekvivalensen i teoremet. Vi har også vist eksistensen av minst én minimaliserende vektor  $\mathbf{r}$ , siden projeksjonen  $\mathbf{b}_U$  på bildet  $U$  til matrisen  $A$  kan skrives  $\mathbf{b}_U = A\mathbf{r}$  for minst én  $\mathbf{r}$ .

Anta nå at de  $k$  søylene i  $A$  er lineært uavhengige. Siden disse spenner ut bildet til  $A$ , er dimensjonen til bildet til  $A$  lik  $k$ . Det følger fra rangteoremet 9.3.7 at lineærabildningen representert ved  $A$  har kjerne  $\{\mathbf{0}\}$ , så ved korollar 9.3.5 er denne lineærabildningen injektiv. Ergo finnes kun én vektor  $\mathbf{r}$  slik at  $A\mathbf{r} = \mathbf{b}_U$  i dette tilfellet. ■

For å løse  $A\mathbf{r} \approx \mathbf{b}$  ved hjelp av teoremet ovenfor må du altså finne matrisen  $A^t A$ , sette opp systemet  $(A^t A)\mathbf{r} = A^t \mathbf{b}$ , og prøve å løse dette. Merk ellers at teoremet faktisk ikke forutsetter at likningssystemet  $A\mathbf{r} = \mathbf{b}$  virkelig er selvmotsigende. Er det ikke selvmotsigende, vil du få eksakte løsninger av  $A\mathbf{r} = \mathbf{b}$  hvis du prøver å bruke teoremet ovenfor. Grunnen er at eksakte løsninger tilsvarer avstand 0, og at teoremet vårt alltid finner tilnærmingene med minst avstand! Men å bruke teorem 10.6.1 på denne måten blir ofte å skyte spurv med kanon; det er normalt enklere å løse  $A\mathbf{r} = \mathbf{b}$  direkte.

## 10.6 Oppgaver

1. Bruk teoremet i denne seksjonen til å finne tilnærmede løsninger av likningssystemet

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Tolk resultatet geometrisk ved å tegne de rette linjene i planet representert ved de to likningene.

2. I denne oppgaven skal vi bruke teoremet i denne seksjonen til å finne tilnærmede løsninger av det noe sære likningssystemet

$$\begin{cases} x = 2 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

- Skriv systemet på matriseformen  $A\mathbf{r} = \mathbf{b}$ , og angi matrisen  $A$ .
- Tegn en figur som viser bildet til  $A$ .
- Vis at hvis vi setter  $\mathbf{r} = [x, y]$ , så kan betingelsen  $(A^t A)\mathbf{r} =$

$A^t \mathbf{b}$  skrives

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

d) Bruk teoremet til å finne en tilnærmet løsning  $\mathbf{r} = (x, y)$  av likningssystemet vårt. Tegn inn  $A\mathbf{r}$  på figuren din, og tolk resultatet som en projeksjon på bildet til  $A$ . Er løsningen entydig i dette tilfellet?

3. Undersøk hva som skjer hvis du bruker teoremet i denne seksjonen til å finne "tilnærmede" løsninger av det eksakt løsbare systemet

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

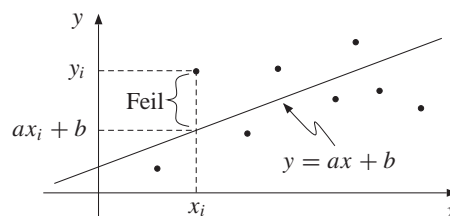
4. Bevis at matrisen  $A^t A$  alltid er symmetrisk, uansett hvilken  $n \times k$ -matrise  $A$  man starter med.

## 10.7 Anvendelse: Minste kvadraters metode

Problemet som behandles i **minste kvadraters metode** ble introdusert i oppgavene i MIP side 429. Utgangspunktet er  $n$  målinger

$x$	$x_1$	$x_2$	$\cdots$	$x_n$
$y$	$y_1$	$y_2$	$\cdots$	$y_n$

Vi ønsker å tilpasse en rett linje i  $xy$ -planet til de punktene dette gir oss, se figuren under.



Linjen vår skal ha likning  $y = ax + b$ . Vi ønsker å finne  $a$  og  $b$  slik at summen  $S$  av alle feilene kvadrert, altså

$$S = \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)]^2,$$

blir minst mulig. Derav navnet *minste kvadraters metode*. En av disse feilene er markert på figuren. Vi kan nå formulere følgende teorem, som gir en mer tilfredsstillende løsning enn den vi hadde i MIP.

### Teorem 1 Minste kvadraters metode

Gitt  $n$  punkter  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  i planet  $\mathbf{R}^2$ , der ikke alle tallene  $x_j$  er like. Koeffesientene  $a$  og  $b$  til den entydige rette linjen  $y = ax + b$  som minimerer summen

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b))^2$$

av kvadratavvikene, er da gitt ved  $A^t A \mathbf{r} = A^t \mathbf{b}$ , der

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

**Bevis** Kravene  $a$  og  $b$  må oppfylle hvis linjen  $y = ax + b$  skal gå gjennom de ulike datapunktene, blir

$$\begin{aligned} ax_1 + b &= y_1 \\ ax_2 + b &= y_2 \\ &\vdots \\ ax_n + b &= y_n. \end{aligned}$$

På matriseform kan dette skrives

$$\mathbf{A}\mathbf{r} = \mathbf{b},$$

der matrisene  $A$ ,  $\mathbf{b}$  og  $\mathbf{r}$  er som i teoremet. Dette kan oppfattes som et lineært likningssystem med elementene  $a$  og  $b$  i søylematrisen  $\mathbf{r}$  som ukjente. Hvis ikke datapunktene våre tilfeldigvis ligger på en rett linje, vil systemet være selvmodsigende. Vi må da nøye oss med tilnærmede løsninger  $\mathbf{A}\mathbf{r} \approx \mathbf{b}$ . Summen  $S$  av kvadratavvikene, som vi vil minimere, kan uttrykkes

$$S = \|\mathbf{A}\mathbf{r} - \mathbf{b}\|.$$

Resultatet følger nå direkte fra teorem 10.6.1. Merk at siden ikke alle tallene  $x_k$  er like, er søylene i  $A$  lineært uavhengige. Dermed følger entydigheten av løsningen. ■

## 10.7 Oppgaver

1. Gitt dataene

$x$	-1	1	3	6
$y$	8	6	5	3

Plott punktene  $(x, y)$  i  $xy$ -planet, og tilpass en rett linje ved å bruke teoremet i denne seksjonen. Tegn inn linjen på figuren din.

2. Bruk minste kvadraters metode på dataene

$x$	-2	0	2	4
$y$	1	2	3	4

Hva blir likningen for den tilpassende rette linjen? Hva er spesielt i dette eksemplet?

3. Metoden fra denne seksjonen kan generaliseres til å behandle tilpassning av et polynom  $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m$  av gitt grad  $m$  til  $n$  punkter  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  i planet, på en slik måte at summen  $S = \sum_{i=1}^n (y_i - p(x_i))^2$  av alle kvadratavvikene minimaliseres.

a) Vis at kravet for at grafen til polynomet  $p$  skal gå gjennom de  $n$  datapunktene kan skrives

$$\begin{aligned} a_0 + a_1x_1 + \dots + a_mx_1^m &= y_1 \\ &\vdots \\ a_0 + a_1x_n + \dots + a_mx_n^m &= y_n \end{aligned}$$

b) Vis at hvis kravet fra a) skrives på matriseformen  $\mathbf{A}\mathbf{r} = \mathbf{b}$ , vil koeffisientene  $a_0, \dots, a_m$  som minimaliserer  $S$  oppfylle  $A^t\mathbf{A}\mathbf{r} = A^t\mathbf{b}$ .

## 10.8 Anvendelse: Kvadratiske former

En funksjon  $Q : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  kalles en **kvadratisk form** hvis den kan skrives som en endelig sum av ledd på formen

$$c_{ij}x_i x_j, \quad (1)$$

der  $(x_1, \dots, x_n)$  er standardkoordinatene i  $\mathbf{R}^n$  og koeffisientene  $c_{ij}$  er reelle tall. For eksempel er

$$Q(\mathbf{x}) = Q(x_1, x_2, x_3) = 4x_1x_2 - 4x_3^2 + 10x_1x_3 \quad (2)$$

en kvadratisk form på  $\mathbf{R}^3$ . Alle kvadratiske former kan skrives

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t M \mathbf{x},$$

der  $M$  er en *symmetrisk* matrise av størrelse  $(n \times n)$ , og jeg skal nå forklare hvorfor. Vi tar utgangspunkt i  $Q$  skrevet som en sum av ledd på formen (1), der vi ved å eventuelt slå sammen ledd kan oppnå at ingen kombinasjon av  $i$  og  $j$  forekommer mer enn én gang og at  $i \leq j$  i alle ledd. Elementene  $M_{ii}$  langs diagonalen i matrisen  $M$  lar vi være lik koeffisienten  $c_{ii}$ . Hvis  $i \neq j$  bruker vi et lite triks: Vi lar

$$M_{ij} = M_{ji} = \frac{1}{2}c_{ij}.$$

Dette sikrer at matrisen blir symmetrisk.

**Eksempel 1** Finn en symmetrisk  $(3 \times 3)$ -matrise slik at den kvadratiske formen (2) kan skrives  $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t M \mathbf{x}$ .

**Løsning** Vi leser av at  $c_{12} = 4$ , så derfor setter vi  $M_{12} = M_{21} = 2$ . Videre er  $c_{33} = -4$ , så  $M_{33} = -4$ . Til slutt er  $c_{13} = 10$ , så vi lar  $M_{13} = M_{31} = 5$ . De øvrige elementene i  $M$  blir null, så

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

Vi har nå, sjekk at det stemmer ved å gange ut matriseproduktene,

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t M \mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3] \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$



**Teorem 1 Prinsipalakseteoremet**

La  $Q$  være en kvadratisk form på  $\mathbf{R}^n$  som kan beregnes ved

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t M \mathbf{x},$$

der  $M$  er en symmetrisk  $(n \times n)$ -matrise, og la  $B = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$  være en ortonormal egenbasis for  $M$  med tilhørende egenverdier  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . For gitt  $\mathbf{x}$ , la

$$[\mathbf{x}]_B = \mathbf{y} = [y_1, \dots, y_n]$$

være koordinatvektoren til  $\mathbf{x}$  i basisen  $B$ . Da er

$$Q(\mathbf{x}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2.$$

**Bevis** La  $C$  være  $(n \times n)$ -matrisen som har vektorene i  $B$  som søyler. Ved teorem 9.5.1 er da  $C$  overgangsmatrisen fra basisen  $B$  til standardbasis, det vil si  $\mathbf{x} = C\mathbf{y}$ . Ved teorem 10.0.0 er videre

$$D = C^{-1} M C$$

en diagonal matrise med egenverdien  $\lambda_i$  på linje  $i$  av diagonalen. Dette gir

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^t M \mathbf{x} = (C\mathbf{y})^t M (C\mathbf{y}) \\ &= \mathbf{y}^t C^t M C \mathbf{y} = \mathbf{y}^t C^{-1} M C \mathbf{y} \\ &= \mathbf{y}^t D \mathbf{y}, \end{aligned}$$

siste overgang fordi  $C$  er en ortogonal matrise (teorem 10.5.6). Siden  $D$  er diagonal med egenverdiene langs diagonalen, følger resultatet. ■

**Definithetsbegrepene**

En kvadratisk form  $Q$  på  $\mathbf{R}^n$  kalles

- **positiv definit** hvis  $Q(\mathbf{x}) > 0$  for alle  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
- **negativ definit** hvis  $Q(\mathbf{x}) < 0$  for alle  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
- **indefinit** hvis  $Q(\mathbf{x})$  antar både positive og negative verdier.

Videre kalles formen  $Q$  for **positiv semidefinit** hvis  $Q(\mathbf{x}) \geq 0$  for alle  $\mathbf{x}$ , og **negativ semidefinit** hvis  $Q(\mathbf{x}) \leq 0$  for alle  $\mathbf{x}$ .

**Teorem 2 Kvadratiske former og egenverdier**

La  $Q$  være en kvadratisk form på  $\mathbf{R}^n$  slik at  $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t M \mathbf{x}$  for alle  $\mathbf{x}$ , der  $M$  er en symmetrisk  $(n \times n)$ -matrise. Da er  $Q$ :

- Positiv definit hvis og bare hvis alle egenverdiene for  $M$  er positive
- Positiv semidefinit hvis og bare hvis alle egenverdiene for  $M$  er positive eller null
- Negativ semidefinit hvis og bare hvis alle egenverdiene for  $M$  er negative eller null
- Negativ definit hvis og bare hvis alle egenverdiene for  $M$  er negative
- Indefinit hvis og bare hvis  $M$  har både positive og negative egenverdier.

**Bevis** Ved teorem 10.4.4 har  $M$  en ortonormal egenbasis  $B$ . Ved prinspalakseteoremet 10.8.1 er så

$$Q(\mathbf{x}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2,$$

for alle  $\mathbf{x}$ , der  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  er egenverdiene til  $M$  og  $[y_1, \dots, y_n]$  er koordinatvektoren til  $\mathbf{x}$  i basisen  $B$ . Siden overgangsmatrisen fra basisen  $B$  til standardbasis er inverterbar, har vi  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  hvis og bare hvis  $y_1 = y_2 = \cdots = y_n = 0$ . Resultatet følger fra dette. ■

**Klassifisering av roterte kjeglesnitt**

I seksjon 2.13 så vi at en likning på formen

$$Ax_1^2 + Cx_2^2 + Dx_1 + Ex_2 + F = 0 \quad (\text{i})$$

stort sett alltid vil representere en ellipse, en parabel eller en hyperbel i  $xy$ -planet. Unntakene var “degenererte tilfeller” som for eksempel  $A = C = 0$ . Teknikken vi brukte for klassifiseringen var utvidelse til fullstendig kvadrat. Ved hjelp av forrige teorem kan vi nå utvide vår klassifiseringsteknikk til å dekke likninger på formen

$$Ax_1^2 + Bx_1x_2 + Cx_2^2 + Dx_1 + Ex_2 + F = 0, \quad (\text{ii})$$

der vi nå også tillater at koeffisienten  $B$  foran kryssleddet  $x_1x_2$  er ulik null. Teknikken nå blir:

**Hvordan klassifisere roterte kjeglesnitt**

1. Gitt likningen (ii). Konsentrer deg først om den kvadratiske formen

$$Q(\mathbf{x}) = Ax_1^2 + Bx_1x_2 + Cx_2^2,$$

der  $\mathbf{x} = [x_1, x_2]$ . Skriv denne på formen  $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t M \mathbf{x}$ , der  $M$  er en symmetrisk  $(2 \times 2)$ -matrise.

2. Finn egenverdiene  $\lambda_1$  og  $\lambda_2$  for  $M$  (de kan være like), og finn en ortonormal basis for  $\mathbf{R}^2$  bestående av tilhørende egenvektorer  $\mathbf{u}_1 = [p, r]$  og  $\mathbf{u}_2 = [q, s]$ . La  $C$  være matrisen med  $\mathbf{u}_1$  og  $\mathbf{u}_2$  som søyler, altså

$$C = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}.$$

3. Innfør nye koordinater  $\mathbf{y} = [y_1, y_2] = C\mathbf{x}$ , altså

$$\begin{aligned} x_1 &= py_1 + qy_2 \\ x_2 &= ry_1 + sy_2. \end{aligned} \tag{iii}$$

Dette svarer til et koordinatskifte i planet. De nye koordinatene  $(y_1, y_2)$  gir komponentene til koordinatvektoren i egenbasen for  $M$ , og aksene tilsvarende disse nye koordinatene gis av vektorene  $\mathbf{u}_1$  og  $\mathbf{u}_2$ . Tegn en figur som viser disse. Uttrykk så hele likning (ii) ved  $y_1$  og  $y_2$ , dvs. sett inn uttrykkene (iii) for  $x_1$  og  $x_2$ . Leddene tilsvarende formen  $Q$  trenger du egentlig ikke regne ut, for ved prinspalakseteoremet må de bli

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2.$$

Etter innsettingen i punkt 3 er du garantert å få en likning på formen (i) i de nye koordinatene  $(y_1, y_2)$ . Du kan så klassifisere denne likningen som vi gjorde i kapittel 5, ved utvidelse til fullstendig kvadrat og så videre. Men husk at likningen du nå jobber med svarer til det nye  $(y_1, y_2)$ -koordinatsystemet. Dette vil typisk være rotert og muligens speilet i forhold til det gamle, og derfor er det typiske bildet at likningen (ii) representerer et kjeglesnitt som er *rotert* i forhold til standardkoordinatsystemet.

**Bevis for annenderiverttesten**

Vi skal her gi et bevis for annenderiverttesten for skalarfunksjoner av flere variable. Denne testen finner du i MIP teorem 12.4.2. Vi trenger følgende hjelpesetning, som er en flervariabelversjon av Taylors formel av annen orden. Merk den perfekte analogien med envariabeltilfellet! Du kan nå muligens gjette

hvordan flervariabelversjonene av de høyere ordens Taylorformlene ser ut også. Slik setningen står, trenger man egentlig bare forutsette at  $f$  er  $C^2$  i punktet  $\mathbf{a}$ . Men beviset blir penere når vi antar at den er  $C^3$ , så derfor nøyer vi oss med det.

### **Teorem 3    Annen ordens Taylorformel i flere variable**

La  $f; \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  være  $C^3$  i punktet  $\mathbf{a}$ . Da finnes det en omegn  $U$  om  $\mathbf{a}$  slik at vi for alle  $\mathbf{x} \in U$  har at  $f(\mathbf{x})$  er lik

$$f(\mathbf{a}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})(x_i - a_i) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a})(x_i - a_i)(x_j - a_j) + E(\mathbf{x}),$$

der restleddet  $E(\mathbf{x})$  oppfyller  $E(\mathbf{x})/|\mathbf{x} - \mathbf{a}|^2 \rightarrow 0$  når  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}$ .

**Bevis** For fastholdt  $\mathbf{x}$  kan vi definere en envariabelfunksjon  $g(t)$  ved

$$g(t) = f(\mathbf{a} + t(\mathbf{x} - \mathbf{a})).$$

Ved å bruke envariabelutgaven av Taylors formel på denne, får vi

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{g''(0)}{2!} + R_2, \quad (1)$$

der  $R_2 = \frac{1}{3!}g'''(c)(1-0)^3 = \frac{1}{3}g'''(c)$ , med  $c \in \langle 0, 1 \rangle$ . Suksessiv bruk av kjerneregelen gir

$$\begin{aligned} g'(t) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a} + t(\mathbf{x} - \mathbf{a}))(x_i - a_i) \\ g''(t) &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a} + t(\mathbf{x} - \mathbf{a}))(x_i - a_i)(x_j - a_j) \\ g'''(t) &= \sum_{i,j,k=1}^n \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(\mathbf{a} + t(\mathbf{x} - \mathbf{a}))(x_i - a_i)(x_j - a_j)(x_k - a_k). \end{aligned}$$

Setter du inn ved hjelp av dette i likning (1) og døper

$$E(\mathbf{x}) = \frac{1}{3} \sum_{i,j,k=1}^n \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(\mathbf{a} + c(\mathbf{x} - \mathbf{a}))(x_i - a_i)(x_j - a_j)(x_k - a_k),$$

faller formelen i teoremet rett ut. Det gjenstår å vise at  $E(\mathbf{x})/|\mathbf{x} - \mathbf{a}|^2 \rightarrow 0$  når  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}$ . Siden  $f$  er  $C^3$  i punktet  $\mathbf{a}$ , kan vi velge en lukket omegn  $U$  om  $\mathbf{a}$  der alle de tredje ordens partielle deriverte av  $f$  er kontinuerlige. Ved

ekstremalverdisetningen vil det finnes et tall  $M > 0$  slik at alle disse partielle deriverte har absoluttverdi mindre enn  $M$  på omegnen  $U$ . Merk at hvis  $\mathbf{x} \in U$ , så vil også punktet  $\mathbf{a} + c(\mathbf{x} - \mathbf{a})$  ligge i  $U$ . Videre har vi at  $|x_i - a_i| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{a}|$  for alle  $i$ , og det følger at

$$|E(\mathbf{x})| \leq \frac{1}{3} \cdot M \cdot |\mathbf{x} - \mathbf{a}|^3$$

for alle  $x \in U$ . Altså er  $\|E(\mathbf{x})\|/|\mathbf{x} - \mathbf{a}| \leq \frac{1}{3} \cdot M \cdot |\mathbf{x} - \mathbf{a}|$ , og dette viser at  $E(\mathbf{x})/|\mathbf{x} - \mathbf{a}|^2 \rightarrow 0$  når  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}$ . ■

Vi skal nå bevise annenderiverttesten, MIP teorem 12.4.2. Med en liten omskriving av 10.8.3 får vi at det finnes en omegn  $U$  om  $\mathbf{a}$  slik at for alle  $\mathbf{x}$  i denne omegnen gjelder

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) + \frac{1}{2} Q(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + E(\mathbf{x}), \quad (1)$$

der  $Q(\mathbf{y}) = \mathbf{y}^t H_{\mathbf{a}} \mathbf{y}$  er den kvadratiske formen svarende til Hessematrixen  $H_{\mathbf{a}}$ . Ved teorem 6.4.2 er matrixen  $H_{\mathbf{a}}$  symmetrisk, så vi kan bruke resultatene fra denne seksjonen. Hele poenget ligger nå i likning (1). Siden  $E(\mathbf{x})/|\mathbf{x} - \mathbf{a}|^2 \rightarrow 0$  når  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}$ , vil leddet med  $E$  være neglisjerbart i forhold til leddet med  $Q$  når  $\mathbf{x}$  er tilstrekkelig nær  $\mathbf{a}$ . Dermed vil tillegget vi får i funksjonsverdien til  $f$  når vi går fra  $\mathbf{a}$  til et nærliggende punkt  $\mathbf{x}$ , bestemmes av fortegnet til  $Q(\mathbf{x} - \mathbf{a})$ . Teorem 10.8.2 gir oss da resultatet i annenderiverttesten temmelig direkte. Vi må bare fylle inn noen detaljer.

La  $\mathbf{x}$  ligge i omegnen  $U$ . Ved prinspalakseteoremet er

$$Q(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 \cdots + \lambda_n y_n^2, \quad (2)$$

der  $[y_1, \dots, y_n]$  er koordinatvektoren til  $\mathbf{x} - \mathbf{a}$  i en passende ortonormal egenbasis for Hessematrixen. Anta at alle egenverdiene til  $H_{\mathbf{a}}$  er positive. Ved omnummerering kan vi anta at  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ . Fra (2) fås da

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{x} - \mathbf{a}) &\leq \lambda_1 y_1^2 + \lambda_1 y_2^2 \cdots + \lambda_1 y_n^2 \\ &= \lambda_1 (y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2) = \lambda_1 |\mathbf{x} - \mathbf{a}|^2, \end{aligned}$$

siste overgang ved teorem 10.1.3; husk at  $|\mathbf{x} - \mathbf{a}|^2 = \langle \mathbf{x} - \mathbf{a} | \mathbf{x} - \mathbf{a} \rangle$ . Dette betyr at

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{Q(\mathbf{x} - \mathbf{a})}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}|^2} \leq \lambda_1,$$

og det følger at  $f(\mathbf{x})$  er større enn  $f(\mathbf{a})$  for  $\mathbf{x}$  tilstrekkelig nær  $\mathbf{a}$ . Ergo er  $\mathbf{a}$  et lokalt minimum for  $f$ .

De øvrige tilfellene i annenderiverttesten vises på helt tilsvarende måte.

**10.8 Oppgaver**

---

**1.** Finn en symmetrisk  $(2 \times 2)$ -matrise  $M$  slik at den oppgitte kvadratiske formen kan skrives  $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t M \mathbf{x}$ .

a)  $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + 3x_2^2 + 8x_1x_2$

b)  $Q(x_1, x_2) = \pi x_1^2 - 8x_2^2 - 3x_1x_2$

**2.** Finn en symmetrisk  $(3 \times 3)$ -matrise  $M$  slik at den oppgitte kvadratiske formen kan skrives  $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t M \mathbf{x}$ .

a)  $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 + 8x_1x_3$

b)  $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_2x_3$

**3.** Klassifiser kjeglesnittet og illustrer det på en figur.

a)  $20x^2 + 16xy + 8y^2 + 52x + 16y - 1 = 0$

b)  $x^2 + 4xy - 2y^2 + 13 = 10x - 4y$

c)  $x^2 + 3xy + 5y^2 - 2 = 0$

d)  $2xy = 1$

e)  $25x^2 - 20xy + 4y^2 - 6x - 15y = 0$

# Kapittel 11

## Kompleks lineær algebra

---

*Dette kapitlet bygger på kapitlene 1, 5, 6, 9 og 10 samt hele MIP.*

---

## 11.1 Komplekse vektorrom

I kapittel 10 MIP løste vi matrisedynamiske problemer ved å finne egenverdiene til overgangsmatrisen og uttrykke startvektoren ved tilhørende egenvektorer for denne matrisen. Metoden vår forutsatte imidlertid at de karakteristiske røttene til matrisen  $M$  var *reelle*. Men som vi har sett, hender det at matriser med reelle tall som komponenter har karakteristiske røtter som ikke er reelle. Generelt er det eneste vi vet at de karakteristiske røttene er komplekse tall.

Spørsmålet er da: Hva skjer hvis overgangsmatrisen vår tilfeldigvis har “komplekse egenverdier”, altså ikke-reelle karakteristiske røtter? Kan vi utvide vår metode for å regne oss  $n$  steg fremover i tiden til å dekke disse tilfellene også? Faktisk kan vi det. Men det viser seg at i så fall må vi tillate at også egenvektorene har komplekse tall som komponenter. Dermed havner vi over i en situasjon hvor hele lineæralgebraen blir kompleks; vi må snakke om komplekse matriser, komplekse skalarer og alt slikt.

I dette kapitlet skal vi se hvordan lineæralgebra basert på komplekse tall kan bygges opp. Faktum er at det aller meste fungerer akkurat som før, bortsett fra at skalarene våre vil være komplekse tall.

Vi begynner med definisjonen av et komplekst vektorrom. Denne er fullstendig analog til definisjon 9.1.1 av et reelt vektorrom.

### Definisjon 1 Komplekse vektorrom

Et *komplekst vektorrom* er en mengde  $V$  av objekter som kalles *vektorer*. På  $V$  skal det være definert to regneoperasjoner, nemlig *vektoraddisjon* (skrives  $+$ ) og *skalarmultiplikasjon* (skrives som vanlig ganging). Disse to operasjonene skal oppfylle følgende 10 aksiomer for alle vektorer  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$  og alle skalarer  $r, s \in \mathbb{C}$ :

- C1 Alle vektorsummer  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$  ligger i  $V$
- C2 Alle skalarmultipliserte vektorer  $r\mathbf{u}$  ligger i  $V$
- C3 Der fins en *nullvektor*  $\mathbf{0} \in V$  slik at  $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$
- C4 For hver  $\mathbf{u} \in V$  fins en vektor  $-\mathbf{u} \in V$  slik at  $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ .
- C5 Kommutativ lov:  $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
- C6 Assosiativ lov:  $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
- C7 Assosiativ lov:  $r(s\mathbf{u}) = (rs)\mathbf{u}$
- C8 Distributiv lov:  $r(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = r\mathbf{u} + r\mathbf{v}$
- C9 Distributiv lov:  $(r + s)\mathbf{u} = r\mathbf{u} + s\mathbf{u}$
- C10 Multiplikasjon med 1:  $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Med en *skalar* vil jeg i hele dette kapitlet mene et komplekst tall  $c \in \mathbb{C}$ .



**Eksempel 1** Akkurat som rommene  $\mathbf{R}^n$  for  $n = 1, 2, 3, \dots$  utstyrt med de vanlige vektoroperasjonene er der erketyperiske eksemplene på reelle vektorrom, gir de tilsvarende rommene  $\mathbf{C}^n$  definert ved

$$\mathbf{C}^n = \{(z_1, z_2, \dots, z_n) \mid z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbf{C}\}$$

oss de erketyperiske eksemplene på komplekse vektorrom. Vi definerer vektoraddisjon og multiplikasjon med skalarer i  $\mathbf{C}^n$  komponentvis, akkurat som for de reelle rommene. Man kan sjekke at aksiomene C1–C10 da er oppfylt for rommene  $\mathbf{C}^n$  på akkurat samme måte som man sjekker A1–A10 for de reelle rommene  $\mathbf{R}^n$ . For eksempel er

$$\mathbf{u} = [2, 5 + 6i, -7i] \quad \text{og} \quad \mathbf{v} = [0, -3i, i + 2]$$

elementer i det komplekse vektorrommet  $\mathbf{C}^3$ . Merk at vi skriver elementer i  $\mathbf{C}^n$  både med klammeparenteser og runde parenteser, akkurat som elementene i  $\mathbf{R}^n$ . Vi har

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + \mathbf{v} &= [2, 5 + 6i, -7i] + [0, -3i, 2 + i] = [2, 5 + 3i, 2 - 6i] \\ (4 + 2i)\mathbf{u} &= (4 + 2i)[2, 5 + 6i, -7i] \\ &= [2(4 + 2i), (4 + 2i)(5 + 6i), (4 + 2i)(-7i)] \\ &= [8 + 4i, 8 + 34i, 14 - 28i]. \end{aligned}$$

Det er ikke så lett å forestille seg rommene  $\mathbf{C}^n$  for  $n \geq 2$  geometrisk, allerede  $\mathbf{C}^2$  vil kreve 4 “reelle” dimensjoner for å la seg visualisere. Likevel kan vi regne med disse rommene etter stort sett akkurat de samme reglene som vi bruker for rommene  $\mathbf{R}^n$ . ■

## Den store analogien

Vi har allerede sett at definisjonen av et komplekst vektorrom er fullstendig analog til definisjonen av et reelt sådant. Det viser seg at denne analogien kan videreføres: Når man

- bytter ut “vektorrom” med “komplekst vektorrom”
- tolker “skalar” som et komplekst tall
- erstatter bruken av aksiomene A1–A10 med de analoge aksiomene C1–C10, og erstatter for komster av  $\mathbf{R}$  og  $\mathbf{R}^n$  med  $\mathbf{C}$  og  $\mathbf{C}^n$  på de naturlige stedene,

så er *samtlig*e definisjoner og teoremer som ble gitt for reelle vektorrom og lineærtransformasjoner i kapittel 9, også gyldige for komplekse vektorrom.

Grunnen er rett og slett at bevisene kan brukes akkurat slik de står. I isomorfiteoremet 9.4.1 må  $\mathbf{R}^n$  byttes ut med  $\mathbf{C}^n$ , slik at teoremet nå sier at ethvert  $n$ -dimensjonalt komplekst vektorrom er isomorft med  $\mathbf{C}^n$ . Regning med matriser og determinanter som har komplekse elementer defineres fullstendig analogt med våre reelle definisjoner i MIP kapittel 10, og teoremene i seksjonene MIP 10.1-10.5 er fortsatt gyldige. Determinanten til en kompleks matrise vil generelt bli et komplekst tall. Vi kan nå også tillate komplekse tall som koeffisienter i de lineære likningsystemene våre, og disse systemene vil generelt ha komplekse tall i løsningene.

En spesiell ting å merke seg, er at standardbasen for  $\mathbf{C}^n$  fortsatt bare består av vektorene

$$[1, 0, 0, \dots, 0], [0, 1, 0, \dots, 0], \dots [0, 0, \dots, 0, 1].$$

Der er  $n$  stykker av disse, og rommet  $\mathbf{C}^n$  er derfor et komplekst vektorrom av dimensjon  $n$ . Vi trenger altså ikke noen nye basisvektorer til å "ta oss av" den imaginære enheten  $i$ , hva nå enn det skulle bety. Tallet 1 spiller akkurat samme rolle i det komplekse tallsystemet  $\mathbf{C}$  som det gjør i det reelle tallsystemet  $\mathbf{R}$ ; vi har  $1 \cdot z = z$  for alle komplekse tall  $z$ .

## Komplekse egenverdier og egenvektorer

I analogi med det reelle tilfellet, sier vi at en kompleks skalar  $\lambda$  er en *egenverdi* for en lineærtransformasjon  $T : V \rightarrow V$  mellom to komplekse vektorrom dersom det finnes en vektor  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  slik at

$$T(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}.$$

Anta nå at  $V$  endeligdimensjonalt, med kompleks dimensjon  $n$ . For å finne egenverdiene til en gitt transformasjon, kan vi som før finne egenverdiene til matrisen  $[T]_B^B$  for transformasjonen i en vilkårlig basis  $B$  for vektorrommet  $V$ . Matrisen  $[T]_B^B$  er en  $(n \times n)$ -matrise med komplekse tall som elementer, og dens karakteristiske polynom  $p(\lambda)$  er definert akkurat som i det reelle tilfellet. Men siden vi nå tillater komplekse egenverdier, blir situasjonen faktisk mer oversiktlig:

### Teorem 1 Egenverdier for komplekse matriser

Hvis  $M$  er en kompleks matrise av størrelse  $(n \times n)$ , så er alle de karakteristiske røttene til  $M$  egenverdier for  $M$ . Hvis vi regner med multiplisitet, har matrisen  $M$  altså nøyaktig  $n$  egenverdier.

**Bevis** Polynomet  $p(\lambda)$  er et polynom av grad  $n$ , så ved algebraens fundamentalteorem (MIP s. 234) har det  $n$  røtter, regnet med multiplisitet. ■

Etter dette går alle definisjonene og teoremene i seksjonene 9.6–9.8 også gjennom akkurat som før. Blant annet kan vi altså snakke om egenbasis, similaritet og diagonalisering i det komplekse tilfellet. Vi har dermed etablert en kompleks analogi til hele den sentrale teorien i kapittel 15. Kun én ting mangler: Vi har ennå ikke gitt noe bevis for algebraens fundamentalteorem. Dette tas opp i seksjon 11.6, som er stjernemerket.

## 11.1 Oppgaver

1. La  $V$  være mengden av komplekse  $(2 \times 2)$ -matriser.

- Vis at hvis matriseaddisjon og multiplikasjon av matrise med kompleks skalar defineres på den vanlige måten, så blir  $V$  et komplekst vektorrom.
- Angi en basis for  $V$ . Finn dimensjonen til  $V$ .

2. Avgjør om den gitte funksjonsmengden er et komplekst vektorrom når vektoraddisjon og skalarmultiplikasjon foregår etter de vanlige reglene  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$  og  $(rf)(x) = rf(x)$ .

- Mengden av alle funksjoner  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$  som oppfyller  $f(5) = 0$ .
- Mengden av alle funksjoner  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$  som oppfyller  $f(5) = 1$ .
- Mengden av alle funksjoner  $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ .

3. Løs likningssystemet

$$\begin{cases} iz - w = 2i \\ z + 2iw = -i \end{cases}$$

ved Gauss-eliminasjon.

4. La  $\theta$  være et reelt tall slik at  $\sin \theta \neq 0$ . Finn egenverdier og en egenbasis for rotasjonsmatrisen

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

5. De tre såkalte *Pauli-matrisene*

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

er viktige i kvantemekanikk. De representerer måling av såkalt *spinn* for en partikkel langs henholdsvis  $x$ -aksen,  $y$ -aksen og  $z$ -aksen i et passende koordinatsystem. Vi skal se litt på egenskapene til disse matrisene.

- Vis at  $\sigma_i^2 = I$  for  $i = 1, 2, 3$ .
- Vis at

$$\sigma_1 \sigma_2 = i \sigma_3$$

- Finn determinanten til hver av de tre Paulimatrisene.
- Finn egenverdiene til hver av de tre Paulimatrisene.

e) Finn en egenbasis for  $\mathbf{C}^2$  tilhørende hver av de tre Paulimatrisene.

6. La  $p, q, r, s$  være vilkårlige komplekse tall. Uttrykk matrisen

$$M = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$$

som en lineærkombinasjon av de tre Paulimatrisene fra forrige oppgave samt identitetsmatrisen.

7. I denne oppgaven skal vi studere et eksempel på matrisedynamikk med komplekse egenverdier. Merk at vi her starter med en problemstilling som kun involverer reelle tall. I regningen vår introduserer vi så komplekse tall. Men når vi til slutt regner oss frem til tilstanden  $n$  steg fremover i tiden, ser vi at *den* blir gitt ved et reelt uttrykk som er praktisk tolkbart! Vi går altså *fra* en reell og tolkbar problemstilling "ute i lyset", via et "mørkt" mellomspill med komplekse tall, frem *til* et reelt tolkbart svar. Filosofer gjerne over dette, det er det vel verdt.

La oss tenke oss at vi studerer to ulike fluetyper, nemlig *hatefluene* og *de snille fluene*. Vi lar  $x_n$  og  $y_n$  være henholdsvis antall hatefluier og antall snille fluier ved tid  $t = n$ , tiden målt i uker. Vanligvis femtidobler begge fluesortene sitt antall på en uke, gitt at de lever under gode forhold. Opplegget er nå imidlertid slik at koloniene med hatefluier og snille fluier lever tett innpå hverandre. Hatefluene hater selvsagt dette, og frustrasjonen over å ha de snille fluene i nærheten påvirker hatefluenes forplantningsevne negativt. Vi antar derfor at

$$x_{n+1} = 50x_n - y_n$$

for  $n = 0, 1, 2, \dots$ , der korreksjonsleddet til høyre skyldes de snille fluene. De snille fluene på sin side synes det er koselig å ha en annen koloni fluier i nærheten av seg, og blir påvirket positivt av dette. Vi antar at

$$y_{n+1} = 50y_n + x_n,$$

der korreksjonsleddet til høyre skyldes gleden de føler.

a) Sett opp overgangsmatrisen  $A$  slik at

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$$

for  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Vis at egenverdiene til  $A$  er de komplekse tallene

$$\lambda_1 = 50 + i \quad \text{og} \quad \lambda_2 = 50 - i.$$

- b) Vis at egenvektorene for  $A$  tilhørende henholdsvis  $\lambda_1$  og  $\lambda_2$  er

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ -iA_1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} A_2 \\ iA_2 \end{bmatrix}$$

Her kan vi tillate at  $A$ -ene er vilkårlige komplekse tall.

- c) Anta at tilstandsvektoren ved  $t = 0$  er

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Skriv denne som en sum av egenvektorer til  $A$ , og bruk dette til å vise at

$$x_n = (50 + i)^{n+1} + (50 - i)^{n+1}.$$

- d) Ta utgangspunkt i uttrykket for  $x_n$  fra c), og vis ved omregning at vi for alle naturlige tall  $n$  har

$$x_n = 2 \cdot (\sqrt{2501})^{n+1} \cos[(n+1)\theta],$$

der  $\theta \approx 0,02$ . Hint: Skriv

$$50 + i \quad \text{og} \quad 50 - i$$

om på polar form. Hvor lang tid tar det før de fæle hatefluene er utryddet?

## 11.2 Komplekse indreproduktrom

I kapittel 16 studerte vi indreprodukter på reelle vektorrom. Denne seksjonen handler om den komplekse utgaven av indreprodukter.

La oss først se om vi kan definere et “prikkprodukt” på  $\mathbf{C}^n$  som er analogt til vårt gamle prikkprodukt for vektorer i  $\mathbf{R}^n$ . Et naturlig ide å la prikkproduktet  $\bullet$  mellom to vektorer  $\mathbf{z} = [z_1, \dots, z_n]$  og  $\mathbf{w} = [w_1, \dots, w_n]$  fra  $\mathbf{C}^n$  være definert ved

$$\mathbf{z} \bullet \mathbf{w} = z_1 w_1 + z_2 w_2 + \dots + z_n w_n,$$

akkurat som i det reelle tilfellet. Vi ønsker at  $(\mathbf{z} \bullet \mathbf{z})^{1/2}$  skal kunne tolkes som en norm, altså en slags lengde, av vektoren  $\mathbf{a}$ . Men dette blir problematisk, for vi får vektorer med kompleks lengde: For eksempel blir

$$[i, 0] \bullet [i, 0] = i^2 - 0 = -1.$$

Altså var ikke forsøket med dette prikkproduktet  $\bullet$  vellykket.

La oss derfor prøve å starte i motsatt ende, med normbegrepet. En naturlig kandidat til et mål for “lengde” av en kompleks vektor  $\mathbf{z} = [z_1, \dots, z_n]$  er

$$\|\mathbf{z}\| = (|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2)^{1/2},$$

der  $|z_j|$  er den komplekse absoluttverdien av komponenten  $z_j$  i vektoren. Denne lengden er alltid et ikke-negativt reelt tall, og den er null hvis og bare hvis alle komponentene til  $\mathbf{z}$  er null. Det virker lovende. Med dette valget kan vi skrive

$$\|\mathbf{z}\|^2 = |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 = \bar{z}_1 z_1 + \dots + \bar{z}_n z_n,$$

der jeg i siste overgang brukte resultatet fra oppgave MIP 8.5.13a. Dette motiverer følgende definisjon:

**Definisjon 1 Prikkprodukt og norm på  $\mathbf{C}^n$** 

Hvis  $\mathbf{z} = [z_1, \dots, z_n]$  og  $\mathbf{w} = [w_1, \dots, w_n]$  er to vektorer i  $\mathbf{C}^n$ , så er det komplekse prikkproduktet  $\langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle$  av dem definert ved

$$\mathbf{z} \cdot \mathbf{w} = \bar{z}_1 w_1 + \dots + \bar{z}_n w_n.$$

Med *normen* av vektoren  $\mathbf{z}$  menes  $\|\mathbf{z}\| = (\mathbf{z} \cdot \mathbf{z})^{1/2}$ .

Med denne definisjonen får vi, slik vi ønsket,

$$\|\mathbf{z}\| = (\mathbf{z} \cdot \mathbf{z})^{1/2} = (\bar{z}_1 z_1 + \dots + \bar{z}_n z_n)^{1/2} = (|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2)^{1/2},$$

Prikkproduktet på  $\mathbf{C}^n$  er modell for vår definisjon av et indreprodukt på et generelt komplekst vektorrom.

**Definisjon 2 Komplekst indreproduktrom**

Et *komplekst indreprodukt* på et komplekst vektorrom  $V$  er en funksjon som til hvert par av vektorer  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$  tilordner et komplekst tall  $\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle$ , slik at følgende aksiomer er oppfylt for alle  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$  og alle komplekse skalarer  $r$ :

$$\text{E1 } \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v} | \mathbf{u} \rangle}$$

$$\text{E2 } \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u} | \mathbf{w} \rangle$$

$$\text{E3 } \langle \mathbf{u} | r\mathbf{v} \rangle = r\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle$$

$$\text{E4 } \langle \mathbf{u} | \mathbf{u} \rangle \geq 0, \text{ og } \langle \mathbf{u} | \mathbf{u} \rangle = 0 \text{ hvis og bare hvis } \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Med et *komplekst indreproduktrom* menes et vektorrom  $V$  der det er spesifisert et komplekst indreprodukt. Komplekse indreprodukter kalles også *euklidiske* indreprodukter.

Merk at aksiomene E1 og E3 er endret i forhold til definisjon 10.1.1. Dette skyldes at prikkproduktet på  $\mathbf{C}^n$  ikke tilfredsstillter I1 og I3 fra den reelle definisjonen. Aksiom E1 sier at et komplekst indreprodukt blir *konjugert* når vektorene bytter plass. Aksiom E3 sier at vi kan sette utenfor skalarer  $r$  som står multiplisert med den andre vektoren. Men hva skjer hvis  $r$  står ganget med den første vektoren i stedet? Jo, da får vi

$$\langle r\mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v} | r\mathbf{u} \rangle} = r\overline{\langle \mathbf{v} | \mathbf{u} \rangle} = r\overline{\langle \mathbf{v} | \mathbf{u} \rangle} = r\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle.$$

Så skalarer som står ganget med den første vektoren *konjugeres* når de settes utenfor indreproduktet. Derimot får vi

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u} + \mathbf{v} | \mathbf{w} \rangle &= \overline{\langle \mathbf{w} | \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle} = \overline{\langle \mathbf{w} | \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{w} | \mathbf{v} \rangle} \\ &= \overline{\langle \mathbf{w} | \mathbf{u} \rangle} + \overline{\langle \mathbf{w} | \mathbf{v} \rangle} = \langle \mathbf{u} | \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v} | \mathbf{w} \rangle \end{aligned}$$

akkurat som før. Gå nå gjennom aksiomene E1 og E4 ovenfor og overbevis deg om at prikkproduktet på  $\mathbf{C}^n$  oppfyller alle disse.

Vi durer så videre med definisjon av norm og avstand, i full analogi med det reelle tilfellet:

### Definisjon 3    Kompleks norm og avstand

La  $V$  være et komplekst indreproduktrom. Med *normen*  $\|\mathbf{v}\|$  til en vektor  $\mathbf{v}$  menes

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v} | \mathbf{v} \rangle}.$$

Med *avstanden* fra  $\mathbf{v}$  til en annen vektor  $\mathbf{w}$  i  $V$  menes normen av vektoren  $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ , altså  $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$ .

I analogi med definisjon 10.1.3 sier vi at to vektorer  $\mathbf{u}$  og  $\mathbf{v}$  i et komplekst indreproduktrom er *ortogonale* dersom

$$\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = 0.$$

Siden

$$\bar{z} = 0 \iff z = 0$$

for alle komplekse tall  $z$ , er denne betingelsen ekvivalent med at

$$\langle \mathbf{v} | \mathbf{u} \rangle = \overline{\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle} = 0.$$

Resten av definisjonene, teoremene og bevisene i seksjon 16.1 og 16.2 går nå gjennom akkurat som før, med unntak av følgende fire småting:

- Beviset for teorem 10.1.1 (Egenskaper ved normer) må modifiseres. Se oppgave 11.2.7.
- I teorem 10.1.3 (Indreprodukt i ortonormal basis) må prikkproduktet mellom koordinatvektorene nå selvsagt tolkes som prikkprodukt i  $\mathbf{C}^n$ , altså med komplekskonjugering av komponentene i den første vektoren. Beviset er riktig slik det står; merk at  $\langle \mathbf{v} | \mathbf{b}_i \rangle = \overline{\langle \mathbf{b}_i | \mathbf{v} \rangle}$  for hver  $i$  slik at nest siste overgang i regningen er korrekt i henhold til det komplekse prikkproduktet av de to koordinatvektorene.
- Merk generelt at *rekkefølgen* av faktorene i indreproduktene spiller en rolle i det komplekse tilfellet. Ikke alle resultatene blir korrekte hvis rekkefølgen byttes. For eksempel vil vektoren

$$\mathbf{m}_2 = \mathbf{a}_2 - \langle \mathbf{a}_2 | \mathbf{q}_1 \rangle \mathbf{q}_1$$

ofte *ikke* være ortogonal på  $\mathbf{q}_1$ . Dette kan sjekkes ved å regne ut  $\langle \mathbf{q}_1, \mathbf{m}_2 \rangle$ . Sammenlikne med Gram-Schmidt-prosessen 10.2.1.

- I teorem 10.3.5 om matrisene til projeksjoner må den transponerte matrisen  $A^t$  erstattes av den såkalte *konjugerttransponerte* matrisen  $A^*$  til  $A$ . Nedenfor skal jeg definere denne matrisen og sette opp den komplekse versjonen av teoremet og beviset.

#### Definisjon 4 Den konjugert-transponerte matrisen

La  $A$  være en matrise med komplekse tall som elementer. Den *komplekskonjugerte* matrisen  $A^*$  til  $A$  er da matrisen som fås fra  $A$  ved å transponere og deretter konjugere alle elementene.

Hvis  $A$  er en matrise, bruker man notasjonen  $\bar{A}$  om matrisen som fås fra  $A$  ved å konjugere alle elementene i  $A$ . Med denne notasjonen har vi altså

$$A^* = \overline{A^t} = (\bar{A})^t.$$

Den siste likheten uttrykker at det er uvesentlig om vi transponerer først og konjugerer etterpå, eller omvendt. Her er den komplekse versjonen av teorem 10.3.5.

#### Teorem 1 Den komplekse projeksjonsmatrisen

La  $V$  være et endeligdimensjonalt komplekst indreproduktrom med en ortonormal basis  $B = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ , la  $U$  være et underrom av  $V$ , og la  $B' = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$  være en ortonormal basis for  $U$ . La  $A$  være matrisen med koordinatvektorene

$$[\mathbf{u}_1]_B, \dots, [\mathbf{u}_k]_B$$

som søyler, og la  $P : V \rightarrow V$  være projeksjonen av vektorrommet  $V$  på underrommet  $U$ . Da er

$$[P]_B^B = A \cdot A^*$$

**Bevis** Dette følger beviset for teorem 10.3.5 nøyaktig helt frem til likningen

$$[P(\mathbf{v})]_B = \begin{bmatrix} [\mathbf{u}_1]_B & \cdots & [\mathbf{u}_k]_B \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \langle \mathbf{u}_1 | \mathbf{v} \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{u}_k | \mathbf{v} \rangle \end{bmatrix}.$$

Ved teorem 10.1.3 er også nå  $\langle \mathbf{u}_i | \mathbf{v} \rangle = [\mathbf{u}_i]_B \cdot [\mathbf{v}]_B$ . Men når vi setter dette inn og uttrykker indreproduktet som et matriseprodukt, får vi nå

$$[P(\mathbf{v})]_B = \begin{bmatrix} [\mathbf{u}_1]_B & \cdots & [\mathbf{u}_k]_B \end{bmatrix} \cdot \left( \begin{bmatrix} \overline{[\mathbf{u}_1]_B} \\ \vdots \\ \overline{[\mathbf{u}_k]_B} \end{bmatrix} \cdot [\mathbf{v}]_B \right),$$

fordi matrisemultiplikasjonen ikke konjugerer selv. Siden matrisemultiplikasjon er assosiativt, følger likningen i teoremet så fra dette, akkurat som i det reelle tilfellet. ■

### **Teorem 2 Egenskaper ved konjugert-transponerte matriser**

La  $A$  og  $B$  ( $m \times n$ )-matriser, la  $C$  være en ( $n \times p$ )-matrise og la  $r$  være en skalar. Da gjelder

1.  $(A^*)^* = A$
2.  $(A + B)^* = A^* + B^*$
3.  $(rA)^* = \bar{r}A^*$
4.  $(AC)^* = C^*A^*$

**Bevis** (1) Å finne  $(A^*)^*$  betyr å transponere  $A^*$  og så konjugere. Da får du  $A$ .

(2) og (3) Se oppgave 11.2.8.

(4) Merk først at vi har  $\overline{A \cdot B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$ . Dette skyldes at hvert element  $(AB)_{ij}$  i produktmatrisen  $AB$  kan skrives

$$(AB)_{ij} = A_{i1}C_{1j} + A_{i2}C_{2j} + \cdots + A_{in}C_{nj}.$$

Siden  $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$  og  $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$  for alle komplekse tall  $z$  og  $w$ , fører dette til at

$$\begin{aligned} \overline{(AB)_{ij}} &= \overline{A_{i1}C_{1j} + A_{i2}C_{2j} + \cdots + A_{in}C_{nj}} \\ &= \bar{A}_{i1} \bar{C}_{1j} + \bar{A}_{i2} \bar{C}_{2j} + \cdots + \bar{A}_{in} \bar{C}_{nj} \\ &= (\bar{A} \cdot \bar{C})_{ij}. \end{aligned}$$

Vi kan nå bevise likning (4) i teoremet slik:

$$(AC)^* = \overline{(AC)^t} = \overline{C^t A^t} = \overline{C^t} \overline{A^t} = C^* \cdot A^*,$$

der jeg brukte teorem 1.13.6 i annen overgang. ■



## 11.2 Oppgaver

1. I det komplekse indreproduktrommet  $\mathbf{C}^3$ , la  $\mathbf{u} = [i, i, i]$  og  $\mathbf{v} = [1, 1 + i, 1 - i]$ . Finn:

- a)  $\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle$       b)  $\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle$       c)  $\|\mathbf{u}\|$   
 d)  $\|\mathbf{v}\|$       e) Vinkelen mellom  $\mathbf{u}$  og  $\mathbf{v}$

2. Avgjør om de gitte vektorene fra  $\mathbf{C}^2$  er ortogonale.

- a)  $[1, i]$  og  $[1, -i]$   
 b)  $[i + 5, 1]$  og  $[2i + 7]$

3. Vis at for alle vektorer  $\mathbf{u}$  og  $\mathbf{v}$  i et komplekst indreproduktrom gjelder

- a)  $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v} | \mathbf{u} \rangle$   
 b)  $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle + 2\langle \mathbf{v} | \mathbf{u} \rangle$   
 c)  $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2$   
 d)  $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$   
 e)  $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \geq \|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\|$

4. Finn den konjugert-transponerte av matrisen.

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 1 & 5i \\ 2 - i & 6 + 6i \end{bmatrix} \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 1 & i & 1 \\ i & i & i \\ i & 1 & i \end{bmatrix}$$

5. La  $U \subseteq \mathbf{C}^3$  være underrommet utspent av vektorene  $[1, 0, 0]$  og  $[0, i, 0]$ , og la  $P : \mathbf{C}^3 \rightarrow \mathbf{C}^3$  være projeksjonen på  $U$ . Bruk teorem 11.2.1 til å finne matrisen

$$[P]_{std}^{std}$$

6. La  $M$  være en kompleks inverterbar  $(n \times n)$ -matrise. Vis at da er  $M^*$  også inverterbar, og  $(M^*)^{-1} = (M^{-1})^*$ .

7. Bevis teorem 10.1.1 i tilfellet at  $V$  er et komplekst vektorrom.

8. I denne oppgaven skal vi bevise to av punktene fra teorem 11.2.2.

- a) Vis punkt 2 i teoremet.  
 b) Vis punkt 3 i teoremet.

## 11.3 Hermitiske og unitære transformasjoner

I denne seksjonen skal vi studere de komplekse analogiene til symmetriske og ortogonale transformasjoner.

### Hermitiske transformasjoner

En Hermitisk transformasjon er det komplekse motstykket til en reell, symmetrisk transformasjon.

#### Definisjon 1 Hermitiske transformasjoner

En lineærtransformasjon  $T : V \rightarrow V$  fra et komplekst indreproduktrom til seg selv kalles *Hermitisk* hvis

$$\langle T(\mathbf{x}) | \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x} | T(\mathbf{y}) \rangle \quad \text{for alle } \mathbf{x} \text{ og } \mathbf{y} \text{ i } V.$$

Vi har nå følgende pene resultat.

**Teorem 1 Egenverdier og egenvektorer for Hermitiske transformasjoner**

La  $T : V \rightarrow V$  være en Hermitisk lineærtransformasjon. Da gjelder:

1. Alle egenverdiene  $\lambda$  til  $T$  er reelle.
2. Hvis  $\mathbf{v}_1$  og  $\mathbf{v}_2$  er egenvektorer for  $T$  tilhørende to ulike egenverdier  $\lambda_1$  og  $\lambda_2$ , så er  $\langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 \rangle = 0$ .

**Bevis** Anta at  $T(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$ , der  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ . Da er

$$\langle T(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \rangle = \langle \lambda\mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle = \bar{\lambda} \langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle.$$

Samtidig er

$$\langle T(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x} | T(\mathbf{x}) \rangle = \langle \mathbf{x} | \lambda\mathbf{x} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle,$$

så siden  $\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle \neq 0$  må konklusjonen bli at  $\bar{\lambda} = \lambda$ . Ergo er  $\lambda$  reell.

(2) Siden  $T$  er Hermitisk, har vi

$$\begin{aligned} 0 &= \langle T(\mathbf{v}_1) | \mathbf{v}_2 \rangle - \langle \mathbf{v}_1 | T(\mathbf{v}_2) \rangle \\ &= \langle \lambda_1 \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 \rangle - \langle \mathbf{v}_1 | \lambda_2 \mathbf{v}_2 \rangle \\ &= \bar{\lambda}_1 \langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 \rangle - \lambda_2 \langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 \rangle \\ &= (\bar{\lambda}_1 - \lambda_2) \langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 \rangle \\ &= (\lambda_1 - \lambda_2) \langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 \rangle, \end{aligned}$$

der jeg i siste overgang brukte at  $\lambda$  ved punkt (1) er reell. Siden  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , gir dette at  $\langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 \rangle = 0$ . ■

**Hermitiske matriser**

Vi skal nå på matrisene som svarer til Hermitiske transformasjoner. Det viser seg at de kan karakteriseres som beskrevet i neste definisjon.

**Definisjon 2 Hermitiske matriser**

En  $(n \times n)$ -matrise  $M$  kalles *Hermitisk* hvis matrisen er lik sin konjugert-transponerte, altså

$$M^* = M.$$

Neste teorem er analogt til teorem 10.4.1 om symmetriske transformasjoner og symmetriske matriser.

### **Teorem 2 Hermitiske transformasjoner og Hermitiske matriser**

La  $T : V \rightarrow V$  være en lineærtransformasjon fra et komplekst endeligdimensjonalt indreproduktrom til seg selv, og la

$$B = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$$

være en ortonormal basis for  $V$ . Da er  $T$  Hermitisk hvis og bare hvis matrisen  $[T]_B^B$  til  $T$  i basisen  $B$  er Hermitisk.

**Bevis** Dette er fullstendig analogt til beviset for teorem 10.4.1. Anta først at  $T$  er en Hermitisk transformasjon. Ved den komplekse tolkningen av teorem 9.4.3 er da

$$[T]_B^B = \begin{bmatrix} [T(\mathbf{b}_1)]_B & \cdots & [T(\mathbf{b}_n)]_B \end{bmatrix}.$$

Ved teorem 10.1.2 kan søylevektorene skrives ut slik:

$$[T]_B^B = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{b}_1 | T(\mathbf{b}_1) \rangle & \langle \mathbf{b}_1 | T(\mathbf{b}_2) \rangle & \cdots & \langle \mathbf{b}_1 | T(\mathbf{b}_n) \rangle \\ \langle \mathbf{b}_2 | T(\mathbf{b}_1) \rangle & \langle \mathbf{b}_2 | T(\mathbf{b}_2) \rangle & \cdots & \langle \mathbf{b}_2 | T(\mathbf{b}_n) \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathbf{b}_n | T(\mathbf{b}_1) \rangle & \langle \mathbf{b}_n | T(\mathbf{b}_2) \rangle & \cdots & \langle \mathbf{b}_n | T(\mathbf{b}_n) \rangle \end{bmatrix}$$

La  $c_{ij}$  være elementet på plass  $(i, j)$  i denne matrisen. Da er

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \langle \mathbf{b}_i | T(\mathbf{b}_j) \rangle = \langle T(\mathbf{b}_i) | \mathbf{b}_j \rangle \\ &= \overline{\langle \mathbf{b}_j | T(\mathbf{b}_i) \rangle} = \overline{c_{ji}}, \end{aligned}$$

der jeg i første overgang brukte at  $T$  er Hermitisk, og i annen overgang egenskapen E1 for indreproduktet. Ergo er matrisen  $[T]_B^B$  symmetrisk. Beviset motsatt vei er identisk med den tilsvarende delen av beviset for teorem 10.4.1, bortsett fra at tegnet  $t$  for transponering byttes med tegnet  $*$  for konjugert-transponering overalt. ■

## **Unitære transformasjoner**

Unitære transformasjoner er den komplekse analogien til reelle, ortogonale transformasjoner.

**Definisjon 3 Unitære lineærtransformasjoner**

En lineærtransformasjon  $T : V \rightarrow V$  fra et komplekst indreproduktrom til seg selv kalles *unitær* hvis

$$\langle T(\mathbf{u}) | T(\mathbf{v}) \rangle = \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle \quad \text{for alle } \mathbf{u} \text{ og } \mathbf{v} \text{ i } V.$$

Definisjonen ovenfor sier at en unitær transformasjon er en transformasjon som bevarer indreproduktet. Neste teorem sier at slike transformasjoner også bevarer normer og avstander, i full analogi med det reelle tilfellet.

**Teorem 3 Unitære transformasjoner bevarer norm og avstand**

La  $T : V \rightarrow V$  være en unitær lineærtransformasjon. For alle  $\mathbf{u}$  og  $\mathbf{v}$  i  $V$  gjelder da:

1.  $\|T(\mathbf{u})\| = \|\mathbf{u}\|$
2.  $\|T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v})\| = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$
3.  $T$  er invertibel, og  $T^{-1}$  er også unitær.

**Bevis** Identisk med beviset for teorem 10.5.1. ■

**Teorem 4 Egenverdier og egenvektorer for unitære transformasjoner**

La  $T : V \rightarrow V$  være en unitær lineærtransformasjon.

1. Hvis  $\lambda$  er en egenverdi for  $T$ , så er  $|\lambda| = 1$ .
2. Hvis  $\mathbf{v}_1$  og  $\mathbf{v}_2$  er egenvektorer tilhørende ulike egenverdier  $\lambda_1$  og  $\lambda_2$  for  $T$ , så er  $\mathbf{v}_1$  og  $\mathbf{v}_2$  ortogonale.

**Bevis** Vi gjør noen små justeringer i beviset for teorem 10.5.2.

(1) La  $\mathbf{u}$  være en egenvektor med egenverdi  $\lambda$ . Da er

$$\begin{aligned} \langle T(\mathbf{u}) | T(\mathbf{u}) \rangle &= \langle \lambda \mathbf{u} | \lambda \mathbf{u} \rangle \\ &= \bar{\lambda} \lambda \langle \mathbf{u} | \mathbf{u} \rangle \\ &= |\lambda|^2 \langle \mathbf{u} | \mathbf{u} \rangle. \end{aligned}$$

Siden  $\langle T(\mathbf{u}) | T(\mathbf{u}) \rangle = \langle \mathbf{u} | \mathbf{u} \rangle$ , følger at  $|\lambda| = 1$ .

(2) Vi har

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 \rangle &= \langle T(\mathbf{v}_1) | T(\mathbf{v}_2) \rangle = \langle \lambda_1 \mathbf{v}_1 | \lambda_2 \mathbf{v}_2 \rangle \\ &= \overline{\lambda_1} \lambda_2 \langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 \rangle,\end{aligned}$$

så hvis ikke  $\langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 \rangle = 0$  har vi  $\overline{\lambda_1} \lambda_2 = 1$ . Men hvis  $\overline{\lambda_1} \lambda_2 = 1$ , fås  $\lambda_2 = (\overline{\lambda_1})^{-1}$ . Siden  $|\lambda_1| = 1$  ved (1), har vi  $\lambda_1^{-1} = \overline{\lambda_1}$ . Ergo er da  $\lambda_2 = ((\lambda_1)^{-1})^{-1} = \lambda_1$ , som er mot forutsetningen. ■

### Teorem 5 Kriterium for unitaritet av transformasjoner

La  $T : V \rightarrow V$  være en unitær lineærtransformasjon i et  $n$ -dimensjonalt komplekst indreproduktrom, og la  $B = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$  være en basis for  $V$ . Da er transformasjonen  $T$  unitær hvis og bare hvis den bevarer indreproduktene mellom basisvektorene, altså

$$\langle T(\mathbf{b}_i) | T(\mathbf{b}_j) \rangle = \langle \mathbf{b}_i | \mathbf{b}_j \rangle \quad \text{for alle } 1 \leq i, j \leq n.$$

**Bevis** Identisk med beviset for teorem 10.5.3 bortsett fra at ordet “ortogonal” byttes med “unitær” og  $c_i$  ersattes med  $\overline{c_i}$  i tredje siste og nest siste linje. ■

## Unitære matriser

Så var det å knytte unitære transformasjoner til matriser. Igjen er analogien til det reelle tilfellet perfekt.

### Definisjon 4 Unitære matriser

En  $(n \times n)$ -matrise kalles *unitær* hvis søylevektorene utgjør en ortonormal basis for  $\mathbf{C}^n$ .

Så kan vi vise sammenhengen vi forventer:

### Teorem 6 Unitære transformasjoner har unitære matriser

La  $T : V \rightarrow V$  være en unitær lineærtransformasjon i et  $n$ -dimensjonalt indreproduktrom, og la  $B = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$  være en ortonormal basis for  $V$ . Da er transformasjonen  $T$  unitær hvis og bare hvis matrisen  $[T]_B^B$  til  $T$  i basisen  $B$  er unitær.

**Bevis** Identisk med beviset for teorem 10.5.4, bortsett fra at “ortogonal”

erattes med “unitær” og referansen til teorem 10.5.3 erstattes med referanse til den komplekse analogien 11.3.5. ■

### **Teorem 7** Unitære matriser har konjugert-transponerte som inverse

En  $(n \times n)$ -matrise  $M$  er unitær hvis og bare hvis  $M$  er inverterbar og den inverse av  $M$  er lik den konjugert-transponerte av  $M$ , altså

$$M^{-1} = M^*.$$

**Bevis** Vi modifiserer beviset for teorem 10.5.5 litt. La  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  være søylevektorene i  $M$ . La oss se på matriseproduktet

$$M^*M.$$

Siden linjene i  $M^*$  er de kompleks-transponerte av søylene i  $M$ , er elementet  $M_{ij}$  på plass  $(i, j)$  i denne matrisen det komplekse prikkproduktet mellom søyle  $i$  og søyle  $j$  i matrisen  $M$ , altså

$$M_{ij} = \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j.$$

Hvis matrisen er unitær, blir dette prikkproduktet 1 hvis  $i = j$  og 0 ellers. Ergo blir produktmatrisen  $M^*M$  identitetsmatrisen. Omvendt, hvis produktet  $M^t M$  blir identitetsmatrisen må søylevektorene i  $M$  være ortonormale, slik at  $M$  er en unitær matrise. ■

### **Teorem 8** Egenskaper ved unitære matriser

La  $M$  være en unitær  $(n \times n)$ -matrise. Da gjelder:

1. Den konjugert-transponerte matrisen  $M^*$  er også unitær.
2.  $|\det M| = 1$ .

**Bevis** Det følger fra teorem 11.3.3 punkt 3 at den inverse av transformasjonen  $T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  representert ved matrisen  $M$  også er en unitær transformasjon. Denne transformasjonen er representert ved den inverse matrisen  $M^{-1}$ , som vi ved teorem 11.3.7 vet at er lik  $M^*$ . Ved teorem 11.3.6 følger at matrisen  $M^*$  er unitær.

(2) Ved teorem 11.3.7 har vi  $A \cdot A^t = I$ , der  $I$  er identitetsmatrisen. Så ved produktregelen for determinanter følger at

$$(\det A) \cdot (\det A^*) = 1. \quad (1)$$

Men determinanten til  $A^*$  må være den konjugerte av determinanten til  $A^t$ , så siden

$$\det A^t = \det A$$

følger at  $\det(A^*) = \overline{\det A}$ . Likning (1) gir da

$$\begin{aligned} |\det A| &= (\det A) \cdot \overline{(\det A)} \\ &= (\det A) \cdot (\det A^*) = 1. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

## Diagonalisering

Til slutt i denne seksjonen skal vi se på et resultat som sier at både Hermitiske og unitære transformasjoner på et endeligdimensjonalt indreproduktrom har en ortonormal egenbasis.

### **Teorem 9** Diagonalisering av Hermitiske og unitære transformasjoner

La  $V$  være et endeligdimensjonalt komplekst indreproduktrom, og la  $T : V \rightarrow V$  være en lineærtransformasjon som er enten Hermitisk eller unitær. Da finnes det en ortonormal egenbasis for  $T$ .

**Bevis** Utsettes til neste seksjon.  $\blacksquare$

Ved hjelp av dette resultatet kan vi nå bevise teorem 10.4.3. For anta at  $S : V \rightarrow V$  er en symmetrisk lineærtransformasjon på et  $n$ -dimensjonalt reelt indreproduktrom  $V$ . Vi kan velge en basis  $B$  for  $V$ , og får da matrisen  $[S]_B^B$ . Denne matrisen er symmetrisk, og siden den er reell er den dermed også Hermitisk. Matrisen definerer altså en Hermitisk lineærtransformasjon

$$T : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$$

ved multiplikasjon i standardbasis, og ved teorem 11.3.1 er alle egenverdiene til  $T$  reelle. Det følger direkte fra dette at alle de  $n$  karakteristiske røttene til  $S$  er reelle, rett og slett fordi  $S$  og  $T$  har det samme karakteristiske polynom.

Det gjenstår å vise at  $S$  har en egenbasis. Ved teorem 11.3.9 har  $T$  en ortonormal egenbasis  $B$  i  $\mathbb{C}^n$ . Hvis  $\mathbf{v}$  er en vektor i  $\mathbb{C}^n$ , kan vi skrive

$$\mathbf{v} = \mathbf{x} + i\mathbf{y},$$

der  $\mathbf{x}$  og  $\mathbf{y}$  er reelle vektorer i  $\mathbb{R}^n$  som vi kan kalle henholdsvis realdelen og imaginærdelen til vektoren  $\mathbf{v}$ . Hvis  $\mathbf{v}$  er en egenvektor for  $T$  har vi  $M\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ , som innsatt for  $\mathbf{v}$  gir

$$M(\mathbf{x} + i\mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x} + i\mathbf{y})$$

$$M\mathbf{x} + iM\mathbf{y} = \lambda\mathbf{x} + i\lambda\mathbf{y}.$$

Siden både  $M$  og  $\lambda$  er reelle, følger det av likningen ovenfor at

$$M\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \quad \text{og} \quad M\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y}. \quad (1)$$

Dette viser at hvis  $\mathbf{x}$  eller  $\mathbf{y}$  er ulik  $\mathbf{0}$ , så er de egenvektorer for  $M$ . Hvis vi tar realdelene og imaginærdelene til alle vektorene i  $B$ , får vi en samling på  $2n$  vektorer som til sammen spenner ut det samme som  $B$  spenner ut, altså hele  $\mathbf{C}^n$ . Ved å redusere denne samlingen, kan vi finne en samling  $B' = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  av  $n$  reelle vektorer som spenner ut hele  $\mathbf{C}^n$ . Alle vektorene i  $B'$  er egenvektorer for  $M$ , og de er reelle. Siden de spenner ut  $\mathbf{C}^n$ , spenner de spesielt ut  $\mathbf{R}^n$ . Dette betyr at en vilkårlig vektor  $\mathbf{u}$  i  $\mathbf{R}^n$  kan skrives

$$\mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_n\mathbf{v}_n, \quad (2)$$

der  $c$ -ene er komplekse tall. Men siden både  $\mathbf{u}$  og vektorene  $\mathbf{v}_i$  er reelle, følger det at (2) vil holde selv om vi erstatter koeffisientene  $c_i$  med deres realdeler; grunnen er at hvis  $z = a + ib$  er et komplekst tall og  $r$  er et reelt tall, så er realdelen til  $zr$  lik  $ar$ . Ergo spenner vektorene i  $B'$  ut hele  $\mathbf{R}^n$  med reelle koeffisienter i lineærkombinasjonene. Teorem 10.4.3 er vist.

### 11.3 Oppgaver

1. Finn den konjugert-transponerte av følgende matriser, og avgjør om matrisen er hermitisk.

a)  $\begin{bmatrix} 1 & 2+i \\ i & 5+i \end{bmatrix}$

b)  $\begin{bmatrix} i & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$

c)  $\begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$

d)  $\begin{bmatrix} 5 & 2+3i \\ 2-3i & 7 \end{bmatrix}$

2. Avgjør om følgende matrise er Hermitisk:

$$\begin{bmatrix} 1 & i & 3 \\ -i & 4 & 2-i \\ 3 & 2-i & -3 \end{bmatrix}$$

3. Avgjør om følgende matriser er unitære.

a)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b)  $\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

c)  $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{bmatrix}$

d)  $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$

4. Finn en  $(3 \times 3)$ -matrise som er både unitær og Hermitisk og som er forskjellig fra identitetsmatrisen.

5. La  $M$  være en Hermitisk matrise. Vis at alle diagonalelementene  $M_{ii}$  i matrisen er reelle.

6. Finn determinanten til matrisene fra oppgave 11.3.3. Avgjør om de er inverterbare, og finn eventuelt deres inverse.

7. Finn ortonormale egenbasiser for  $\mathbf{C}^2$  tilhørende hver av matrisene fra oppgave 11.3.3.

8. Gitt matrisen

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 2 & 0 \\ -i & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Hvorfor kan man se med et raskt blikk at  $M$  har en ortonormal egenbasis?

b) Finn en ortonormal egenbasis for  $M$ .

9. Vi så i denne seksjonen at alle Hermitiske matriser har en ortonormal basis av egenvektorer. Bruk dette til å vise at hvis  $M$  er en Hermitisk matrise, så finnes det en unitær matrise  $C$  slik at matrisen

$$D = C^{-1}MC$$

er diagonal. Vi sier at matrisen  $C$  diagonaliserer matrisen  $M$  unitært, og at  $M$  er unitært diagonaliserbar.



## 11.4 Adjungerte og normale transformasjoner

Vi begrenser oss i denne seksjonen til endeligdimensjonale vektorrom. Først skal vi beskrive den transformasjonen som tilsvarende den konjugert-transponerte av en gitt matrise.

### Teorem 1 Den konjugert-transponerte av en transformasjon

La  $T : V \rightarrow V$  være en lineærtransformasjon av et endeligdimensjonalt komplekst indreproduktrom inn i seg selv. Da finnes det en entydig bestemt lineærtransformasjon  $T^* : V \rightarrow V$  som oppfyller

$$\langle \mathbf{u}, T^*(\mathbf{v}) \rangle = \langle T(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle \quad \text{for alle } \mathbf{u} \text{ og } \mathbf{v} \text{ i } V.$$

Hvis  $B$  er en ortonormal basis for  $V$ , så er matrisen  $[T^*]_B^B$  til  $T^*$  i basisen  $B$  den konjugert-transponerte av matrisen til  $T$ , altså

$$[T^*]_B^B = ([T]_B^B)^*.$$

**Bevis** Siden  $V$  er endeligdimensjonalt, vet vi at  $V$  har en ortonormal basis  $B$ . La  $T^* : V \rightarrow V$  være transformasjonen definert ved at

$$[T^*]_B^B = ([T]_B^B)^*.$$

Hvis  $\mathbf{u}$  og  $\mathbf{v}$  er elementer i  $V$ , så er

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = [\mathbf{u}]_B \cdot [\mathbf{v}]_B = [\mathbf{u}]_B^* [\mathbf{v}]_B,$$

der jeg brukte teorem 10.1.3 i første overgang, og der jeg skrev indreproduktet som et matriseprodukt mellom en linjevektor og en søylevektor i annen overgang. Dette gir

$$\begin{aligned} \langle T(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle &= [T(\mathbf{u})]_B^* [\mathbf{v}]_B = ([T]_B^B [\mathbf{u}]_B)^* [\mathbf{v}]_B \\ &= [\mathbf{u}]_B^* ([T]_B^B)^* [\mathbf{v}]_B \\ &= [\mathbf{u}]_B^* [T^*(\mathbf{v})]_B = \langle \mathbf{u}, T^*(\mathbf{v}) \rangle. \end{aligned}$$

Dermed har vi vist at det eksisterer en lineærtransformasjon med egenskapen beskrevet i teoremet. For å vise unikhethet, anta at  $S : V \rightarrow V$  er en annen lineærtransformasjon som i likhet med  $T^*$  oppfyller

$$\langle \mathbf{u}, S(\mathbf{v}) \rangle = \langle T(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle \quad \text{for alle } \mathbf{u} \text{ og } \mathbf{v} \text{ i } V.$$

Da er

$$\langle \mathbf{u}, S(\mathbf{v}) \rangle = \langle T(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, T^*(\mathbf{v}) \rangle$$

for alle  $\mathbf{u}$  og  $\mathbf{v}$  i  $V$ . Ved teorem 10.1.2 betyr dette spesielt at vektorene  $S(\mathbf{v})$  og  $T^*(\mathbf{v})$  vil ha samme komponenter i en ortonormal basis for  $V$ . Da er de like. Siden  $\mathbf{v} \in V$  var vilkårlig, har vi vist at  $S = T^*$ . ■

Transformasjonen  $T^*$  definert i forrige teorem kalles for den *adjungerte* transformasjonen til  $T$ . Merk at siden

$$(M^*)^* = M$$

for matriser, følger det fra dette teoremet at

$$(T^*)^* = T$$

for alle transformasjoner  $T$ . Det går også an å bevise dette direkte fra betingelsen  $\langle \mathbf{u}, T^*(\mathbf{v}) \rangle = \langle T(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle$ , uten å trekke inn matriser.

### **Teorem 2 Hermitiske, unitære og adjungerte transformasjoner**

La  $T : V \rightarrow V$  være en lineærtransformasjon på et endeligdimensjonalt komplekst indreproduktrom  $V$ . Da gjelder

1.  $T$  er Hermitisk hvis og bare hvis  $T = T^*$ .
2.  $T$  er unitær hvis og bare hvis  $T^{-1} = T^*$ .

**Bevis** (1) Dette følger fra teorem 11.4.1 kombinert med definisjonen 11.3.1 av en Hermitisk transformasjon.

(2) Dette følger fra teorem 11.3.6 kombinert med teorem 11.3.7. ■

Vi skal nå definere en klasse transformasjoner som inkluderer både Hermitiske og unitære transformasjoner som spesialtilfeller.

### **Definisjon 1 Normale transformasjoner og matriser**

En lineærtransformasjon  $T : V \rightarrow V$  på et endeligdiemnsjonalt komplekst indreproduktrom kalles *normal* hvis

$$T^* \circ T = T \circ T^*,$$

altså hvis  $T^*(T(\mathbf{v})) = T(T^*(\mathbf{v}))$  for alle  $\mathbf{v}$  i  $V$ . En  $(n \times n)$ -matrise  $M$  kalles normal hvis

$$M^*M = MM^*.$$

Nå har vi følgende sammenhenger:

**Teorem 3 Ting som er normale**

La  $T : V \rightarrow V$  være en lineærtransformasjon på et endeligdimensjonalt komplekst indreproduktrom  $V$ , og la  $B$  være en ortonormal basis for  $V$ . Da gjelder:

1. Hvis  $T$  er Hermitisk, så er  $T$  normal.
2. Hvis  $T$  er unitær, så er  $T$  normal.
3.  $T$  er normal hvis og bare hvis  $[T]_B^B$  er normal.

**Bevis** (1) Hvis  $T$  er Hermitisk, så gir teorem 11.4.2 at

$$T^* \circ T = T \circ T = T \circ T^*.$$

(2) Hvis  $T$  er unitær, så gir teorem 11.4.2 at

$$T^* \circ T = T^{-1} \circ T = I = T \circ T^{-1} = T \circ T^*.$$

(3) Ved teorem 11.4.1 i fjerde overgang fås

$$\begin{aligned} T \text{ er normal} &\iff T^* \circ T = T \circ T^* \\ &\iff [T^* \circ T]_B^B = [T \circ T^*]_B^B \\ &\iff [T^*]_B^B [T]_B^B = [T]_B^B [T^*]_B^B \\ &\iff ([T]_B^B)^* [T]_B^B = [T]_B^B ([T]_B^B)^* \\ &\iff [T]_B^B \text{ er normal. } \blacksquare \end{aligned}$$

**Teorem 4 Egenverdier og egenvektorer for normale transformasjoner**

La  $T : V \rightarrow V$  være en normal transformasjon på et  $n$ -dimensjonalt komplekst indreproduktrom  $V$ , og anta at  $\mathbf{v}$  er en egenvektor for  $T$  med egenverdi  $\lambda$ . Da gjelder

1. Vektoren  $\bar{\mathbf{v}}$  er en egenvektor for  $T^*$  med egenverdi  $\bar{\lambda}$ .
2. Mengden

$$U = \{\mathbf{u} \in V \mid \langle \mathbf{u} \mid \mathbf{v} \rangle = 0\}$$

er et underrom av  $V$  med dimensjon  $n - 1$ , og hvis  $\mathbf{u} \in U$  er  $T(\mathbf{u}) \in U$  og  $T^*(\mathbf{u}) \in U$  også.

**Bevis** (1) Vi har

$$\begin{aligned}\|T(\mathbf{v}) - \lambda\mathbf{v}\|^2 &= \langle T(\mathbf{v}) - \lambda\mathbf{v} \mid T(\mathbf{v}) - \lambda\mathbf{v} \rangle \\ &= \langle T(\mathbf{v}), T(\mathbf{v}) \rangle + \bar{\lambda}\lambda\langle\mathbf{v} \mid \mathbf{v}\rangle - \lambda\langle T(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \rangle - \bar{\lambda}\langle\mathbf{v} \mid T(\mathbf{v})\rangle,\end{aligned}$$

og på samme måte

$$\begin{aligned}\|T^*(\mathbf{v}) - \bar{\lambda}\mathbf{v}\|^2 &= \langle T^*(\mathbf{v}) - \bar{\lambda}\mathbf{v} \mid T^*(\mathbf{v}) - \bar{\lambda}\mathbf{v} \rangle \\ &= \langle T^*(\mathbf{v}), T^*(\mathbf{v}) \rangle + \bar{\lambda}\lambda\langle\mathbf{v} \mid \mathbf{v}\rangle - \bar{\lambda}\langle T^*(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \rangle - \lambda\langle\mathbf{v} \mid T^*(\mathbf{v})\rangle.\end{aligned}$$

Men teorem 11.4.1 og normalitet av  $T$  gir

$$\langle T(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v} \mid T^*(\mathbf{v}) \rangle$$

og

$$\langle \mathbf{v} \mid T(\mathbf{v}) \rangle = \langle T^*(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \rangle,$$

samt

$$\begin{aligned}\langle T(\mathbf{u}) \mid T(\mathbf{u}) \rangle &= \langle \mathbf{u} \mid T^*(T(\mathbf{u})) \rangle \\ &= \langle \mathbf{u}, T(T^*(\mathbf{u})) \rangle \\ &= \langle T^*(\mathbf{u}) \mid T^*(\mathbf{u}) \rangle,\end{aligned}$$

der jeg i siste overgang brukte  $(T^*)^* = T$  og relasjonen i teorem 11.4.1. Setter du disse tre resultatene inn i de uttrykkene vi fant rett ovenfor, får du at

$$\|T(\mathbf{v}) - \lambda\mathbf{v}\|^2 = \|T^*(\mathbf{v}) - \bar{\lambda}\mathbf{v}\|^2.$$

Det følger direkte av dette at  $T(\mathbf{v}) - \lambda\mathbf{v} = \mathbf{0}$  hvis og bare hvis  $T^*(\mathbf{v}) - \bar{\lambda}\mathbf{v} = \mathbf{0}$ , så (1) er bevist.

(2) La  $S$  være underrommet utspent av kun  $\mathbf{v}$ . Dette rommet er 1-dimensjonalt, og  $U$  er det ortogonale komplementet  $S^\perp$  til  $S$ . Det følger nå fra teorem 10.3.1 i kompleks tolkning at  $U$  er et underrom av  $V$ , og at dimensjonen til  $U$  er  $n - 1$ . (Se oppgave 10.3.10). Hvis  $\mathbf{u} \in U$ , får vi

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{v} \mid T(\mathbf{u}) \rangle &= \overline{\langle T(\mathbf{u}) \mid \mathbf{v} \rangle} \\ &= \overline{\langle \mathbf{u} \mid T^*(\mathbf{v}) \rangle} \\ &= \overline{\langle \mathbf{u} \mid \bar{\lambda}\mathbf{v} \rangle} && \text{(ved punkt 1)} \\ &= \langle \bar{\lambda}\mathbf{v} \mid \mathbf{u} \rangle = \lambda\langle\mathbf{v} \mid \mathbf{u}\rangle = 0,\end{aligned}$$

siste overgang siden  $\langle \mathbf{v} \mid \mathbf{u} \rangle = 0$ . Så  $T(\mathbf{u}) \in U$ . Siden  $\langle T^*(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, T(\mathbf{u}) \rangle} = 0$ , følger også at  $T^*(\mathbf{u}) \in U$  ■

**Teorem 5 Normale matriser har ortonormal egenbasis**

La  $T : V \rightarrow V$  være en lineærtransformasjon på et  $n$ -dimensjonalt kompleks indreproduktrom  $V$ . Da har  $T$  en ortonormal egenbasis hvis og bare hvis  $T$  er normal.

**Bevis** Anta at  $T$  har en ortonormal egenbasis  $B$ . Da er matrisen  $[T]_B^B$  en diagonal matrise, og alle diagonale  $(n \times n)$ -matriser er normale.

For å vise den motsatte implikasjonen skal vi bruke induksjon på dimensjonen  $n$  av vektorrommet  $V$ . For  $n = 1$  er påstanden triviell, fordi da vil enhver vektor  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  være en egenvektor for  $T$ .

Anta nå at implikasjonen er vist for  $n = k$ . La  $T : V \rightarrow V$  være en normal transformasjon fra på et vektorrom av dimensjon  $n = k + 1$ . Ved teorem 11.1.1 har  $T$  en egenverdi  $\lambda$  og en tilhørende egenvektor  $\mathbf{v}$ . Siden vi kan dele  $\mathbf{v}$  på dens lengde, kan vi anta at  $\|\mathbf{v}\| = 1$ . La  $U$  være det ortogonale komplementet til underrommet utspent av  $\mathbf{v}$ . Ved teorem 11.4.4 er da dimensjonen til  $U$  lik  $k$ , og hvis  $\mathbf{u} \in U$  er  $T(\mathbf{u}) \in U$ . Det siste medfører at vi kan definere en lineærtransformasjon  $S : U \rightarrow U$  ved å sette

$$S(\mathbf{u}) = T(\mathbf{u})$$

for alle  $\mathbf{u} \in U$ . Vi lar indreproduktet på  $U$  være det samme som vi har når  $U$  betraktes som et underrom av  $V$ . Ved teorem 11.4.1 har vi da

$$\langle S(\mathbf{u}) | \mathbf{v} \rangle = \langle T(\mathbf{u}) | \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u} | T^*(\mathbf{v}) \rangle$$

for alle  $\mathbf{u}$  og  $\mathbf{v}$  i  $U$ , og det følger ved unikhetssegenskapen i nevnte teorem at

$$S^*(\mathbf{u}) = T^*(\mathbf{u})$$

for alle  $\mathbf{u} \in U$ . Siden  $T = T^*$  er dermed  $S = S^*$ , så  $S$  er normal. Ved induksjonshypotesen fins derfor en ortonormal basis  $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k\}$  for  $U$  bestående av egenvektorer for  $S$ . Men siden  $\mathbf{v}$  har lengde 1 og står vinkelrett på alle vektorene  $\mathbf{b}_i$ , blir da samlingen

$$\{\mathbf{v}, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k\}$$

en ortonormal basis for  $V$  bestående av egenvektorer for  $T$ . ■

**11.4 Oppgaver**

**1.** Vis at hvis  $M$  er en normal matrise, så er også matrisen  $M^2$  normal.

**2.** En kvadratisk, kompleks matrise  $A$  kalles *skjev-Hermitisk* hvis  $A^* = -A$ .

a) Vis at matrisen

$$A = \begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix}$$

er skjev-symmetrisk. Finn en ortonormal egenbasis for  $A$ .

- Angi også en unitær matrise  $U$  som diagonaliserer  $A$ .
- b) Vis at hvis  $A$  er en skjev-Hermitisk matrise, så er  $A$  normal.
- c) Vis at alle skjev-Hermitiske matriser  $M$  er unitært diagonaliserbare.
- d) Vis at alle egenverdier for en skjev-Hermitisk matrise er rent imaginære.
3. Vis at en normal matrise er Hermitisk hvis og bare hvis alle egenverdiene dens er reelle.

## 11.5 Anvendelse: Komplekse difflikningssystemer

I seksjon 9.9 studerte vi differensiallikningssystemer på formen

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \quad (1)$$

der  $\mathbf{x}$  er en vektor av  $n$  ukjente funksjoner og  $A$  er en  $(n \times n)$ -matrise. Metodene vi utviklet i den seksjonen fungerer like godt i tilfeller der matrisen  $A$  tillates å ha komplekse elementer. Hvis  $A$  er komplekst diagonaliserbar utgjør løsningsmengden  $L$  til (1) et  $n$ -dimensjonalt underrom av det komplekse vektorrommet  $V$  av funksjoner fra  $\mathbf{R}$  til  $\mathbf{C}^n$ , og metoden vår produserer  $n$  funksjoner

$$\mathbf{u}_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, \mathbf{u}_n e^{\lambda_n t}. \quad (2)$$

som utgjør en basis for det  $n$ -dimensjonale løsningsrommet  $L$  til (1). Så lengde man regner komplekst og er fornøyd med det, er alt dette vel og bra. Men i en del anvendelser er matrisen  $A$  selv faktisk reell; problemet er bare at den har *egenverdier* som ikke er reelle. Funksjonene (2) vil fremdeles være komplekse, og det kan være litt upraktisk. Ved å ta utgangspunkt i løsningene (2) kan man imidlertid finne  $n$  fullstendig *reelle* funksjoner som også spenner ut løsningsmengden  $L$ . Vi skal nå se hvordan dette kan gjøres, og vi antar altså fra nå av at matrisen  $A$  er reell.

Fra oppgave MIP 8.4.8 fås at eventuelle ikke-reelle egenverdier for  $A$  opptrer i konjugerte par  $\lambda$  og  $\bar{\lambda}$ . Dette medfører at de tilhørende egenvektorene også opptrer i konjugerte par; grunnen er at hvis  $A\mathbf{z} = \lambda\mathbf{z}$ , så er også

$$A\bar{\mathbf{z}} = \bar{A}\bar{\mathbf{z}} = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{z}}.$$

La oss anta at vi har funnet et slikt par av konjugerte egenverdier  $\lambda = a + ib$  og  $\bar{\lambda} = a - ib$  for  $A$ . Blant de  $n$  funksjonene i (2) vil da opptre to funksjoner

$$\mathbf{z}_1 = \mathbf{u} e^{\lambda t} \quad \text{og} \quad \mathbf{z}_2 = \bar{\mathbf{u}} e^{\bar{\lambda} t}.$$

Her merker vi oss først og fremst at  $\mathbf{z}_2 = \bar{\mathbf{z}}_1$ . Grunnen til dette er at

$$\begin{aligned} e^{\bar{\lambda} t} &= e^a (\cos(-bt) + i \sin(-bt)) \\ &= e^a (\cos bt - i \sin bt) = \overline{e^{\lambda t}}. \end{aligned}$$

Vi trenger to reelle løsninger  $\mathbf{x}(t)$  og  $\mathbf{y}(t)$  av (1) som er slik at både  $\mathbf{z}_1$  og  $\mathbf{z}_2$  er lineærkombinasjoner av de to reelle løsningene. Det viser seg da at vi kan bruke realdelen og imaginærdelen til ene av de to komplekse løsningene, for eksempel  $\mathbf{z}_1$ . La derfor

$$\mathbf{x} = \operatorname{Re} \mathbf{z}_1 \quad \text{og} \quad \mathbf{y} = \operatorname{Im} \mathbf{z}_1.$$

At  $\mathbf{z}_1$  og  $\mathbf{z}_2$  er lineærkombinasjoner av disse to er klart, da  $\mathbf{z}_1 = \mathbf{x} + i\mathbf{y}$  og  $\mathbf{z}_2 = \mathbf{x} - i\mathbf{y}$ . Det gjenstår å vise at  $\mathbf{x}$  og  $\mathbf{y}$  faktisk er løsninger av systemet (1). Siden  $\mathbf{z}' = A\mathbf{z}$ , får vi

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' + i\mathbf{y}' &= (\mathbf{x} + i\mathbf{y})' \\ &= A(\mathbf{x} + i\mathbf{y}) = A\mathbf{x} + iA\mathbf{y}. \end{aligned}$$

Siden  $A$  er reell, blir realdelen av høyre side  $A\mathbf{x}$ . Dette må være lik realdelen av venstre side, som er  $\mathbf{x}'$ . Tilsvarende må  $A\mathbf{y}$  være lik  $\mathbf{y}'$ . Ergo er  $\mathbf{x}$  og  $\mathbf{y}$  løsninger.

Vi har nå kommet frem til en generell oppskrift som kan brukes til å finne den generelle løsningen av systemet (1) i tilfellet der  $A$  er en reell, komplekst diagonaliserbar ( $n \times n$ )-matrise med ikke-reelle egenverdier:

1. Finn egenverdiene til  $A$ .
2. For hver reell egenverdi  $\lambda$ , finn en basis for det tilhørende egenrommet. Her kan du regne reelt på vanlig måte. Sett opp basisfunksjoner  $\mathbf{u}e^{\lambda t}$  for hver basisvektor  $\mathbf{u}$  i egenrommet.
3. For hvert par av konjugerte egenverdier  $\lambda = a + ib$  og  $\lambda = a - ib$ , begynn med å finne en basis for egenrommet tilhørende  $\lambda = a + ib$ . Du vil her få komplekse basisvektorer, og for hver basisvektor  $\mathbf{u}$  får du den komplekse løsningsfunksjon  $\mathbf{z} = \mathbf{u}e^{\lambda t}$ . Skriv så

$$\mathbf{z} = \mathbf{u}e^{\lambda t} = \mathbf{u}e^a (\cos bt + i \sin bt),$$

og bruk dette til å finne realdelen og imaginærdelen til  $\mathbf{z}$ . Disse to vektorfunksjonene blir basisfunksjoner.

4. Den generelle, reelle løsningen av (1) blir nå

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 + \cdots + c_n \mathbf{u}_n,$$

der  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  er basisfunksjonene du har samlet opp i punkt 2–3, og  $c_1, \dots, c_n$  er reelle integrasjonskonstanter.

Til slutt bør det bemerkes at dersom systemet er *inhomogent*, altså

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

der  $\mathbf{b}$  er en konstant vektor, så kan dette tilbakeføres til et homogent system  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$  ved akkurat samme metode som vi benyttet i seksjon 9.9, uansett om matrisen  $A$  eller den konstante vektoren  $\mathbf{b}$  er reelle eller komplekse, eller om  $A$  er reell med komplekse egenverdier.

## 11.5 Oppgaver

1. Løs systemet

$$\begin{cases} x' = 2x - 4y + 2 \\ y' = x + 2y + 1 \end{cases}$$

med initialbetingelsene  $x(0) = -2$  og  $y(0) = 2$ .

2. La  $k$  være et reelt tall. Finn en løsning av differensiallikningssystemet

$$\begin{cases} x' = 7x - y + 50k \\ y' = x + 7y \end{cases}$$

som oppfyller  $x(0) = y(0) = 0$ .

3. Etter pålegg fra onkel Donald er Ole, Dole og Doffen på tur i Andebyskogen for å *studere maurenes liv*. Donalds plan med dette er at guttene ved å kikke på de flittige maurene skal bli litt flittigere med skolearbeidet sitt. Sannsynligvis er planen vellykket, for de tre guttene vikler seg raskt inn i en krangel om hvordan størrelsen på maurtuer endrer seg med tiden. Doffen har en teori som går ut på at maur liker blomster, men at blomster ikke liker maur. Han lar  $y(t)$  være volumet av en maurtue målt i  $\text{m}^3$  ved tid  $t$ , der  $t$  måles i måneder. Dessuten lar han  $x(t)$  være antallet blomster innenfor en radius på 10 meter fra tuen. Han antar at vekstraten til maurtuen er proporsjonal med  $x(t)$ , og proporsjonalitetskonstanten anslår han til 2. Videre antar han at vekstraten til blomsterantallet er proporsjonal med uttrykket  $1 - y(t)$ . Proporsjonalitetskonstanten i dette tilfellet tipper han er 8.

- Sett opp det differensiallikningssystemet for  $x(t)$  og  $y(t)$  som Doffen får fra denne modellen.
- Løs systemet med initialbetingelse  $x(0) = 5$ ,  $y(0) = 1/10$ . Ole og Dole synes modellen til Doffen er helt ubrukelig. Kan du finne noen innvendinger mot den, tatt i betraktning hvordan løsningene blir?

4. Betrakt difflikningssystemet

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$$

- Løs systemet med initialbetingelser  $x(0) = r$ ,  $y(0) = 0$ .
- Når  $t$  varierer, vil punktet  $(x(t), y(t))$  flytte seg rundt i  $xy$ -planet. Det starter i punktet  $(x(0), y(0)) = (r, 0)$  ved  $t = 0$ .

Hvilken kurve i  $xy$ -planet vil punktet  $(x(t), y(t))$  følge?

- Tegn inn forskjellige kurver som punktet  $(x(t), y(t))$  vil bevege seg langs, for forskjellige verdier av  $r$  i initialbetingelsen. Marker også bevegelsesretningen til punktet langs kurvene når  $t$  øker. Kurvene du får kalles *fasekurver* for det gitte difflikningssystemet, og selve figuren kalles *fasediagram*.

5. Vi skal nå se et eksempel på hvordan man tegne fasediagram til et difflikningssystem uten at man trenger å løse det først. Vi skal studere systemet

$$\begin{cases} x'(t) = bx - px y \\ y'(t) = mxy - ky \end{cases}$$

der  $b, m, k, p$  er positive reelle konstanter. Dette differensiallikningssystemet kalles *Lotka-Volterras system*, og er hentet fra biologiske anvendelser. Siden ledd av typen  $xy$  forekommer, er det et såkalt *ikke-lineært* system. Vi kan ikke løse det med metoden fra hovedteksten i denne seksjonen.

- Man kan tolke systemet biologisk ved å la  $x(t)$  og  $y(t)$  være henholdsvis antall *sauer* og antall *ulver* ved tid  $t$ . Difflikningssystemet sier da essensielt at ulvene liker sauer, mens saueene ikke liker ulver. Forklar dette. (Hint: Del med  $x$  i den første likningen og med  $y$  i den andre, slik at du finner uttrykk for de relative vekstratepopulasjonene.)
- Finn en positiv likevektsløsning for systemet, dvs. finn konstante funksjoner

$$x(t) = \bar{x} \quad \text{og} \quad y(t) = \bar{y}$$

som løser systemet, der  $\bar{x}, \bar{y} > 0$ . Tolk resultatet biologisk.

- Skriv  $x' = b(b - py)$  og  $y' = y(mx - k)$ , og bruk dette til å avgjøre hvordan fortegnene til  $x'$  og  $y'$  varierer rundt i  $xy$ -planet. Da vi vet at  $x$  og  $y$  begge er positive, kan du begrense deg til 1. kvadrant.
- Prøv å danne deg et omtrentlig bilde av hvordan fasekurvene til systemet går. Det kan her være til hjelp å først tegne inn noen piler som viser omtrent hvilken vei fasekurvene må gå gjennom de ulike punktene  $(x, y)$ . Forklar med ord, og tolk biologisk.



## \*11.6 Bevis for algebraens fundamentalteorem

I denne seksjonen skal vi se hvordan man kan bevise algebraens fundamentalteorem (MIP s. 234). Fremstillingen her bygger essensielt kun på kapittel 8 i MIP samt ekstremverdisetningen 1.7.5 for funksjoner av flere variable.

Det viser seg at fundamentalteoremet ganske greit lar seg utlede hvis vi vet at ethvert komplekst polynom av grad 1 eller høyere har minst én rot. Dette er budskapet i teoremet under. Utledningen av fundamentalteoremet på basis av dette tas opp i oppgave 11.6.3 ved slutten av seksjonen.

### **Teorem 1 Nullpunkt for komplekse polynomer**

La  $P(z) = c_0 + c_1z + c_2z^2 + \dots + c_nz^n$  være et komplekst polynom av grad  $n \geq 1$ . Da finnes en  $z_0 \in \mathbb{C}$  slik at  $P(z_0) = 0$ .

**Bevis** Definer den kontinuerlige, reelle funksjonen  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ved

$$f(x, y) = |P(x + iy)|.$$

La  $m$  være infimum av verdimengden til  $f$ , denne finnes fordi verdimengden er nedad begrenset av 0. Da finnes det (se oppgave 11.6.2) et reelt tall  $R > 0$  slik at  $f(x, y) > m + 1$  utenfor den lukkede sirkelskiven  $x^2 + y^2 \leq R^2$ . Ved ekstremverdisetningen brukt på sirkelskiven følger at  $f$  har et globalt minimumspunkt  $(a, b)$  på sirkelskiven, og dette vil da også være et globalt minimum på hele planet. Vi har  $f(a, b) = m$ . Det eneste vi trenger å vise, er at  $m = 0$ .

Anta at  $m > 0$ , vi skal utlede en selvmotsigelse fra dette. La  $z_0 = a + ib$  og  $w = z - z_0$ . Da er  $z = z_0 + w$ , så

$$P(z) = c_0 + c_1(z_0 + w) + c_2(z_0 + w)^2 + \dots + c_n(z_0 + w)^n.$$

Ved å gange ut parenteser og samle ledd som har felles potens  $w^k$ , kan man skrive dette om på formen

$$P(z) = d_0 + d_1w + d_2w^2 + \dots + d_nw^n,$$

der koeffisientene  $d_i$  er komplekse tall uavhengige av  $z$ . Merk at  $f(z_0) = d_0$ . Ergo er  $|d_0| = m \neq 0$ . La  $d_k$  være første koeffisient etter  $d_0$  som er ulik 0. Da kan vi skrive

$$P(z) = d_0 + d_k w^k + R \cdot w^k,$$

der  $R = d_{k+1}w + \dots + d_n w^{n-k}$ . Vi skriver nå på polarform:  $w = re^{i\theta}$ ,  $d_k = se^{i\phi}$  og  $d_0 = me^{iv}$ . Merk at siden  $m = |d_0|$ , stemmer det siste. Innsatt fås

$$\begin{aligned} P(z) &= me^{iv} + se^{i\phi} r^k e^{ik\theta} + Rr^k e^{ik\theta} \\ &= me^{iv} + sr^k e^{i(\phi+k\theta)} + Rr^k e^{ik\theta}. \end{aligned}$$

Vi velger så  $z$  slik at  $\theta$  oppfyller  $\phi + k\theta = v + \pi$ . Da er

$$e^{i(\phi+k\theta)} = e^{i(v+\pi)} = e^{iv} e^{i\pi} = -e^{iv}.$$

For  $r$  så liten at  $sr^k < m$  gjelder da

$$\begin{aligned} |P(z)| &= |(m - sr^k)e^{iv} + Rr^k e^{ik\theta}| \\ &\leq |(m - sr^k)e^{iv}| + |Rr^k e^{ik\theta}| \\ &= |m - sr^k| \cdot |e^{iv}| + |R| \cdot r^k \cdot |e^{ik\theta}| \\ &= (m - sr^k) \cdot 1 + |R| \cdot r^k \cdot 1, \end{aligned}$$

der jeg brukte trekantulikheten for komplekse tall (se oppgave 11.6.1) i annen overgang. Men slik  $R$  er definert, vil automatisk  $|R|$  gå mot 0 når  $r$  går mot 0. Ergo finnes  $\epsilon > 0$  slik at hvis  $r < \epsilon$ , så er  $|R| < \epsilon/2$ . For  $r < \epsilon$  og  $sr^k < p$  er da

$$|P(z)| = msr^k + (s/2)r^k = m - (s/2)r^k < m.$$

Dette er selvmotsigelsen vi var på jakt etter, og teoremet er bevist. ■

## 11.6 Oppgaver

**1.** *Trekantulikheten for komplekse tall.* Vis at for alle komplekse tall  $z$  og  $w$  gjelder

$$|z + w| \leq |z| + |w|.$$

(Hint: Vi har tidligere vist et slikt resultat for reelle vektorer i planet. Er det noen forskjell?)

**2.** I denne oppgaven skal vi utlede resultatet om eksistens av et globalt minimumspunkt for funksjonen  $f(x, y)$  i beviset ovenfor.

a) Vis at polynomet  $P(z)$  i teoremet oppfyller

$$|P(z)| = |z^n| \cdot |c_0 z^{-n} + \dots + c_{n-1} z^{-1} + c_n|.$$

b) La  $k$  være et reelt tall. Vis at det fins  $R > 0$  slik at hvis  $|z| > R$ , så er  $|P(z)|$  større enn  $k$ . (Hint: Når  $|z| \rightarrow \infty$ , går  $|z^n|$  mot  $\infty$ . Den andre faktoren i uttrykket for  $|P(z)|$  går mot  $|c_n|$ .) Hvorfor viser dette resultatet om  $f$  som vi var ute etter?)

**3.** Vi skal nå se hvordan man kan bevise fundamentalteoremet på grunnlag av teorem 11.6.1. Først skal vi vise følgende utsagn ved induksjon: "Ethvert komplekst polynom  $P(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n$  av grad  $n \geq 1$  kan skrives

$$P(z) = c_n(z - r_1)(z - r_2) \cdots (z - r_n)$$

der  $r_1, \dots, r_n$  er komplekse tall."

a) Begrunn at utsagnet holder for  $n = 1$ .

Anta nå at utsagnet holder for  $n = k$ , og la  $P(z)$  være et polynom av grad  $k + 1$ . Fra teorem 11.6.1 vet vi at  $P(z)$  har en rot  $r$ .

b) Begrunn med inspirasjon av teorem 10.0.0 om polynomdivisjon at det finnes et komplekst polynom  $Q(z)$  av grad  $n$  slik at

$$P(z) = Q(z) \cdot (z - r).$$

c) Vis at utsagnet vårt holder for alle  $n \geq 1$ .

Vi har nå *nesten* bevist algebraens fundamentalteorem; det eneste som mangler er unikheten av faktoriseringen. Denne fikses i neste punkt.

d) Vis at hvis et komplekst polynom  $P(z)$  kan skrives på to måter

$$P(z) = c_n(z - r_1)(z - r_2) \cdots (z - r_n)$$

$$= c_n(z - s_1)(z - s_2) \cdots (z - s_n),$$

så må  $r_1, \dots, r_n$  være de samme  $n$  tallene som  $s_1, \dots, s_n$ , bortsett eventuelt fra rekkefølgen. (Hint: Se når uttrykkene er 0.)

# Appendiks\*\*\*

---

I dette appendixet har jeg samlet tre beviser som er spesielt krevende. De er lange, og likevel er langfra alle detaljer fylt ut i dem. Skal du arbeide deg gjennom, må du regne med å fylle inn ganske mye detaljer selv.

## Bevis for inversfunksjonsteoremet (teorem 6.6.2)

Siden  $\det(F'(\mathbf{a})) \neq 0$ , finnes ved oppgave 6.5.4 en  $m > 0$  slik at

$$|F'(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v}| \geq m|\mathbf{v}|$$

for alle  $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$ . Hvis  $F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{a})$  og  $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$ , gir Taylor-formelen  $F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{a}) + F'(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + E(\mathbf{x})$  oss at  $-E(\mathbf{x}) = F'(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})$ , dvs.

$$\frac{|E(\mathbf{x})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}|} = \frac{|F'(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}|} \geq m.$$

Når  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}$  går uttrykket til venstre mot 0, dvs. i grensen får vi  $0 \geq m$ . Dette er tull, og derfor må det finnes et lukket rektangel  $R$  med sentrum i  $\mathbf{a}$  slik at  $F$  er  $C^1$  på  $R$  og  $F(\mathbf{x}) \neq F(\mathbf{a})$  for alle  $\mathbf{x} \in R$ . La

$$G(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}) - F'(\mathbf{a})\mathbf{x}$$

for alle  $\mathbf{x} \in R$ . Da er  $G$  også  $C^1$  på  $R$ . Siden  $F$  er  $C^1$  i  $\mathbf{a}$ , kan vi ved å kryspe  $R$  anta at  $\det(F'(\mathbf{x})) \neq 0$  for  $\mathbf{x} \in R$ , og dessuten at

$$\left| \frac{\partial G_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \right| = \left| \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) - \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\mathbf{a}) \right| < \frac{m}{2n^2}$$

for alle  $i, j$  og  $\mathbf{x} \in R$ . Vi får nå, for alle  $\mathbf{x}, \mathbf{s} \in R$

$$\begin{aligned} m|\mathbf{x} - \mathbf{s}| &\leq |F'(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{s})| = |F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{s}) + G(\mathbf{s}) - G(\mathbf{x})| \\ &\leq |F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{s})| + |G(\mathbf{s}) - G(\mathbf{x})| \leq |F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{s})| + \frac{m}{2}|\mathbf{x} - \mathbf{s}|, \end{aligned}$$

siste overgang ved oppgave 6.5.3 anvendt på  $G$ . Altså

$$|\mathbf{x} - \mathbf{s}| \leq \frac{2}{m} |F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{s})| \quad \text{for alle } \mathbf{x}, \mathbf{s} \in R. \quad (1)$$

Velg  $d > 0$  slik at  $|\mathbf{x} - \mathbf{a}| \geq 2d/m$  for alle  $\mathbf{x}$  på randen til det lukkede rektanget  $R$ . La så

$$W = \{\mathbf{z} \in \mathbf{R}^n \mid d/2 > |\mathbf{z} - F(\mathbf{a})|\}.$$

Velg en fast  $\mathbf{y} \in W$ . Vi skal vise at det fins en unik  $\mathbf{x} \in R$  slik at  $F(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ . Betrakt da funksjonen  $g : R \rightarrow \mathbf{R}$  definert ved

$$g(\mathbf{x}) = |\mathbf{y} - F(\mathbf{x})|^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - F_i(\mathbf{x}))^2.$$

Denne er kontinuerlig på den kompakte mengden  $R$ , og derfor har den ved ekstremverdisetningen et minimum der. Dette minimumet kan *ikke* ligge på randen av  $R$ , for hvis  $\mathbf{x}$  er på randen har vi  $|\mathbf{y} - F(\mathbf{a})| < d/2$  og dessuten

$$d \leq \frac{m}{2} |\mathbf{a} - \mathbf{x}| \leq |F(\mathbf{a}) - F(\mathbf{x})| \leq |F(\mathbf{a}) - \mathbf{y}| + |\mathbf{y} - F(\mathbf{x})|,$$

så  $|\mathbf{y} - F(\mathbf{a})| < |\mathbf{y} - F(\mathbf{x})|$ . Ved teorem 6.4.1 må det dermed finnes et punkt  $\mathbf{x}$  i det indre av  $R$  slik at  $\partial g / \partial x_j(\mathbf{x}) = 0$  for alle  $j$ , dvs. ved kjernerregelen

$$\sum_{i=1}^n 2(y_i - F_i(\mathbf{x})) \cdot \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{for alle } j.$$

Dette kan skrives  $F'(\mathbf{x})^t \cdot (\mathbf{y} - F(\mathbf{x})) = 0$ , der  $t$  står for matrisetransponering. Men siden  $\det(F'(\mathbf{x})^t) \neq 0$  ved teorem 1.13.6, gir teorem 10.0.0 at  $\mathbf{y} - F(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ , dvs.  $\mathbf{y} = F(\mathbf{x})$ . Dermed har vi vist eksistensen av vår etterlyste  $\mathbf{x}$ . Unikhet fås fra (1). La

$$V = \{\mathbf{x} \in R \mid F(\mathbf{x}) \in W\}.$$

Vi har nå vist at  $F : V \rightarrow W$  har en invers  $F^{-1} : W \rightarrow V$ . Mengdene  $V$  og  $W$  er begge åpne. Siden (1) kan omskrives til

$$|F^{-1}(\mathbf{x}) - F^{-1}(\mathbf{s})| \leq \frac{2}{m} |\mathbf{x} - \mathbf{s}| \quad \text{for alle } \mathbf{x}, \mathbf{s} \in W, \quad (2)$$

er  $F^{-1}$  kontinuerlig. Gitt  $\epsilon > 0$  kan du nemlig alltid ta  $\delta = m\epsilon/2$ .

Det gjenstår å vise at  $F^{-1}$  er  $C^1$ . La  $\mathbf{y} \in W$ , med  $\mathbf{y} = F(\mathbf{x})$ . Vi skal vise at  $F^{-1}$  er deriverbar i  $\mathbf{y}$ , med  $(F^{-1})'(\mathbf{y}) = F'(\mathbf{x})^{-1}$ . Ved oppgave 6.5.1 er det nok å vise at vi har en Taylorformel som stemmer med dette. La  $\mathbf{r} \in W$ , med  $\mathbf{r} = F(\mathbf{s})$ . Siden  $F'(\mathbf{x})(\mathbf{s} - \mathbf{x}) = F'(\mathbf{x})\mathbf{s} - F'(\mathbf{x})\mathbf{x}$ , kan Taylorformelen  $F(\mathbf{s}) = F(\mathbf{x}) + F'(\mathbf{x})(\mathbf{s} - \mathbf{x}) + E(\mathbf{s})$  skrives

$$F'(\mathbf{x})\mathbf{s} = F'(\mathbf{x})\mathbf{x} + F(\mathbf{s}) - F(\mathbf{x}) - E(\mathbf{s}).$$

Multipliserer vi med matrisen  $F'(\mathbf{x})^{-1}$  på begge sider, gir dette

$$\mathbf{s} = \mathbf{x} + F'(\mathbf{x})^{-1}(F(\mathbf{s}) - F(\mathbf{x})) - F'(\mathbf{x})^{-1}(E(\mathbf{s})).$$

Innsetting av  $\mathbf{s} = F^{-1}(\mathbf{r})$  og  $\mathbf{x} = F^{-1}(\mathbf{y})$  gir den ønskede Taylorformelen:

$$F^{-1}(\mathbf{r}) = F^{-1}(\mathbf{y}) + F'(\mathbf{x})^{-1}(\mathbf{r} - \mathbf{y}) - F'(\mathbf{x})^{-1}E(\mathbf{s}).$$

Vi må vise at restleddet  $\rightarrow 0$  fort nok. Ved oppgave 6.5.4 brukt på  $F'(\mathbf{x})^{-1}$  fins et tall  $M > 0$  slik at

$$\lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{y}} \frac{|F'(\mathbf{x})^{-1}E(\mathbf{s})|}{|\mathbf{r} - \mathbf{y}|} \leq \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{y}} \frac{M \cdot |E(\mathbf{s})|}{|\mathbf{r} - \mathbf{y}|} = M \cdot \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{y}} \frac{|E(\mathbf{s})|}{|\mathbf{s} - \mathbf{x}|} \cdot \frac{|\mathbf{s} - \mathbf{x}|}{|\mathbf{r} - \mathbf{y}|}$$

Her går første faktor i grenseuttrykket mot 0 fordi  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{y}$  gir  $\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{x}$  ved kontinuitet av  $F^{-1}$ , og fordi  $F$  er deriverbar. Andre ledd er begrenset ved (2), så hele grensen er null. Så  $F^{-1}$  er deriverbar, og dens deriverte er gitt ved

$$(F^{-1})'(F(\mathbf{x})) = [F'(\mathbf{x})]^{-1}.$$

Siden denne formelen gir oss de partielle deriverte av  $F^{-1}$  som kontinuerlige funksjoner av de partielle deriverte av  $F$ , følger dessuten at  $F^{-1}$  er  $C^1$  på  $W$ . ■

## Bevis for Fubinis teorem (teorem 7.6.1)

Bemerk først at ved antakelsene om integrerbarhet, holder det å bevise dette teoremet i en variant der man tolker alle involverte integraler som nedreintegraler. I beviset nedenfor står derfor alle integraltegn for nedreintegral.

Siden  $f$  er antatt integrerbar på  $D$ , kan vi like gjerne anta fra starten av at  $D$  er et lukket rektangel i  $\mathbf{R}^{n+m}$ . Tverrsnitt-mengdene  $D_{\mathbf{x}}$  vil da være lukkede rektangler i  $\mathbf{R}^m$ . Gitt  $\epsilon > 0$ , velg nedresum  $S$  på  $D$  slik at  $S > \int_D f(\mathbf{x}, \mathbf{y})d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \epsilon$  og  $S$  er på formen

$$S = \sum_i \sum_j c_{ij}v(A_i \times B_j), \tag{1}$$

der  $A_i$  og  $B_j$  er lukkede rektangler i henholdsvis  $\mathbf{R}^n$  og  $\mathbf{R}^m$ . For hver  $i$ , definer

$$S_i = \sum_j c_{ij}v(B_j).$$

Hvis  $\mathbf{x} \in A_i$ , så er  $S_i$  en nedresum for funksjonen  $f_{\mathbf{x}}$  på  $D_{\mathbf{x}}$ . Grunnen er at rektanglene  $B_{ij}$  utgjør en partisjon av rektanglet  $D_{\mathbf{x}}$ , og at hvis  $\mathbf{y} \in D_{\mathbf{x}}$  er slik at  $\mathbf{y} \in B_{ij}$ , så er  $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq c_{ij}$ . Altså er

$$S_i \leq \int_{D_{\mathbf{x}}} f_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})d\mathbf{y}$$

for alle  $\mathbf{x} \in A_i$ . Dermed er  $S' = \sum_i S_i v(A_i)$  en nedresum for funksjonen  $\int_{D_{\mathbf{x}}} f_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$  på  $A$ . Så  $S' < \int_A (\int_{D_{\mathbf{x}}} f_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) d\mathbf{y}) d\mathbf{x}$ . Men  $S = S'$ , så vi får

$$\int_D f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \int_A \left[ \int_{D_{\mathbf{x}}} f_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right] d\mathbf{x} + \epsilon.$$

Siden  $\epsilon > 0$  var vilkårlig, har vi vist teoremet med ulikhet ene veien.

Den omvendte ulikheten vises helt tilsvarende, bortsett fra at vi da starter med en øvresum  $S$  for  $f$  på  $D$  slik at  $S < \int_D f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \epsilon$ , og  $S$  er på formen (1). En slik  $S$  finnes fordi  $f$  er integrerbar på  $D$ . Definer  $S_i = \sum_j c_{ij} v(B_j)$ . Hvis  $\mathbf{x} \in A_i$ , er  $S_i$  en øvresum for  $f_{\mathbf{x}}$  på  $D_{\mathbf{x}}$ . Videre er  $S' = \sum_i S_i v(A_i)$  en øvresum for funksjonen  $\int_{D_{\mathbf{x}}} f_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$  på mengden  $A$ . Dette gir at  $S' = S > \int_A (\int_{D_{\mathbf{x}}} f_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) d\mathbf{y}) d\mathbf{x}$ , og

$$\int_D f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > \int_A \left[ \int_{D_{\mathbf{x}}} f_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right] d\mathbf{x} + \epsilon. \quad \blacksquare$$

## Bevis for koordinatskifteteoremet (teorem 7.6.2)

Ved antakelsen om kontinuitet har vi også integrerbarhet. Ergo kan vi her, akkurat som for Fubinis teorem, velge å bevise teoremet i varianten der alle involverte integraler er nedreintegraler. I beviset nedenfor står derfor alle integraltegn for nedreintegraler.

Vi bruker induksjon på  $n$ . I dimensjon  $n = 1$  følger "påstanden" nedenfor fra teorem MIP 7.4.2, fordi  $E$  da er et intervall og  $f(\mathbf{x}) = 0$  utenfor  $E$ . Resten av beviset for  $n = 1$  får du ved å sette inn  $n = 1$  i beviset vi gir for induksjonstrinnet nedenfor. Vi konsentrerer oss derfor om induksjonstrinnet.

Anta at teoremet holder i dimensjon  $n - 1$ . Vi skal vise det i dimensjon  $n$ .

*Påstand.*

La  $\bar{\mathbf{u}} \in D$ . Da finnes et åpent rektangel  $E \subseteq R$  med sentrum  $T(\bar{\mathbf{u}})$  slik at hvis vi forutsetter  $f(\mathbf{x}) = 0$  utenfor  $E$ , så holder likningen i teoremet.

*Bevis for påstanden.* Siden  $\det T'(\bar{\mathbf{u}}) \neq 0$ , må en av underdeterminantene vi får å gange med ved oppløsning av  $\det T'(\bar{\mathbf{u}})$  etter 1. linje være ulik 0. Å bytte om søyler i  $\det T'(\bar{\mathbf{u}})$  svarer til å nummerere om koordinatene i  $\mathbf{R}^n$ , og slik ombytting endrer ingen av integralene i teoremet. Dermed kan vi anta at underdeterminanten vi får ved å stryke første søyle og første rad i  $\det T'(\bar{\mathbf{u}})$  er ulik 0. Definer  $H : D \rightarrow \mathbf{R}^n$  ved

$$H(\mathbf{u}) = (u_1, T_2(\mathbf{u}), \dots, T_n(\mathbf{u})).$$

Ved oppløsning etter første linje følger direkte at  $\det H'(\bar{\mathbf{u}}) \neq 0$ . Ved inversfunksjonsteoremet fins dermed en åpen omegn  $V$  om  $H(\bar{\mathbf{u}})$  slik at  $H$  har en

$C^1$  invers på  $V$ , og  $\det(H^{-1})' \neq 0$  på  $V$ ,  $\det(H)' \neq 0$  på  $H^{-1}(V)$ . Definer  $K : V \rightarrow \mathbf{R}^n$  ved

$$K(\mathbf{y}) = (T_1(H^{-1}(\mathbf{y})), y_2, \dots, y_n).$$

For alle  $\mathbf{u} \in H^{-1}(V)$  har vi nå

$$T(\mathbf{u}) = K(H(\mathbf{u})),$$

dvs.  $T(H^{-1}(\mathbf{y})) = K(H(H^{-1}(\mathbf{y})))$  for alle  $\mathbf{y} \in V$ . Med andre ord

$$T(H^{-1}(\mathbf{y})) = K(\mathbf{y})$$

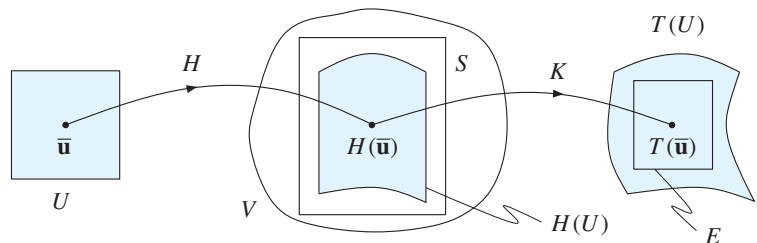
for alle  $\mathbf{y} \in V$ . Det følger nå ved kjerneregelen at  $K$  er  $C^1$  på  $V$ , og ved produktregelen for determinanter fås dessuten

$$\det(K)' \neq 0$$

på  $V$ . La  $S \subseteq V$  være et åpent rektangel med sentrum  $H(\bar{\mathbf{u}})$ . Siden  $H$  er kontinuerlig, fins et åpent rektangel

$$U \subseteq H^{-1}(V)$$

med sentrum  $\bar{\mathbf{u}}$  slik at  $H(U) \subseteq S$ . La  $E \subseteq T(U)$  være et åpent rektangel med sentrum  $T(\bar{\mathbf{u}})$ . Figur:



Skriv  $U = [c, d] \times B$  og  $S = [a, b] \times A$ . For gitt  $t \in [c, d]$  og  $\mathbf{z} \in A$ , la

$$H_t : B \rightarrow \mathbf{R}^{n-1} \quad \text{ved} \quad H_t(\mathbf{w}) = (H_2(t, \mathbf{w}), \dots, H_n(t, \mathbf{w}))$$

$$k_{\mathbf{z}} : [a, b] \rightarrow \mathbf{R} \quad \text{ved} \quad k_{\mathbf{z}}(t) = K_1(t, \mathbf{z}).$$

Vi kan nå gjøre det lange regnestykket på neste side. Første overgang er fordi  $f(\mathbf{x}) = 0$  utenfor  $K(S)$ . I annen overgang er  $\mathbf{x} = (s, \mathbf{z})$ , og jeg bruker Fubinis teorem. Området  $K(S)$  kan nemlig beskrives ved  $\mathbf{z} \in A$ ,  $s \in k_{\mathbf{z}}([a, b])$  for hver fast  $\mathbf{z}$ . At det er de siste koordinatene som holdes "fast" er ingen hindring,

jamfør kommentar etter beviset for Fubinis teorem. I tredje overgang bruker jeg teoremet i dimensjon  $n = 1$ . Fjerde overgang er fordi hvis  $\mathbf{y} = (t, \mathbf{z})$ , så er

$$K'(\mathbf{y}) = k'_z(t).$$

Femte overgang er fordi  $f$  er 0 utenfor  $H(U)$ , og sjette pga. Fubini igjen. I syvende overgang bruker jeg induksjonshypotesen på funksjonen  $H_t$ . Åttende overgang er fordi hvis  $\mathbf{u} = (t, \mathbf{w})$ , så er  $H'_t(\mathbf{w}) = H'(\mathbf{u})$ . I niende overgang bruker jeg at  $T(\mathbf{u}) = K(H(\mathbf{u}))$ , samt kjernerregelen og produktregelen for determinanter. Siste overgang er fordi  $f$  er 0 utenfor  $D$ .

$$\begin{aligned} \int_R f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &= \int_{K(S)} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_A \left[ \int_{k_z([a,b])} f(s, \mathbf{z}) \, ds \right] d\mathbf{z} \\ &= \int_A \left[ \int_a^b f(k_z(t), \mathbf{z}) \cdot |\det k'_z(t)| \, dt \right] d\mathbf{z} \\ &= \int_S f(K(\mathbf{y})) \cdot |\det K'(\mathbf{y})| \, d\mathbf{y} = \int_{H(U)} f(K(\mathbf{y})) \cdot |\det K'(\mathbf{y})| \, d\mathbf{y} \\ &= \int_c^d \left[ \int_{H_t(B)} f(K(t, \mathbf{w})) \cdot |\det K'(t, \mathbf{w})| \, d\mathbf{w} \right] dt \\ &= \int_c^d \left[ \int_B f(K(t, H_t(\mathbf{w}))) \cdot |\det K'(t, H_t(\mathbf{w}))| \cdot |\det H'_t(\mathbf{w})| \, d\mathbf{w} \right] dt \\ &= \int_U f(K(H(\mathbf{u}))) \cdot |\det K'(H(\mathbf{u}))| \cdot |\det H'(\mathbf{u})| \, d\mathbf{u} \\ &= \int_U f(T(\mathbf{u})) \cdot |T'(\mathbf{u})| \, d\mathbf{u} = \int_D f(T(\mathbf{u})) \cdot |T'(\mathbf{u})| \, d\mathbf{u}. \end{aligned}$$

Dermed er påstanden bevist.

Så til selve teoremet. Ved oppgave 7.6.2 kan vi anta at  $f$  er ikke-negativ. Gitt  $\epsilon > 0$ , velg en nedresum

$$S = \sum_{i=1}^{\alpha} c_i v(A_i)$$

for  $f$  på  $R$  slik at  $S \geq \int_R f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \epsilon$ . Siden  $f$  er ikke-negativ, kan vi anta at alle rektanglene  $A_i$  er innenfor  $R$ . For hver  $\mathbf{u} \in D$ , velg et rektangel  $E_{\mathbf{u}}$  som nevnt i påstanden. Da er  $\{E_{\mathbf{u}} \mid \mathbf{u} \in D\}$  en åpen overdekning av den kompakte mengden  $A_1 \cup \dots \cup A_{\alpha}$ , så ved kompakthetsteoremet fins et endelig utvalg  $E_1, \dots, E_{\beta}$  av  $E_{\mathbf{u}}$ -ene som også dekker. Ved å legge et rektangel inne i hvert "snittrektangel" som dannes mellom rektanglene  $A_1, \dots, A_{\alpha}$  og  $E_1, \dots, E_{\beta}$  og forlenge sidekanter, kan vi finne disjunkte, åpne rektangler  $B_i$  og kontinuerlige funksjoner  $g_i : T(D) \rightarrow [0, 1]$  for  $1 \leq i \leq m$  slik at

$$(1) \quad v(B_1) + \dots + v(B_m) > v(A_1) + \dots + v(A_{\alpha}) - \epsilon$$



- (2) Hvert rektangel  $B_i$  er inneholdt i nøyaktig ett av rektanglene  $A_1, \dots, A_\alpha$  og ett av rektanglene  $E_1, \dots, E_\beta$ . De øvrige  $A$ -rektanglene og  $E$ -rektanglene i disse to samlingene er disjunkte med  $B_i$ .
- (3) Vi har  $g_i(\mathbf{x}) = 1$  for alle  $\mathbf{x} \in B_i$ , og hvis  $B_i \subseteq E_j$  er  $g_i(\mathbf{x}) = 0$  for alle  $\mathbf{x} \notin E_j$ .
- (4) For hver  $\mathbf{x} \in T(D)$  fins høyst én  $i$  slik at  $g_i(\mathbf{x}) \neq 0$ .

Hvis  $B_i \subseteq A_j$ , så la  $d_i = c_j$ . Hvis  $M$  er slik at  $|f(\mathbf{x})| < M$  på  $R$ , er da  $S' \geq S - \epsilon M$ . Vi får

$$\begin{aligned} \int_D f(T(\mathbf{u}))|\det T'(\mathbf{u})| d\mathbf{u} &\geq \int_D \sum_{i=1}^n f(T(\mathbf{u}))g_i(T(\mathbf{u}))|\det T'(\mathbf{u})| d\mathbf{u} \\ &= \sum_{i=1}^n \int_D f(T(\mathbf{u}))g_i(T(\mathbf{u}))|\det T'(\mathbf{u})| d\mathbf{u} \\ &= \sum_{i=1}^n \int_R f(\mathbf{x})g_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \geq \sum_{i=1}^n \int_{B_i} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &\geq \sum_{i=1}^n d_i v(B_i) = S' \geq S - \epsilon M \geq \int_R f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \epsilon - \epsilon M \end{aligned}$$

I første overgang brukte jeg at  $f$  er ikke-negativ, i annen overgang brukte jeg teorem 7.1.3 (1), og i tredje "påstanden" med  $f(\mathbf{x}) \cdot g_i(\mathbf{x})$  i rollen som  $f(\mathbf{x})$ . Siden  $\epsilon > 0$  var vilkårlig, har vi vist teoremet med ulikhet en vei.

For å vise teoremet med ulikhet motsatt vei, la  $\hat{R} = D$ ,  $\hat{D} = R$ ,  $\hat{T} = T^{-1}$  og definer

$$\hat{f}(\mathbf{x}) = f(T(\mathbf{x})) \cdot |\det T'(\mathbf{x})| \quad \text{for alle } \mathbf{x} \in \hat{R}.$$

Ved inversfunksjonsteoremet er  $\hat{T}$  også  $C^1$ , og

$$|\det \hat{T}'(\mathbf{x})| = |\det T'(\hat{T}(\mathbf{x}))|^{-1}.$$

Setter du inn de "hattede" versjonene i teoremet med ulikhet den veien vi har vist, faller ulikheten motsatt vei rett ut. ■

# Fasit

**Seksjon 1.2** [1] a)  $\langle 2, 5 \rangle$  b)  $\langle -\infty, 10 \rangle$  [2]  $\inf U = 3$ ,  $\sup U = 12$  [3]  $\sup U = 0.9999\dots = 1$  [4] a)  $U$  er en omegn om 2, men ikke om 10. b)  $U^* = \langle 0, 9 \rangle \cup \langle 10, 12 \rangle$ ,  $\mathbf{R} \setminus U = \langle -\infty, 0 \rangle \cup [9, 10] \cup [12, \infty)$ ,  $\partial U = \{0, 9, 10, 12\}$ ,  $\bar{U} = [0, 9] \cup [10, 12]$ .  $U$  er verken åpen eller lukket. [5]  $U = \langle 0, 1 \rangle$  har 0 som opphopningspunkt. Mengden  $\{0\} \cup \langle 1, 2 \rangle$  har 0 som isolert punkt.

## Seksjon 1.3

## Seksjon 1.5

**Seksjon 1.9** [1] 0.36 [2] b) 2 [3]  $1/3$

**Seksjon 1.10** [1] a) Trapesmetoden gir  $\approx 0.506$ . Eksakt: 0.5  
b) Trapesmetoden gir 3.87. Eksakt: 3.75

**Seksjon 1.11** [1] Bredde  $(16/27)[(\sqrt{13/4})^3 - 1]$  [2] a)  $2\sqrt{5}$   
b)  $(8/27)[(\sqrt{22/4})^3 - (\sqrt{13/4})^3]$  c)  $13/12$  d)  $\approx 1.16024$

**Seksjon 1.12** [1]  $x^2 + (y+4)^2 = 4$  [2]  $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$   
[3]  $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$

**Seksjon 2.1** [1] 84 [2] 24 [3] 720 [4] 504 [5] 12271512 [7] 1024 [8]  $100^{490000}$  [9] 2598960 [10] b) 77520 ganger prisen for en enkeltrekke

**Seksjon 2.2** [1] a)  $2/3$  b)  $2/3$  [2] a) 36. Ja b) 25 utfall. Sannsynlighet  $25/36$  c) 11 utfall. Sannsynlighet  $11/36$   
[3] a) 216 b)  $91/216 \approx 0.42$  [4] a) 45 b) 15 c)  $15/45 = 1/3$  [5] 2628000 flyturer. Sannsynligheten for kræsje er  $1/2628000$ . Denne er omtrent dobbelt så stor som sannsynligheten for å vinne på en enkeltrekke i Lotto. [6]  $1/2598960$  [7] a)  $(7/34) \cdot (6/33) \cdot (5/32) \cdot (4/31) \cdot (3/30) \cdot (2/29)$  b) Svaret i a) ganget med  $27/28$  c) Svaret i b) ganget med 7 [8] a)  $63/64 \approx 98.4\%$ . Imponerende, hva? b)  $E = 0$  c) 64 kroner [9]  $\approx 0.665$  [10]  $\binom{17}{7} = 19448$  rekker. Sannsynligheten for å vinne:  $\approx 0.36\%$  [11] Nei [12] a)  $\frac{99}{100}$  b)  $\frac{98}{100}$  c)  $\frac{99}{100} \cdot \frac{98}{100}$  d)  $\frac{99}{100} \cdot \frac{98}{100} \cdot \frac{97}{100} \dots \frac{81}{100} \approx 0.13$  [13] a)  $1/3$  b)  $2/3$  c) Ja, det doubler vinnerjansen.

**Seksjon 2.3** [1]  $a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$   
[2]  $a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8$  [3]  $(3y-4)^5 = 243y^5 - 1620y^4 + 4320y^3 - 5760y^2 + 3840y - 1024$ , og  $(1 + \sqrt{7})^7 = 4264 + 1624\sqrt{7}$  [4] 1184040  
b) Antall delmengder er  $2^n$ . Tolkning: Antall delmengder med  $i$  elementer er  $\binom{n}{i}$

**Seksjon 2.4** [1] a)  $\approx 272988$  b)  $2^{31} - 1$   
c)  $\frac{2}{3}(1 - (1/2)^{10}) \approx 0.6660156$  [2] a)  $t^5(1 - t^{2k+2})/(1 - t^2)$   
b)  $2^{n+1} - 1$

**Seksjon 2.5** [1] a)  $f'(x) = 2 \cosh x \sinh x = \sinh 2x$  b)  $f'(x) = \tanh x + x/(\cosh^2 x)$   
c)  $g'(x) = \frac{1}{2} \sinh x (\cosh x)^{-1/2}$  d)  $h'(x) = 5 \cosh(5x)$  [3]  
a)  $\sinh x + C$  b)  $\ln(\cosh x) + C$  c)  $\sinh(\ln x) + C$  d)  $x \cosh x - \sinh x + C$

**Seksjon 2.6** [1] a)  $f'(x) = \frac{1}{2}(x^2 + x)^{-1/2}$  b)  $\psi'(t) = 3(\operatorname{artanh} t)^2/(1 - t^2)$  [2] a)  $\frac{1}{2} \operatorname{arsinh}(t^2) + C$  b)  $(\ln 2)/3$  c)  $\operatorname{artanh}(\sin x) + C$   
d)  $\frac{1}{2} \operatorname{arsinh}(e^{2x}) + C$  e)  $\operatorname{artanh}(\sin x) + C$  f)  $\operatorname{arcosh}(\ln x) + C$   
[8] a)  $x = \ln(\sqrt{5} - 2)$  og  $x = \ln(3 + \sqrt{10})$  b)  $x = \pm \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$   
[9]  $2 \ln(2 + \sqrt{3}) - (3 + 2\sqrt{3})/(2 + \sqrt{3})$

**Seksjon 2.7** [1] a)  $1/2$  b)  $1/2$  c)  $+\infty$  d) 0 e) 0  
f) 3 g)  $-1/6$  h) 0 i) 1 j) 1 k)  $e$  l) 1 [2] a) 0  
b) 0 c) 0 d)  $+\infty$  [3] a) 0 b) 0

**Seksjon 2.9** [1] a) Vokser på  $(-\infty, 0)$  og  $[3, \infty)$ , avtar på  $(0, 3]$ . Nullpunkt  $x = 0$  b)  $x = 0$ ,  $y = x - 3$  [2] a) Vokser på  $(-\infty, 0]$  og  $[6, \infty)$ , avtar på  $[0, 3]$  og  $(3, 6]$  b)  $x = 3$ ,  $y = x + 3$  [3] a) Vokser på  $(-\infty, -\frac{1}{2}\sqrt{3})$  og  $[\frac{1}{2}\sqrt{3}, \infty)$ , avtar på  $[-\frac{1}{2}\sqrt{3}, -1]$  og  $(-1, 1)$  og  $(1, \frac{1}{2}\sqrt{3}]$ . Nullpunkt  $x = 0$  b)  $x = \pm 1$ ,  $y = x$  [4] a) Ingen b) Ingen c)  $y = x$  d)  $y = x$  e)  $y = 2x + 5/2$

**Seksjon 2.10** [1] 1.80219 [2]  $-0.56714$

**Seksjon 2.11** [1]  $4/\sqrt{3}$  m/s  $\approx 2.3$  m/s [2]  $3\sqrt{3}$  m/s

**Seksjon 2.12** [1] a) 1 b) 1/3 c) -2 d) Divergerer  
e) 3/2 f) Divergerer [2] a) Konv b) Konv c) Div  
d) Konv e) Konv f) Div

**Seksjon 2.13** [1] a) Hyperbel b) Ellipse c) Ellipse d)  
Parabel [2] a) Hyperbel b) Parabel c) Ellipse [3] a)  
 $2(x+3)^2 - 19$  b)  $-(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{5}{4}$  c)  $(y-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$  d)  
 $(x+\frac{1}{4})^2 + \frac{15}{16}$  [4] a) Ellipse b) Hyperbel c) Parabel

**Seksjon 2.14** [1]  $x-3 = \frac{1}{4}(y-1)^2$  [2]  $y-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x-5)^2$   
[3] a) Brennpunkt (0, 1/4), styrelinje  $y = -1/4$  b)  
Brennpunkt (1/4, 0), styrelinje  $x = -1/4$  c) Brennpunkt  
(2, -1/16), styrelinje  $y = 1/16$  [4] (2,  $\sqrt{5}$ ) og (2,  $-\sqrt{5}$ ) [5]  
 $3x^2 + 4y^2 - 18x - 8y = 17$  [6] (0,  $\sqrt{2}$ ) og (0,  $-\sqrt{2}$ )

**Blandede oppgaver til kapittel 2** [2]  $\frac{13}{51} \cdot \frac{12}{50} \cdot \frac{11}{49} \cdot \frac{10}{48}$  [3]  
a)  $40/2598960 \approx 0.0000154$  b)  $(\frac{3}{51} \cdot \frac{2}{50} \cdot \frac{1}{49}) \cdot 5 \approx 0.00024$   
[4] b)  $e_1 = \sqrt{3}/2 \approx 0.866$ ,  $e_2 = \sqrt{15}/4 \approx 0.968$ ,  $e_3 = 0$   
c)  $\sqrt{2}$  [5] Jorden:  $a/b \approx 1.00014$ , Pluto:  $a/b \approx 1.0325$ ,  
Kahoutek:  $a/b \approx 84.5$  [7] b) Volumet er  $\pi$  [8] a)  
 $T_0 = 80/9$ ,  $S_1 = 80/9$  b)  $T_1 = 80/(9^2)$ ,  $S_2 = 80/(9^2)$  c)  
 $T_2 = 80/(9^3)$ ,  $S_3 = 80/(9^3)$  d) 10 sekunder

**Seksjon 3.1** [2] a) Ikke løsbart, for substitusjonen  $u = x^2$  gjør  
integralet om til  $\int e^{-u^2} du$   
b)  $-(1/2)e^{-x^2} + C$  c) Ikke løsbart, for substitusjonen  $u = \sqrt{x}$   
gjør integralet om til  $\int e^{-u^2} du$  d)  $-2e^{-\sqrt{x}} + C$

**Seksjon 3.2** [1] a)  $(1/8)x - (1/32) \sin 4x + C$   
b)  $-2/(\cos x) + 1/(3 \cos^3 x) - \cos x + C$  c)  $\cos x -$   
 $\operatorname{artanh}(\cos x) + C$   
d)  $(1/7) \cos^7 x - (1/5) \cos^5 x + C$   
[2] a)  $(2/3) \sin^{3/2} x - (4/7) \sin^{7/2} x$   
 $+ (2/11) \sin^{11/2} x + C$   
b)  $-2(\sin x)^{-1/2} - \frac{4}{3}(\sin x)^{3/2} + \frac{2}{7}(\sin x)^{7/2} + C$  [3] a)  
 $1/(2 \sin x) - 3 \sin x - (1/3) \sin^3 x - (1/5) \sin^5 x + C$  b)  
 $-(\cos^4 x)/4 + C$   
[4]  $(1/16)x - (1/64) \sin(4x) - (1/48) \sin^3 2x + C$   
[5] b)  $-(1/6) \cos 3x - (1/22) \cos 11x + C$   
c)  $(1/8) \sin 4x - (1/28) \sin 14x + C$   
d)  $(1/10) \sin 5x - (1/38) \sin 19x + C$

**Seksjon 3.3** [1] a)  $\arcsin(x/4) + C$  b)  $(1/2) \arctan x +$   
 $x/(2+2x^2) + C$  c)  $\sqrt{x^2-25}/(25x) + C$  [2]  $(1/3)(a^2 -$   
 $x^2)^{3/2} - a^2 \sqrt{a^2 - x^2} + C$   
[3] a)  $x/\sqrt{1+x^2} + C$   
b)  $(1/8)(2x^2-9)\sqrt{9-x^2}$   
 $+ (81/8) \arcsin(x/3) + C$   
c)  $(x/8)(20-2x^2)\sqrt{4-x^2} + 6 \arcsin(x/2) + C$   
d)  $-\sqrt{1-x^2}/x - \arcsin x + C$

**Seksjon 3.4** [1]  $-1/(2x^2+2x+2) + (2\sqrt{3}/3)[\arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+$   
 $\frac{1}{2})) + \frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})/(1+\frac{4}{3}(x+\frac{1}{2})^2)] + C$  [2] a)  $-1/(x+3) + C$   
b)  $(1/\sqrt{14}) \arctan((x+3)/\sqrt{14}) + C$   
c)  $-2/(x^2-2x+10) + (15/162)[\arctan((x-1)/3) + \frac{1}{3}(x-$   
 $1)/(1+\frac{1}{9}(x-1)^2)] + C$  d)  $\operatorname{arsinh}((x+1)/2) + C$  e)  
 $(1/2) \arcsin(x-1) + (1/2)(x-1)\sqrt{1-(x-1)^2} + C$

**Seksjon 3.5** [1] a)  $4 \ln|x-1| + 2 \ln|x+2| + C$  b)  
 $(1/3)x^3 - (1/2)x^2 + x - \ln|x+1| + C$  c)  $(11/3) \ln|x-1| + 2/(x-$   
 $1) + (1/3) \ln|x+2| + C$  d)  $\ln|x| + \ln|x-3| - \ln|x+3| + C$  e)  
 $\ln|x+1| + \arctan x + C$  f)  $\ln|x-1| - 2 \ln|x+2| + 6/(x+2) + C$   
g)  $\ln|x-1| + (1/2) \arctan x + x/(2x^2+2) + C$

**Seksjon 3.6** [1] a)  $(2/5)(x+2)^{5/2} - (4/3)(x+2)^{3/2} + C$  b)  
 $(4/3)x^{3/4} - 2\sqrt{x} + 4 \cdot \frac{4}{\sqrt{x}} - 4 \ln(\frac{4}{\sqrt{x}} + 1) + C$  c)  $x - 2\sqrt{x} +$   
 $2 \ln(\sqrt{x} + 1) + C$  d)  $\sqrt{1-x^2} - 2 \arctan \sqrt{(1-x)/(1+x)} + C$   
e)  $2\sqrt{x} - 3 \cdot \sqrt[3]{x} + 6 \cdot \sqrt[6]{x} - 6 \ln(\frac{6}{\sqrt{x}} + 1) + C$  f)  $2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} -$   
 $2e^{\sqrt{x}} + C$  g)  $(3/28)(2x+5)^{7/3} - (15/16)(2x+5)^{4/3} + C$   
h)  $(1/7)(x^2+4)^{7/2} - (8/5)(x^2+4)^{5/2} + (16/3)(x^2+4)^{3/2} + C$   
[2] a)  $-2/(1+\tan(\theta/2)) + C$  b)  $-(1/5) \ln|\tan \frac{\theta}{2} - 3| +$   
 $(1/5) \ln|\tan \frac{\theta}{2} + \frac{1}{3}| + C$

**Blandede oppgaver til kapittel 3** [1] a) Beklager, ingen fasit til  
noen av punktene i denne oppgaven. Meningen er at du skal trene  
på å sjekke svarene dine ved derivasjon. [3]  $(x^{n+1} \ln x)/(n+$   
 $1) - x^{n+1}/(n+1)^2 + C$  [5] a)  $I_1 = \arctan x + C$ ,  
 $I_2 = x/(2+2x^2) + (1/2) \arctan x + C$

**Seksjon 4.1** [1]  $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}$  Følgen konvergerer mot  
0 [2] a) Konvergerer mot 0 b) Konvergerer mot 2 c)  
Divergerer d) Konvergerer mot 0 [3] d) -5

**Seksjon 4.2** [1] a) Konvergerer, sum 5 b) Konvergerer,  
sum 1/6 c) Divergerer d) Konvergerer, sum 7/10 e)  
Konvergerer, sum 1/3 [2]  $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n)$  [3] 17/12 [4]  
 $\sum_{n=0}^{\infty} c \cdot (0.977)^n = c/0.023 \approx (43.5)c$

**Seksjon 4.3** [1] a) Div b) Konv c) Div d) Div e)  
Konv f) Konv g) Konv h) Konv [2] a) Div b) Konv  
c) Konv d) Konv e) Konv f) Konv g) Div h) Konv  
[3] a) Divergerer b) Konvergerer betinget [4] a) Div b)  
Div  
c) Konv d) Div e) Div f) Konv [5]  $1 - 2^{-2} + 3^{-2} -$   
 $4^{-2} + 5^{-2} - 6^{-2} + 7^{-2} - 8^{-2} + 9^{-2} - 10^{-2} \approx 0.818$  [6] a)  
Konv b) Div c) Konv d) Konv e) Konv f) Konv  
g) Div h) Konv i) Konv j) Konv k) Div l) Konv  
m) Konv n) Div [7] Konvergerer for  $p > 1$ , divergerer for  
 $p \leq 1$ .

**Seksjon 4.4** [1] a) Taylorrekken:  $1-2x+4x^2-8x^3+16x^4-\dots$   
 $T_3(x) = 1 - 2x + 4x^2 - 8x^3$  b)  $1/(2x+1)$  [2]  $T_3(x) =$

$3-7x+x^2+5x^3$ . Taylorrekken: Begge blir  $3-7x+x^2+5x^3+2x^4$   
 [3] a)  $T_4(x) = 1 + 2x + 2x^2 + (4/3)x^3 + (2/3)x^4$  [4] b)  
 $\ln(1.2) \approx 137/750$

**Seksjon 4.5** [1] a) Konvergerer for  $x \in (-7, 13)$  b)  
 Konvergerer for  $x = 0$  c) Konvergerer for  $x \in (1, 3]$  d)  
 Konvergerer for  $x \in [-6, 4]$  [2] a)  $R = 1$  b)  
 $R = e$  [3] a)  $\sum_{n=1}^{\infty} x^n/(n^2 + 2n)$ . Konvergerer for  
 $x \in [-1, 1]$  b)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n/(n^2 + 2n)$ . Konvergerer for  
 $x \in [-1, 1]$  [4] a) Til  $f: x + x^3/3! + x^5/5! + x^7/7! + \dots$   
 Til  $g: 1 + x^2/2! + x^4/4! + x^6/6! + \dots$

**Seksjon 4.6** [1]  $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1}/(n^n(n+1))$  [2] a)  
 $1 - x^2/3! + x^4/5! - x^6/7! + x^8/9! - \dots$  b)  $-1 + x/2! - x^2/3! +$   
 $x^3/4! - x^4/5! + \dots$  c)  $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{23}x^3 + \frac{1}{34}x^4 - \frac{1}{45}x^5 + \dots$  d)  
 $2 + (2 \cdot 3)x + (3 \cdot 4)x^2 + (4 \cdot 5)x^3 + \dots$  e)  $\frac{1}{8} - \frac{1}{16}x + \frac{1}{32}x^2 -$   
 $\frac{1}{64}x^3 + \frac{1}{128}x^4 - \dots$  [3] b)  $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+2}/(2n+1)!$   
 c)  $F(x) = x \sin x$  d)  $f(x) = \sin x + x \cos x$  e) 1

**Seksjon 4.7** [1] a) (i)  $x \in (-1, 1)$  (ii)  $x/(1-x)^2$  b)  
 (i)  $x \in (2, 4)$  (ii)  $(x-3)/(4-x)^2$  c) (i)  $x \in (2/3, 4/3)$   
 (ii)  $1/(4-3x)$  d) (i)  $x \in [-1, 1)$  (ii)  $-\ln(1-x)/x$  for  
 $x \in [-1, 0) \cup (0, 1)$ . For  $x = 0$  er summen 0.

**Blandede oppgaver til kapittel 4** [1] a)  $n = 11$  holder.  
 $T_{11}(x) = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + x^9/9! - x^{11}/11!$  b)  
 $n = 27$  [2] a)  $T_3(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3$   
 [3]  $1/3 - 1/42 + 1/1320$  [5] Integralet er tilnærmet lik  $13/42$   
 [6] a)  $1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots$  b)  $1 + 2x^2 - 2x^4 + \dots$  c)  
 $1 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{9}x^8 + \dots$  d)  $1 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{8}x^6 - \dots$  [7]  
 $x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 + x^9/9 - \dots$  [8] b)  $\arctan 1 = \pi/4$   
 [9] Konvergerer [10] a) Konvergerer b) Divergerer [11]  
 $(-6, 2]$  [12]  $T_3(x) = -1 + \frac{3}{4}(x-1) + \frac{1}{64}(x-1)^2 - \frac{1}{512}(x-1)^3$   
 [13]  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+2}{(n+1)(n+2)} x^{2n+2}$  [14] d)  $T_2(v) = (1/2)m_0 v^2$

**Seksjon 5.1** [1] a)  $r = 2, \theta = 0$  b)  $r = 4, \theta = \pi/2$  c)  
 $r = 1, \theta = 3\pi/2$  d)  $r = \sqrt{2}, \theta = \pi/4$  e)  $r = 2, \theta = \pi/3$   
 f)  $r = 5, \theta = \arccos(-3/5) \approx 2.2$  [2] a)  $(0, -1)$  b)  
 $(-1, -1)$  [3] [5] a)  $r \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi)$  b)  $r \in [0, \infty)$ ,  
 $\theta \in [\pi/4, \pi/2]$  c)  $\theta \in (-\pi/2, \pi/2), r > 1/\cos \theta$ . Forklaring:  
 De mulige verdiene for  $\theta$  er intervallet  $(-\pi/2, \pi/2)$ . Når du har  
 valgt en  $\theta$  i dette intervallet, må du så velge  $r > 1/\cos \theta$  for at  
 punktet ditt skal havne innenfor området. d)  $\theta \in [0, \pi/4]$ ,  
 $r \in [0, 2]$  [6]  $x^2(1-a^2) + 2a^2x + y^2 = a^2$

**Seksjon 5.2** [1]  $(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 4$  [4]  $(x/4)^2 +$   
 $y^2 + (z/3)^2 = 1$  [5]  $(x-2)^2/4 + y^2 + z^2/4 = 1$  [6] (i)  
 $(x/3)^2 + (y/2)^2 = 1$  (ii)  $(x/3)^2 + z^2 = 1$  (iii)  $(y/2)^2 + z^2 = 1$  (iv)  
 $(x/3)^2 + (y/2)^2 = 3/4$  (v)  $(x/3)^2 + z^2 = 3/4$  (vi)  $(y/2)^2 + z^2 =$   
 $5/9$ . Alle snittkurvene blir ellipser.

**Seksjon 5.3** [1] a)  $r = 1, \theta = \pi/2, z = 2$  b)  $r = \sqrt{8}$ ,  
 $\theta = \pi/4, z = 1$  c)  $r = 2, \theta = 7\pi/6, z = 2$  [2] a)  
 $(-2, 0, 2)$  b)  $(0, -2, 0)$  [3] a)  $z = 4 - r^2$  b)  $r^2 = 4$   
 c)  $r^2 \sin^2 \theta + z^2 = 1$  d)  $z = r^2 \cos 2\theta$  e)  $\cos \theta = -\sin \theta$   
 f)  $r \cos \theta + r \sin \theta + z = 0$  [4]  $r^2 + z^2 = 4$  [5] a)  
 $\rho = 2, \theta = \pi/2, \phi = \pi/2$  b)  $\rho = \sqrt{8}, \theta = \pi/2, \phi = \pi/4$   
 c)  $\rho = \sqrt{8}, \theta = 0, \phi = 3\pi/4$  d)  $\rho = 5, \phi = \pi, \theta$  hva  
 som helst e)  $\rho = 4, \phi = 0, \theta$  hva som helst f)  $\rho = 2$ ,  
 $\theta = 3\pi/2, \phi = \pi/6$  [6] a)  $(-3, 0, 0)$  b)  $(0, 0, -1)$   
 [7] a)  $\rho^2 = 4$  b)  $\phi = \pi/4$  c)  $\rho = \cos \phi / \sin^2 \phi$  for  
 $\phi \in (0, \pi/2]$  d)  $\rho(\sin^2 \phi \cos^2 \theta + \cos^2 \phi) = 2 \sin \phi \cos \theta$  [8]  
 $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2)$

**Seksjon 5.4** [3] a) Lukket, ikke kompakt b) Åpen c)  
 Ingen av delene d) Kompakt

**Seksjon 5.5** [1] a)  $r \in [0, 1], \theta \in [-\pi/2, \pi/2]$  b)  
 $r \in (4, \infty), \theta \in [-3\pi/4, \pi/4]$  [2] a) Kulekoordinater:  
 $\rho \in [1, 4], \phi \in [0, \pi/2], \theta \in [0, 2\pi)$  b) Sylinderkoordinater:  
 $r \in [0, 1], z \in (-\infty, \infty), \theta \in [0, 2\pi)$  c) Sylinderkoordinater:  
 $r \in [0, 3], z \in [0, 9 - r^2], \theta \in [0, 2\pi)$  [3] Koordinatsystem:  
 $x = 3 + r \cos \theta, y = 2 + r \sin \theta$ . Beskrivelse:  $r \in [0, 2], \theta \in$   
 $[0, 2\pi]$  [4]  $\theta \in [0, 2\pi], r \in [0, \theta]$  [5]  $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ ,  
 $r \in [0, 2 \cos \theta]$  [6] a) Koordinatsystem:  $x = 1 + \rho \sin \phi \cos \theta$ ,  
 $y = 2 + \rho \sin \phi \sin \theta, z = 1 + \rho \cos \phi$ . Beskrivelse:  $\rho \in [0, 1]$ ,  
 $\theta \in [0, 2\pi], \phi \in [0, \pi]$  b) Koordinatsystem:  $x = r \cos \theta$ ,  
 $y = y, z = r \sin \theta$ . Beskrivelse:  $r \in [0, 2], \theta \in [0, 2\pi], y \in$   
 $\mathbf{R}$  c) Koordinatsystem:  $x = x, y = r \cos \theta, z = r \sin \theta$ .  
 Beskrivelse:  $r \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi], x \in [0, 5]$  [7]  $\theta \in [0, 2\pi]$ ,  
 $r \in [0, 1 - \cos \theta]$  [9]  $\theta \in [0, 2\pi], \phi \in [0, \pi], \rho \in [0, 4 \sin \phi]$

### Seksjon 5.6

**Blandede oppgaver til kapittel 5** [1] a)  $x = R \cos \beta \cos \alpha$ ,  
 $y = -R \cos \beta \sin \alpha, z = R \sin \beta$  d)  $\approx 558$  mil

### Seksjon 6.5

**Seksjon 6.6** [1] a)  $J_U(1, 1, 1) = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ,

$$J_G(U(1, 1, 1)) = J_G(1, 1) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

b)  $J_F(1, 1, 1) = \begin{bmatrix} 10 & 4 & 4 \\ 18 & 9 & 9 \end{bmatrix}$  [4] b) 400

**Seksjon 6.8** [3] a) Hastighetsvektor  $\mathbf{v}(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$ .  
 Fart  $\sqrt{2}$ . b)  $\mathbf{T}(\pi) = (0, -1, 1)/\sqrt{2}$ . c)  $\mathbf{a}(t) =$   
 $(-\cos t, -\sin t, 0)$ ,  $\mathbf{a}(\pi) = (1, 0, 0)$ .

**Seksjon 6.9** [1]  $x = u, y = v, z = 1 - u^2 - v^2$ , dvs.  $\mathbf{r}(u, v) =$   
 $(u, v, 1 - u^2 - v^2)$ . Parameterområde:  $u^2 + v^2 \leq 1$ . Alternativ,  
 mer elegant løsning:  $\mathbf{r}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, 1 - r^2), r \in [0, 1]$ ,  
 $\theta \in [0, 2\pi)$  [2]  $\mathbf{r} = (2 \sin \phi \cos \theta, 2 \sin \phi \sin \theta, 2 \cos \phi)$ ,

parameterområde  $\theta \in [0, 2\pi)$ ,  $\phi \in [0, \pi]$  [3]  $\mathbf{r}(u, v) = (u, v, \frac{1}{5}(u + 3v - 1))$ , parameterområde  $u^2 + v^2 \leq 4$  [4]  
 $\mathbf{r}(u, v) = (u, 2 + u^2 + v^2, v)$ , p.område  $u^2 + v^2 \leq 1$  [5]  
 $\mathbf{r}(u, v) = (\cos u, v, (1/2) \sin u)$ , p.område  $u \in [0, 2\pi)$ ,  $v \in [-1, 1]$  [6]  $\mathbf{r}(u, v) = (\sqrt{u^2 + v^2}, u, v)$ , p.område  $u \in [-1, 1]$ ,  $v \in [-1, 1]$  [7]  $\mathbf{r}(\theta, u) = (\cos \theta, 1 + \sin \theta, u)$ , p.område  $\theta \in [0, 2\pi)$ ,  $u \in [-1, 0]$  [8]  $\mathbf{N} = (\cos u, \sin u, 0)$ . Tangentplanet kan f.eks. parametriseres ved

$\mathbf{L}(u, v) = (1, u, v)$

[9]  $\mathbf{N} = (-\partial f/\partial u(a, b), -\partial f/\partial v(a, b), 1)$

[12] c)  $\partial \mathbf{r}/\partial u(\pi/4, 2) = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$ ,

$\partial \mathbf{r}/\partial v(\pi/4, 2) = (0, 0, 1)$ . Vi ser at

$\partial \mathbf{r}/\partial u(\pi/4, 2) = s'(\pi/4)$  og  $\partial \mathbf{r}/\partial v(\pi/4, 2) = h'(2)$ .

**Seksjon 6.10**

**Seksjon 6.11** [2]  $df/dx = [\frac{\pi}{2} \cos(\frac{\pi}{2}x) - 2xy^3]/(3x^2y^2)$ ,  $f'(1) = -2/3$ . Tangentlinjen:  $y - 1 = (-2/3)(x - 1)$  [3]  
 b) 0 [4] a)  $\nabla f = (3x^2yz^3, x^3z^3, 3x^3yz^2 + 5z^4)$  b)  $\partial f/\partial x = -3x^2yz/(3x^3y + 5z^2)$ ,  $\partial f/\partial y = -x^3z/(3x^3y + 5z^2)$   
 c) I motsatt retning av gradienten, dvs. i retning (3, 7)

**Blandede oppgaver til kapittel 6** [1] (0, 0) eneste stasjonære punkt

**Seksjon 7.1** [1] a) Ikke innhold 0 b) Innhold 0

**Seksjon 7.2** [1] 8 [2] 32/3 [3] 212/21 [4] 4/5  
 [5] a) Standardkoordinater:  $x \in [0, 1]$ ,  $y \in [0, 2x]$  b) 8/15 [6]  
 a) Standardkoordinater:  $x \in [-2, 2]$ ,  $y \in [x^2 - 4, 0]$  b) 128/7  
 [7] a) Standardkoordinater:  $y \in [-4, 1]$ ,  $x \in [3y, 4 - y^2]$  b) 1125/8 [8] a) Polarkoordinater:  $r \in [0, 2]$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$  b)  $4\pi$  [9] a) Polarkoordinater:  $\theta \in [0, \pi/4]$ ,  $r \in [0, 2 - \cos \theta]$  b)  $5\pi/8 + 1/8 - \sqrt{2}$  [10] a) Standardkoordinater:  $y \in [-1, 1]$ ,  $x \in [1 - y^2, 2 - 2y^2]$  b) 8/105 [11]  $\pi R^2$  [12]  $\pi$  [13]  $\pi ab$  [14]  $2\pi/3 - \sqrt{3}/2$  [15]  $2000\pi k/3$  [16]  $\frac{1}{2}(1 - e^{-1})$  [17] 11/12 [18] 128/15 [19]  $\pi/2$  [20]  $2\pi(8/3 - \sqrt{3})$

**Seksjon 7.3** [1] 9/8 [2] 0 [3] 3/20 [4] a) Standardkoordinater:  $z \in [0, 1]$ ,  $x \in [0, 1]$ ,  $y \in [0, x]$  b) 1/16  
 [5] a) Standardkoordinater:  $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ ,  $y \in [x^2, 4 - x^2]$ ,  $z \in [0, y]$  b)  $2752\sqrt{2}/105$  [6] a) Sylindkoordinater:  $\theta \in [0, 2\pi]$ ,  $r \in [0, 1]$ ,  $z \in [0, 1 - r^2]$  b)  $\pi/6$  [7]  $\pi/2$  [8]

Sylinderkrd:  $\int_0^1 (\int_0^{2\pi} (\int_{1-r^2}^{\sqrt{1-r^2}} rdz) d\theta) dr = \pi/6$

[9] Sylindkoordinater:

$\int_0^2 (\int_0^{2\pi} (\int_0^{\cos \theta + r \sin \theta + 5} rdz) d\theta) dr = 20\pi$

[10] Kulekoordinater:

$\int_1^2 (\int_0^{\pi/4} (\int_0^{2\pi} \rho^2 \sin \phi d\theta) d\phi) d\rho = \frac{14\pi}{3}(1 - 1/\sqrt{2})$

[11]  $51\pi/2$  [12] Sylindkoordinater:

$2 \int_0^{\pi/2} (\int_0^{2 \cos \theta} (\int_0^r rdz) dr) d\theta = 40/(9\sqrt{2})$

[13]  $(4/3)\pi abc$  [14]  $\pi kR^4$

**Seksjon 7.4** [1]  $16\sqrt{5}/3$  [2]  $5 \sin 2$  [3] 4 [4] 0 [5]  $\frac{5}{2}\sqrt{14}$  [6]  $4\sqrt{6}$  [7] 0 [8] a)  $\mathbf{r}(t) = (t, 2t^2 + 1, 2t^2 + 1)$ ,  $t \in [0, 1]$  b)  $(33^{3/2} - 1)/96$  [9] a)  $\mathbf{r} = (3 \cos t, 4 \cos t, 5 \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi)$  b)  $45\pi$  [10] a)  $C_1: \mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ ,  $t \in [0, \pi]$ .  $C_2: \mathbf{r}(t) = (t, 0, 0)$ ,  $t \in [-1, 1]$  b) 2 [11]  $2\pi R$  [12]  $2\sqrt{2}\pi$  [15]  $3\pi$

**Seksjon 7.5** [1]  $16/\sqrt{6}$  [2]  $\frac{1}{12}(6^{3/2} - 2^{3/2})$   
 [3]  $(\pi/240)(100\sqrt{5} + 4)$  [4]  $(31\pi/4)\sqrt{26}$  [5] 0 [6]  $10/3$  [7]  $\pi\sqrt{14}$  [8]  $4\pi r^2$  [9]  $\sqrt{2}\pi$  [10]  $\pi abh$  [11]  $\pi[\ln(1 + \sqrt{2}) + 1]$

**Seksjon 7.6** [1] a) Hvis  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$  og  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ , så er volumet absoluttverdien av determinanten

$a_1$	$b_1$	$c_1$
$a_2$	$b_2$	$c_2$
$a_3$	$b_3$	$c_3$

**Blandede oppgaver til kapittel 7** [5]  $2\pi(\ln 2 + 23/32)$  [7]  $2\pi(15/16 + \ln 2)$

**Seksjon 8.1** [1] [2] [3] a)  $\nabla f = (2xy + 5, x^2)$  b)  $\nabla f = [-1, 2, 3]$  [4]  $\text{div } F = 2xy + 5$  [5] [5]  $\text{curl } \mathbf{F} = [xz - 2z, -yz, -x^3]$ ,  $\text{div } \mathbf{F} = 3x^2y + 1 + xy$ ,  $\text{curl } \mathbf{F}(1, 2, -1) = [1, 2, -1]$ ,  $\text{div } \mathbf{F}(1, 2, -1) = 9$  [5]  $\text{curl } \mathbf{F} = [0, -\cos x, 0]$ ,  $\text{div } \mathbf{F} = -\sin x + \cos y$ ,  $\text{curl } \mathbf{F}(1, 2, -1) = [0, -\cos 2, 0]$ ,  $\text{div } \mathbf{F}(1, 2, -1) = -\sin 1 + \cos 2$  [6]  $66/35$  [7]  $\pi$  [8]  $5/6$  [9]  $2\pi + 2\pi^2$  [10] 0 [11]  $\pi$  [12]  $4\pi$  [13]  $\pi/4$  [14]  $2\pi$

**Seksjon 8.2** [1] 0 [2] -10 [3]  $3\pi/4$  [4] 0 [5]  $224/15$  [7] a) Området  $R$  kan deles opp i to standardområder ved å kutte langs  $y$ -aksen, for  $y \in [1, 2]$  b) 0 [8] b)  $3\pi/8$  [9]  $\pi R^2$  [11] [11]  $3/2$  [12] 0

**Seksjon 8.3** [1] 0 [2]  $8\pi/3$  [3] 16 [4]  $4\pi$  [10] 4 [14]  $4\pi$  [15] 0

**Seksjon 8.4** [1]  $16\pi$  [2]  $18\pi$  [3]  $-1/2$  [4] 0 [5] 0 [6] 0 [7] Arealet:  $\sqrt{2}\pi$ . Arbeidet:  $\pi$  [11]  $2\pi$

**Seksjon 8.5** [1] 0 [2]  $\mathbf{F} = (2xy^2z^2, 2x^2yz^2, 2x^2y^2z)$   
 [3] a)  $f(x, y) = x^3 + y^2$  er en potensialfunksjon for  $\mathbf{F}$  b) -2 [4] a)  $\text{curl } \mathbf{F} = \mathbf{0}$  b) 0 [6] a) Ikke konservativt b) Fins ingen [7] a) Konservativt b)  $f(x, y) = x^2y^2$  [8] a) Konservativt b)  $f(x, y) = \sin x + \sin y$  [9] a) Konservativt b)  $f(x, y) = -\frac{1}{2}(1 + x^2 + y^2)^{-1}$  [10] a) Konservativt b)  $f(x, y, z) = \sin(xy) + z^2y$  [11] a) Ikke konservativt b) Fins ingen [12] a) Konservativt b)  $f(x, y, z) = xy^4 + xz + 5y$  [13] 8 [14]  $f(x, y, z) = x + xy + xz^2$  er en potensialfunksjon [17] b)  $\mathbf{G}(x, y, z) = (-y^2z - y + xy^2, -2xyz, 0)$  [18] Resultatet følger ikke [19] b)  $2\pi$

**Blandede oppgaver til kapittel 8**Potensialfunksjon:  $f(x, y, z) = \gamma M/r$ 

[6] a) Nei b)

**Seksjon 9.1** [1] a) Ja b) Nei c) Nei d) Ja e) Nei  
 f) Ja g) Ja h) Ja i) Nei [2] a) Nei b) Nei c) Nei  
 [3] a) Ja b) Ja c) Ja d) Nei e) Nei f) Ja [7] Ja,  
 den blir et vektorrom. [8] a) Ja b) Nei c) Ja d) Ja  
 e) Nei [10] a) Ja b) Nei [11]  $\{p(x), q(x), x^2\}$

**Seksjon 9.2** [1] a) Ja b) Ja c) Nei d) Ja

**Seksjon 9.3** [1] a)  $\ker(T) = \{(x, y, z) \mid x = y = 0\}$ ,  $R(T) = \mathbf{R}^2$ ,  $T$  er ikke injektiv og ikke inverterbar, men surjektiv. Vi har  $\dim \ker(T) = 1$  og  $\dim R(T) = 2$ . b)  $\ker(T) = \{0\}$  (dvs. kjernen består av kun nullfunksjonen),  $R(T) = P_\infty$ ,  $T$  er injektiv, surjektiv, inverterbar. Vi har  $\dim \ker(T) = 0$  og  $\dim R(T) = \infty$ . c)  $\ker(T) = \{(0, 0)\}$ ,  $R(T) = \{(x, y, z) \mid z = 0\}$ ,  $T$  er injektiv, ikke surjektiv, ikke inverterbar. Vi har  $\dim \ker(T) = 0$  og  $\dim R(T) = 2$ . d)  $\ker(T) = \{f \mid f \text{ har grad } 0\}$ , ikke injektiv og ikke inverterbar, men surjektiv. Vi har  $\dim \ker(T) = 1$  og  $\dim R(T) = \infty$ . e)  $\ker(T) = \{f \mid f \text{ har grad } 0\}$ , ikke injektiv, ikke surjektiv, ikke inverterbar. Vi har  $\dim \ker(T) = 1$  og  $\dim R(T) = 3$ . [3] b) De er samme sak [4] b) Delpunktene refererer til oppgave 10.2.2: a)  $\mathbf{x} = (5, 1)$  b)  $\mathbf{x} = (-2, -1, 0, 0, 0) + c_1(-15, 6, 1, 0, 0) + c_2(3, 1, 0, 1, 0) + c_3(-25/2, -11/2, 0, 0, 1)$  c)  $\mathbf{x} = (1, 0, 0, -1, 2) + c_1(-5, 1, 0, 0, 0) + c_2(1, 0, 1, 0, 0)$  d) Ingen løsning e)  $\mathbf{x} = (3, 0, 0) + c_1(-2, -2, 1)$ . [5] a)  $\{(-3, -5, -4, 1)\}$  b)  $\{(-15, 6, 1, 0, 0), (3, 1, 0, 1, 0), (-25/2, -11/2, 0, 0, 1)\}$  c)  $\{(-5, 1, 0, 0, 0), (1, 0, 1, 0, 0)\}$  [6]  $\{(-34, 4, -11)\}$  [7] b) Kjernens dim. er 2 i alle tilfellene. Resten må puttes inn. c) Må puttes inn.

**Seksjon 9.4** [1]  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  [2] b) Vi har  $[T(1)]'_B = [x]'_B = [0, 1, 0, 0]$ ,  $[T(x)]'_B = [x^2]'_B = [0, 0, 1, 0]$  og

$[T(x^2)]'_B = [x^3]'_B = [0, 0, 0, 1]$ . Ergo blir  $[T]_{B'}^B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

[3] a)  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ , b)  $T^{-1}(\{0\})$  er mengden av alle konstante funksjoner i  $P_3$ , altså alle funksjoner på forem  $f(x) = c$ .  $T$  er ikke inverterbar. c)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  d)  $[T]_{B'}^{B'} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$ ,

$$[T^2]_{B'}^{B'} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e) \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad [6] \quad b) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Seksjon 9.5** [1] a)  $[id]_{std}^{std} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  b)

$$[id]_B^{std} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad [2] \quad \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$b) \begin{bmatrix} -40 & 24 & -15 \\ 13 & 8 & 5 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

**Seksjon 9.6** [1] a) Basis  $\{[-3, 1]\}$  for egenrommet med egenverdi  $\lambda_1 = 9$ , basis  $\{[1, 2]\}$  for egenrommet med egenverdi  $\lambda_2 = 2$  d) Basis  $\{[1, 0], [0, 1]\}$  for egenverdien  $\lambda = 2$ . [2] Basis  $\{[1, 0, 0]\}$  for egenrommet med egenverdi  $\lambda_1 = -5$ , basis  $\{[0, 1, 0], [0, 0, 1]\}$  for egenrommet med egenverdi  $\lambda_2 = 1$ . Dimensjoner: 1 og 2. [3]  $p(\lambda) = \lambda^2 - 9\lambda + 18$ . Karakteristiske røtter 6 og 3. [4] Egenverdi  $\lambda_1 = -6$  med egenbasis  $\{2+3x-x^2\}$ , egenverdi  $\lambda_2 = -2$  med egenbasis  $\{1-x\}$ , egenverdi  $\lambda_3 = 2$  med egenbasis  $\{x-x^2\}$ . a) Alle funksjoner på formen  $f(t) = ce^{\lambda t}$  er egenvektorer for  $T$  med egenverdi  $\lambda$ . [6] Ingen egenvektorer og egenverdier.

**Seksjon 9.7** [3] Ingen andre matriser enn den selv. [5]  $\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

**Seksjon 9.8** [1] a)  $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ,

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}. \quad b) M^n = C \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1/2)^n \end{bmatrix} \cdot C^{-1},$$

regn ut. (Putte inn.) c) Se studenteksemplet. [2] a)

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix}. \quad \text{Putt inn resten.} \quad [3] \quad a)$$

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad \text{Putt inn resten.} \quad [4]$$

Ta for eksempel matrisen fra oppgaven om kattekolonien. [5]  $B = \{2+3x-x^2, 1-x, x-x^2\}$ .

**Seksjon 9.9** [1]  $x(t) = 2e^{5t} - e^{2t}$ ,  $y(t) = e^{5t} - 4e^{2t}$ . [2]  $x(t) = 2e^{5t} - e^{-2t} + 3$ ,  $y(t) = e^{5t} - 4e^{-2t} + 5$ . [3] Må fylles inn. [4] Må fylles inn [5] Må fylles inn. [6] a) Må fylles inn. b) Må fylles inn. [7] a) Må fylles inn b) Må fylles inn



**Seksjon 9.10** [2]  $y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 e^{-t} + (3/2)t + 3/4$

**Seksjon 10.1** [1] a) Nei, I4 holder ikke b) Ja  
 [2] d)  $-1/12$ . e)  $\sqrt{8/15}$  og  $\sqrt{1/7}$ . f)  $\sqrt{59/70}$ . g)  $\arccos(-(1/12)/\sqrt{8/105}) \approx 107^\circ$  [3] a) Nei, I4 holder ikke.  
 b) Ja [9] b)  $1/2$

**Seksjon 10.2** [1]  $\{[1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}], [-2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}], [0, -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]\}$   
 [2]  $\{[1, 0, 1]/\sqrt{2}, [0, 1, 0]\}$  [3]  $\{[1/3, 2/3, 0, 2/3], [4, -1, 3, -1]/\sqrt{27}, [-2, -4, 3, 5]/\sqrt{54}\}$  [4] Fikse

**Seksjon 10.3** [1] a)  $[3, 0, 0]$  b)  $[12/7, -6/7, 18/7]$   
 [2]  $\mathbf{v}_U = [1, 3, 0]$ ,  $\mathbf{v}_{U^\perp} = [0, 0, 5]$ . [3]  $\mathbf{v}_U = [-2, 0]$ ,  
 $\mathbf{v}_{U^\perp} = [0, -1]$ . [4] a)  $\mathbf{v}_U = \mathbf{v}$ ,  $\mathbf{v}_{U^\perp} = \mathbf{0}$  b)  
 $\mathbf{v}_U = [8/3, 2/3, 10/3]$ ,  $\mathbf{v}_{U^\perp} = [7/3, 7/3, -7/3]$  c)  $\mathbf{v}_U = \mathbf{0}$ ,  
 $\mathbf{v}_{U^\perp} = \mathbf{v}$  [5]  $[-1, 3, -1]$  [6] a)  $(4/3)x^2$  b)  $(1/12)(x-1)$   
 [7]  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

**Seksjon 10.4** [1] a) Fordi  $M$  er symmetrisk. b)  
 $\{2^{-1/2}[-1, 1, 0], 6^{-1/2}[-1, -1, 2], 3^{-1/2}[1, 1, 1]\}$

**Seksjon 10.5** [7]  $\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

**Seksjon 10.6** [1] Alle punkter  $(x, y)$  på linjen  $x + y = 1/2$ .  
 [2] a)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  d) Tilærmet løsning  $\mathbf{r} = (x, y) = (1, 0)$ .  
 Denne er entydig. Vi har  $\mathbf{A}\mathbf{r} = (1, 1, 0)$ , og dette er projeksjonen  
 av  $(2, 0, 0)$  på bildet til  $A$ . [3] Du får den eksakte løsningen  
 $(x, y) = (2, 1)$ .

**Seksjon 10.7** [2]  $y = (1/2)x + 2$ . I dette tilfellet er samlet  
 kvadratavvik 0, fordi de gitte datapunktene ligger på en rett linje.  
 [3]

**Seksjon 10.8** [1] a)  $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$  b)  $\begin{bmatrix} \pi & -3/2 \\ -3/2 & -8 \end{bmatrix}$   
 [2] a)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  b)  $\begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 0 & 3/2 \\ 1 & 3/2 & 0 \end{bmatrix}$

[3] a) Ellipse b) Hyperbel c) Ellipse d) Hyperbel e)  
 Parabel

**Seksjon 11.1** [1] b)  $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ . Dimensjonen er 4. [2] a) Ja b) Nei c) Ja  
 [3] Må puttes inn. [4] Egenverdi  $\lambda_1 = \cos \theta + i \sin \theta$  med  
 egenbasis  $\{[i, 1]\}$ , egenverdi  $\lambda_2 = \cos \theta - i \sin \theta$  med egenbasis  
 $\{[1, i]\}$ . [5] c) Alle er  $-1$  d) 1 og  $-1$  for alle tre e)  
 $M = \frac{1}{2}(q+r)\sigma_1 + \frac{i}{2}(q-r)\sigma_2 + \frac{1}{2}(p-s)\sigma_3 + \frac{1}{2}(p-s)I$  [7]

a)  $A = \begin{bmatrix} 50 & -1 \\ 1 & 50 \end{bmatrix}$  d) Omtrent 78 uker

**Seksjon 11.2** [1] a) Må fylles inn. [2] a) Ja b) Nei

[4] a)  $\begin{bmatrix} 1 & 2+i \\ -5i & 6-6i \end{bmatrix}$  b)  $\begin{bmatrix} 1 & i & i \\ i & i & 1 \\ 1 & i & i \end{bmatrix}$

[5]  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

**Seksjon 11.3** [1] a)  $\begin{bmatrix} 1 & -i \\ 2-i & 5-i \end{bmatrix}$ , nei b)  $\begin{bmatrix} -i & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$ , nei c)  
 $\begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$ , ja d)  $\begin{bmatrix} 5 & 2+3i \\ 2-3i & 7 \end{bmatrix}$ , ja [2] Nei [3] a) Ja b)  
 Ja c) Ja d) Ja [6] Determinantene er henholdsvis  $1, i, i$  og  
 $1$ . De inverse er matrisenes konjugert-transponerte. [7] Siden  
 matrisene er unitære, utgjør søylevektorene deres en ortonormal  
 egenbasis. [8] a) Fordi  $M$  er Hermitisk.  
 b)  $\{2^{-1/2}[i, 0, 1], 2^{-1/2}[-i, 0, 1], [0, 1, 0]\}$

**Seksjon 11.4** [2] a) Må fylles inn.

**Seksjon 11.5** [1] Må fylles inn [2] Må fylles inn [3]  
 a) Må fylles inn b) Må fylles inn [4] a)  $x(t) = r \cos t$ ,  
 $y(t) = r \sin t$ . [5]

**Seksjon 11.6** [1] Tegn figur.





# Stikkord

---

Abels teorem 157  
absolutt konvergens 129  
additiv invers 8  
adjungert transformasjon 400  
Akkilles og skilpadden 103  
aksiomatisk metode 3  
aksiom 3  
algebraisk multiplisitet 328  
alternerende rekke-testen 130  
alternerende rekke 130  
annenderivert 30  
arbeid 267  
areal av flate 251  
asymptote, skrå 86  
avstand 12  
avstand 61  
basis 61  
begrenset mengde 172  
beskrivelse av et område 175  
betinget konvergens 129  
bevismetoder 2  
bevisstandard 2  
bevis 2  
breddegrader 178  
brennpunkt for ellipse 98  
brennpunkt for hyperbler 98  
brennpunkt for parabel 98  
buelengde 201  
Cauchy's middelverditheorem 29  
cosinus hyperbolicus 76  
cotangens hyperbolicus 76  
curl 266  
definisjoner 2  
delbrøkkoppspalting 114  
derivert 26  
desimaler 4  
diagonaliserbarhet 333  
divergens av følger 122  
divergens av integral 90  
divergens av rekker 124  
divergensteoremet 277  
divergens 265  
egenrom 326  
eksentrisitet 103  
eksponent 9  
ekstremverdisetningen for flere variable 182  
ekstremverdisetningen 26  
ellipse 94  
ellipsoide 167  
endeligdimensjonalt vektorrom 302  
enkeltsammenhengende 295  
euklidisk indreprodukt 387  
fasediagram 406  
fasekurver 406  
flateintegral 250  
fluks 269  
forholdstesten 131  
forventning 70  
Fubini's teorem 254  
fullstendig kvadrat 96  
Gabriels horn 103  
gameshow 71  
generisk delmengde 227  
geometrisk multiplisitet 328  
geometrisk rekke 124  
glatt flate 209  
gradientfelt 265  
Gram-Schmidt-prosessen 352  
gravitasjonsfelt 296  
Greens teorem 273  
grensesammenlikningstesten for integraler 93  
grensesammenlikningstesten for rekker 128  
grunntall 9  
hastighetsvektor 196

- hele tall 4  
 Hermitisk matrise 392  
 Hermitisk transformasjon 391  
 homogene likningssystemer 48  
 hyperbel 95  
 hyperbolsk substitusjon 120  
 identitetsmatrisen 57  
 implisittfunksjonsteoremet 216  
 induksjonsbevis 2  
 inhomogene likningssystemer 48  
 innhold 0 226  
 integraltesten 126  
 inversfunksjonsteoremet 195  
 inverterbar matrise 57  
 isomorfe vektorrom 317  
 iterert integral 232  
 Kafka, Franz 75  
 karakteristisk polynom 328  
 karakteristisk rot 328  
 kartesiske koordinater 163  
 kjerneregelen, generell 193  
 kjerner 310  
 koblede hastigheter 89  
 komet 103  
 kompakt mengde 172  
 kompakthetsteoremet 172  
 komplementsegenskapen for følger 122  
 komponenter i en vektor 59  
 komposisjon 19  
 konservativt vektorfelt 288  
 kontrapositivt bevis 2  
 konvergens av følger 122  
 konvergens av integral 90  
 konvergens av rekker 124  
 konvergensintervall 144  
 konvergensradius 144  
 koordinatskifteteoremet 256  
 koordinatsystem 173  
 koordinattransformasjon 173  
 koordinatvektor 316  
 krumning 202  
 kulekoordinater 169  
 kurveintegral 247  
 kvadratisk form 377  
 kvadratrot 11  
 l'Hôpitals regel 80  
 Lagrange, Joseph Louis 179  
 Lagrange-metoden 219  
 Laplace-operatoren 282  
 Laplacelikningen 282  
 lengde av graf 43  
 lengde av kurve 248  
 lengdegrader 178  
 lineærkombinasjon 61  
 lineært avhengig 61  
 lineærtilnærming 191  
 Lotka-Volterras system 406  
 Lotto 67  
 lukket kule 170  
 lukket rektangel 170  
 maskevidde 223  
 masse 238  
 masse 240  
 masse 248  
 masse 251  
 matematisk logikk 3  
 middelverditeoremet 29  
 multiplikativ invers 8  
 naturlige tall 4  
 negative tall 4  
 Newtons metode 88  
 nivåflate 180  
 nivåkurve 180  
 nivåmengde 180  
 normal transformasjon 400  
 norm 388  
 nullmeridianen 178  
 nullpotent matrise 305  
 ordnet utvalg 66  
 ortogonal basis 350  
 ortogonal lineærtransformasjon 365  
 ortogonalt komplement 356  
 ortonormal basis 350  
 osculerende sirkel 204  
 overgangsmatrise 324  
 parabel 95  
 parabolantenne 101  
 partiell differensiallikning 282  
 Pauli-matrisene 385  
 plan 61  
 positive tall 4  
 prinspalakseteoremet 375  
 produkt av mengder 12  
 projeksjon 355  
 projeksjon 358  
 QR-faktorisering 354  
 rang 61  
 rekkevidde 310

- rekursjonsformel 119
- relativitetsteorien 158
- renormalisering 158
- restledd 138
- retningsderivert 211
- Rolles teorem 29
- rot-testen 133
- sammenlikningstesten for integraler 92
- sammenlikningstesten for rekker 127
- sammensatt funksjon 18
- sammensetning 19
- sannsynlighet 68
- sfære 166
- similære matriser 330
- sinus hyperbolicus 76
- sirkel 45
- skalarfunksjon 186
- skalar 186
- skjev-Hermitisk matrise 403
- skjæringssetningen 25
- spinn 385
- standardbasisvektor 61
- Stokes' teorem 284
- stringent 3
- stykkevis glatt flate 210
- stykkevis glatt kurve 198
- styrelinje 103
- sylinderkoordinater 168
- sylinder 165
- symmetrisk transformasjon 362
- tangens hyperbolicus 76
- tangentlinje 197
- tangentplan 192
- tangentplan 209
- tangentvektor 198
- Taylorpolynom 137
- Taylorrekke 136
- Taylor's formel 138
- teoremer 2
- totalderivert 189
- transponert matrise 58
- trapesmetoden 40
- tredjerot 10
- trekantulikheten 9
- trekant 13
- trevektorproduktet 61
- trigonometriske substitusjoner 110
- tyngdepunkt 260
- uekte integraler 90
- uendeligdimensjonalt vektorrom 302
- underrom 61
- unitær matrise 395
- unitær transformasjon 394
- uordnet utvalg 66
- vektorfunksjon 186
- vektorproduktet 61
- vektorrom 298
- vinkel mellom vektorer 61
- volumproduktet 61
- åpen kule 170
- åpent rektangel 170

