Plenum 19-10-12

7.4: 9, 10

7.5: 5, 7, 15

8.2: 1, 5

8.3: 1 b), d), f), g), 3 d), e), 5, 8

7.4: Omvendte funksjoner

9) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ er en kont, injektiv funksjon.

Påstand: f er strengt monoton.

Injektiv betyr: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Anta for motsigelse at $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ er kont. og injektiv, men ikke strengt monoton. Da må det enten finnes

1) $x_1 < x_2$ s.a. $f(x_1) = f(x_2)$ eller

(vokser, og så avtar)

2) $x_1 < x_2 < x_3$ s.a. $f(x_1) < f(x_2)$, $f(x_3) < f(x_2)$

eller 3) $x_1 < x_2 < x_3$ s.a. $f(x_1) > f(x_2)$, $f(x_3) > f(x_2)$.

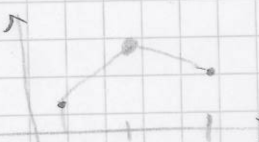
(NB: I alle tilfeller er $x_1, x_2, x_3 \in [a,b]$)

(avtar, og så vokser)

Vi ser på tilfellene separat:

1) Her er det opplagt at f ikke er injektiv, så vi har en motsigelse, og dermed er påstanden OK.

2) Anta $f(x_1) < f(x_3)$ (hvis det er omvendt lar vi x_1 og x_3 bytte roller).



Se på funksjonen $g(x) := f(x) - f(x_3)$.

Da er g kontinuerlig, og $g : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$.

Merk at $g(x_1) = f(x_1) - f(x_3) < 0$ og

$g(x_2) = f(x_2) - f(x_3) > 0$ (Fra antagelser)

Fra skjæringssetningen fins da en $c \in (x_1, x_2)$ s.a.
$g(c) = 0$, dvs. $f(c) = f(x_3)$.

Men dette betyr at $\exists\ c \neq x_3$ ($\in [a, b]$, siden
$c \in (x_1, x_2)$, $x_3 > x_2$) s.a. $f(c) = f(x_3)$, men
dette motsier at f er injektiv. Dermed har vi
en motsigelse, og påstanden er OK.

3): Tilsvarende som 2).

10.) Vis at $f(x) = x e^{\frac{(1-x^2)}{2}}$ er injektiv på $[-1, 1]$:

Prøver å derivere for å se om f er strengt voksende eller avtagende:

$$f'(x) = e^{\frac{1-x^2}{2}} + x e^{\frac{1-x^2}{2}} \frac{-2x}{2}$$
$$= e^{\frac{1-x^2}{2}} - x^2 e^{\frac{1-x^2}{2}}$$
$$= \underbrace{e^{\frac{1-x^2}{2}}}_{>0} \underbrace{(1-x^2)}_{\geq 0}$$

≥ 0 for $x \in [-1, 1]$ og
0 bare i endepunktene

$\Downarrow$

f er strengt voksende på
$[-1, 1] \Rightarrow f$ er injektiv på $[-1, 1]$.

Finn def. området til den omvendte funksjonen g:

$$D_g = V_f = \{f(x) : x \in [-1, 1]\} = \{x e^{\frac{1-x^2}{2}} : x \in [-1, 1]\}$$
$$= [-1, 1]$$

$\boxed{\text{Def. 7.4.2}}$

f er kont. og strengt voksende:
$f(-1) = -1$, $f(1) = 1$