1.3: Komplekse n-tupler

1.) $s\vec{x} + t\vec{y}$: $s = i$, $t = 1 + 2i$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} -4i \\ 2-i \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} 2+i \\ 2i \end{pmatrix}$

$$s\vec{x} + t\vec{y} = i\begin{pmatrix} -4i \\ 2-i \end{pmatrix} + (1+2i)\begin{pmatrix} 2+i \\ 2i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 2i+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cancel{2} + i + 4i - \cancel{2} \\ 2i - 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 + 5i \\ 2i + 1 + 2i - 4 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 4+5i \\ 4i - 3 \end{pmatrix}}}$$

3.) $\vec{x} \cdot \vec{y} = (1+3i, -2i, 2+3i) \cdot (2, 1+2i, -1+i)$

$= (1+3i)2 + (-2i)(1+2i) + (2+3i)(-1+i)$

$= 2 + 6i - \cancel{2i} + 4 - 2 + \cancel{2i} - 3i - 3 = \underline{\underline{1 + 3i}}$

4) Vis: $\forall\ \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n$

$$|\vec{x} - \vec{y}|^2 = |\vec{x}|^2 - 2\,\mathrm{Re}(x \cdot y) + |y|^2:$$

$$|\vec{x} - \vec{y}|^2 = (\vec{x} - \vec{y}) \cdot (\vec{x} - \vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{x} - \vec{x} \cdot \vec{y} - \vec{y} \cdot \vec{x} + \vec{y} \cdot \vec{y}$$

$$= |\vec{x}|^2 + |y|^2 - \vec{x} \cdot \vec{y} - \overline{\vec{x} \cdot \vec{y}}$$

kompleks konjugert

$$= |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 - 2\,\mathrm{Re}(\vec{x} \cdot \vec{y})$$

NB: $\vec{x} \cdot \vec{y} \neq \vec{y} \cdot \vec{x}$ for komplekse n-tupler (generelt)!!

Vis: $(\vec{x}+\vec{y})\cdot(\vec{x}-\vec{y}) = |\vec{x}|^2 - 2\,\mathrm{Im}(\vec{x}\cdot\vec{y}) - |\vec{y}|^2$

$$(\vec{x}+\vec{y})\cdot(\vec{x}-\vec{y}) = \vec{x}\cdot\vec{x} - \vec{x}\cdot\vec{y} + \vec{y}\cdot\vec{x} - \vec{y}\cdot\vec{y}$$

$$= |\vec{x}|^2 - |\vec{y}|^2 - \vec{x}\cdot\vec{y} + \overline{\vec{x}\cdot\vec{y}}$$

$$= |\vec{x}|^2 - |\vec{y}|^2 - 2\,\mathrm{Im}(\vec{x}\cdot\vec{y})$$

1.4: Vektorproduktet

1a) $(-1,3,2)\times(-2,1,7) =$

$$\begin{array}{cccccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 3 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 7 & -2 & 1 & 7 \end{array}$$

$\vec{i} = (1,0,0)$

$\vec{j} = (0,1,0)$

$\vec{k} = (0,0,1)$

$$-2\cdot 1\,\vec{i} - (-1)7\,\vec{j} - 3\cdot(-2)\,\vec{k} + 3\cdot 7\,\vec{i} + 2(-2)\,\vec{j} + (-1)\cdot 1\,\vec{k}$$

$$= -2(1,0,0) + 7(0,1,0) + 6(0,0,1) + 21(1,0,0) - 4(0,1,0) - 1\cdot(0,0,1)$$

$$= (-2,0,0) + (0,7,0) + (0,0,6) + (21,0,0) + (0,-4,0) + (0,0,-1)$$

$$= (19,3,5)$$

2.) Areal av parallellogram utspent av $\vec{a} = (-2,3,1)$, $b = (4,0,-2)$:

$$A = |a\times b|$$