Plenum, 18-10-13

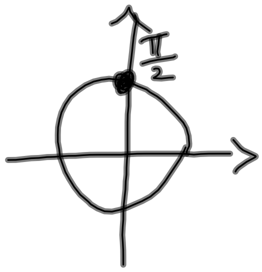
6.3: 1abcdef, 3abdeg

6.4: 3a

6.5: 5, 13

6.3: 1.) a) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{\underset{\text{L'Hôpital}}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{2\cos 2x}{1} = \underline{\underline{2}}$

d) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x} \underset{\text{"}\frac{0}{0}\text{", L'Hôpital}}{=} \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{-\sin x}{-1} = \underline{\underline{1}}$



f) $\lim_{x \to 1} \frac{\ln x - x + 1}{(x-1)^2} \underset{\text{"}\frac{0}{0}\text{", L'Hôpital}}{=} \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{2(x-1)}$

$\underset{\text{"}\frac{0}{0}\text{": L'Hôpital}}{=} \lim_{x \to 1} \frac{-\frac{1}{x^2}}{2} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$

3.) a) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 \ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}$

"$0 \cdot (-\infty)$"
Må gjøre om til "$\frac{0}{0}$" eller "$\frac{\infty}{\infty}$" for å bruke L'Hôpital

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{-2\frac{1}{x^3}}$

"$\frac{\infty}{\infty}$": L'Hôpital

$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} -\frac{1}{2}x^2 = \underline{\underline{0}}$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} - 1\right) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}}$

"$0 \cdot \infty$": Omforme til "$\frac{\infty}{\infty}$" eller "$\frac{0}{0}$" for å bruke L'Hôpital

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}\left(\cancel{-\frac{1}{x^2}}\right)}{\cancel{-\frac{1}{x^2}}}$

"$\frac{\infty}{\infty}$": L'Hôpital

$\boxed{L'H}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{2\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = \underline{\underline{0}}$

a) $\lim_{x \to 0^+} x^x = \lim_{x \to 0^+} e^{x \ln x}$

"0^0": TRIKS: Bruke logaritmer for å flytte x-avhengighet opp i eksponenten

$e^{x \ln x} = e^{\ln(x^x)} = x^x$

$= e^{\lim_{x \to 0^+} x \ln x}$ ← ?

eksponensialfunk. er kont.

M: $\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$

"$0 \cdot \infty$": Omforme til "$\frac{0}{0}$" el. "$\frac{\infty}{\infty}$" for bruk av L'Hôpital

"$\frac{\infty}{\infty}$": L'Hôpital

$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} -x = 0$

Så: $\lim_{x \to 0^+} x^x = e^{\lim_{x \to 0^+} x \ln x} = e^0 = \underline{\underline{1}}$

e) $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x}$

$= \lim_{x \to \infty} e^{x \ln\left(1 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)}$

TRIKS: Bruk logaritme for å flytte all x-avh. opp i eksponenten

$= e^{\lim_{x \to \infty} x \ln\left(1 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)}$

eksponensial-funk. er kont.

"$\infty \cdot 0$": Omforme for bruk av L'Hôpital

M: $\lim_{x \to \infty} x \ln\left(1 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln\left(1 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{\frac{1}{x}}$

$= \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{1 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cancel{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}}{\cancel{-\frac{1}{x^2}}}$

"$\frac{0}{0}$": L'Hôpital

$= \lim_{x \to \infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{1 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)} = \underline{1}$

Så: $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x} = e^{1} = \underline{\underline{e}}$

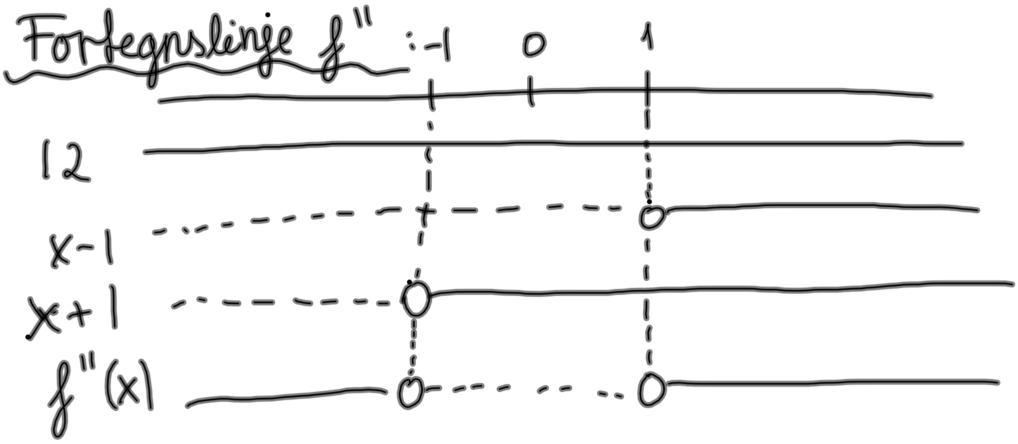
6.4: 3.) a) Konveks og konkav?

$$f(x) = x^4 - 6x^2 + 23$$

$$f'(x) = 4x^3 - 12x$$

$$f''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x^2 - 1) = 12(x+1)(x-1)$$

Fortegnslinje f'':



$f''(x) \geq 0$ for $x \in (-\infty, -1]$, så fra Setning 6.4.7 er f konveks $(-\infty, -1]$. Av samme grunn er f konveks på $[1, \infty)$. På $(-1, 1)$ er $f''(x) < 0$, så fra Setning 6.4.7 er f konkav på $(-1, 1)$.

6.5: 5.) $f(x) = \dfrac{x\ln(x^2) - 1}{\ln(x)} = \dfrac{x\,2\ln x - 1}{\ln x}$

$$= 2x - \frac{1}{\ln x}$$

$\ln x$ er kun def. for $x > 0$, og $\ln x = 0$ for $x = 1 \Rightarrow D_f = (0,\infty) \setminus \{1\} = (0,1) \cup (1,\infty)$.

f er kont. overalt hvor den er def. (sum av kont. funk.). $\Rightarrow$ Kandidater til vertikale asymptoter: $x = 0$, $x = 1$. Sjekker ensidige grenser:

$x=0$: $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(2x - \frac{1}{\ln x}\right) = \underline{0}$

Dermed har f ingen vertikal asymptote i $x = 0$.

$x=1$: $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \left(2x - \frac{1}{\ln x}\right) = \infty$

siden $\ln x < 0$ for alle $x < 1$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \left(2x - \frac{1}{\ln x}\right) = -\infty$

$\ln x > 0$ for alle $x > 1$

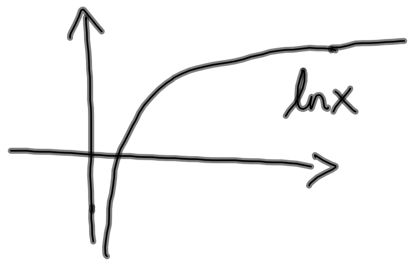
Så f har en vertikal asymptote når $x \to 1$.

Har f skrå- (eller horisontale-) asymptoter?

Bruker 6.5.5: i) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(2 - \frac{1}{x\ln x}\right)$

$= \underline{2}$

$\ln x \to \infty$
$x \to \infty$



ii) Siden grensen eksisterer, ser vi på:

$$\lim_{x\to\infty}[f(x) - 2x] = \lim_{x\to\infty}\left[\cancel{2x} - \frac{1}{\ln x} - \cancel{2x}\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln x}\right) = \underline{0}$$

Dermed er $y = 2x + 0 = 2x$ en skråasymptote for f når $x \to \infty$.

13.) $f(x) = (3x^2 - x^3)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{2}{3}}(3-x)^{\frac{1}{3}}$

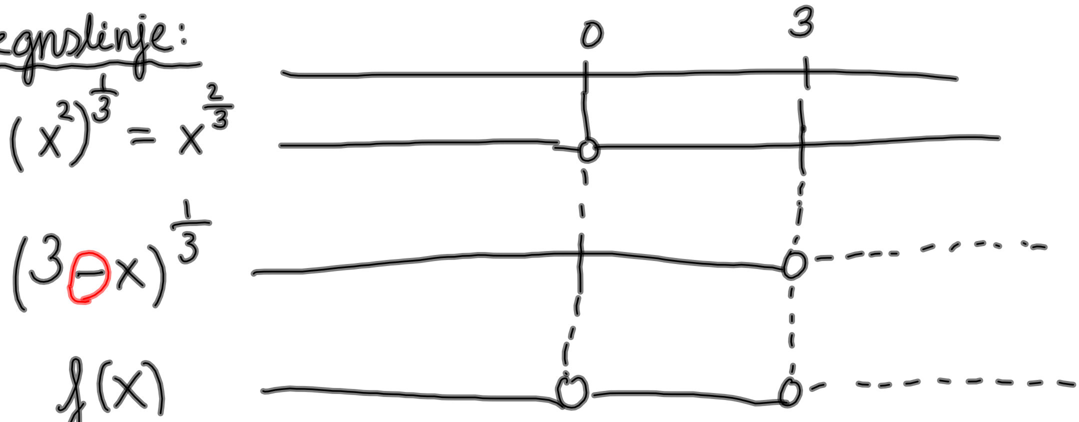
Faktoriserer ut x^2

a) Nullpunkt? Pos. & neg.?

$f(x) = 0$

$x^{\frac{2}{3}}(3-x)^{\frac{1}{3}} = 0 \Rightarrow \underline{x=0 \text{ eller } x=3}.$

Fortegnslinje:



Så $f(x) > 0$ for $x \in (-\infty, 0) \cup (0,3)$ og

$f(x) < 0$ for $\underline{\underline{x \in (3, \infty)}}$.

b) Avtagende & voksende? Ekstremalpkt.?

$$f'(x) = \frac{1}{3}\left(3x^2 - x^3\right)^{-\frac{2}{3}}\left(6x - 3x^2\right)$$

Kjerneregel

$$= x^{-\frac{1}{3}}(3-x)^{-\frac{2}{3}}(2-x)$$

Regning

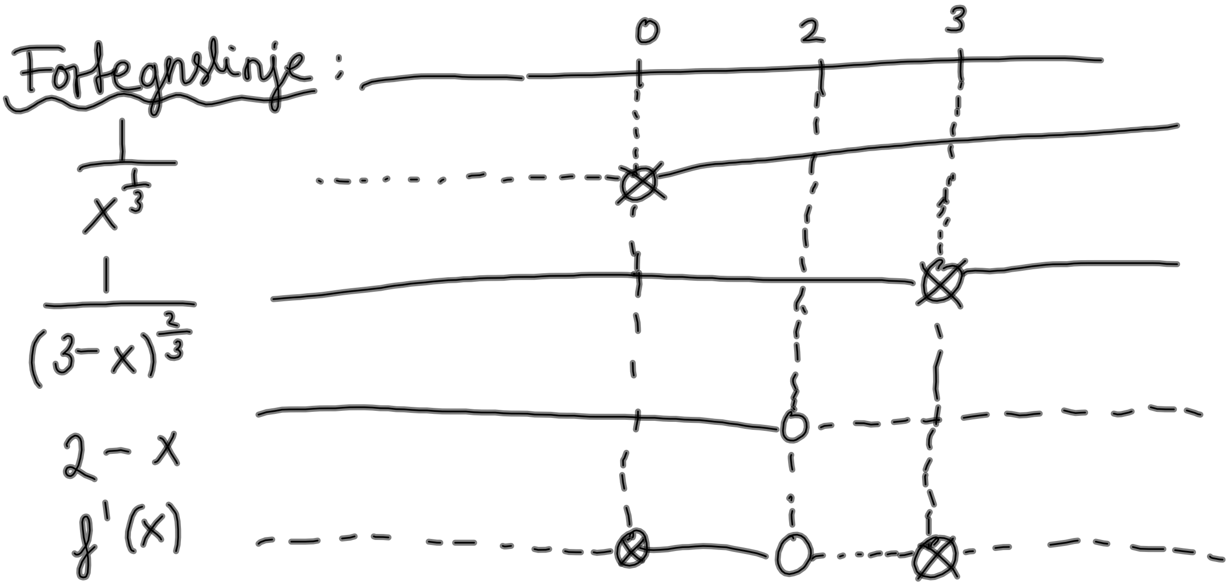
$$= \frac{2-x}{x^{\frac{1}{3}}(3-x)^{\frac{2}{3}}}$$

Ekstremalpunkt:

$$f'(x) = 0 \iff \underline{x = 2}$$

$f'(x)$ er ikke def. $\underline{x=0}$ og $\underline{x=3}$

Fortegnslinje:



$\Rightarrow f'(x) \geq 0$ for $x \in [0,2]$.

$f'(x) < 0$ for $x \in (-\infty, 0) \cup (2,3) \cup (3, \infty)$

$\Rightarrow$ f er voksende for $x \in [0,2]$ og f er avtagende <u>for $x \in$</u> $(-\infty, 0] \cup [2, \infty)$.

Punktet $x = 0$ $(y=0)$ er et lokalt minimum.

—"— $x = 2$ $(y = \sqrt[3]{4})$ er et lok. maksimum.

<u>MERK</u>: $x = 3$ er IKKE et lok. minimum, siden f avtar igjen <u>med</u> en gang.