Plenum 22/11-13

FVLA

1.1: 1, 2, 3 (b), 4 (e), 5

1.2: 1, 3, 5, 7, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 25, 27

1.3: 1, 3, 4

1.1: 3) b) Vis at for alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ er

$$(\vec{x}-\vec{y})\cdot(\vec{x}-\vec{y}) = \vec{x}\cdot\vec{x} - 2\vec{x}\cdot\vec{y} + \vec{y}\cdot\vec{y}:$$

$$(\vec{x}-\vec{y})\cdot\overbrace{(\vec{x}-\vec{y})}^{\vec{z}} = \vec{x}\cdot\vec{z} - \vec{y}\cdot\vec{z}$$

$\vec{z} := \vec{x}-\vec{y}$, Se. 1.1.1e

$$= \vec{x}\cdot(\vec{x}-\vec{y}) - \vec{y}\cdot(\vec{x}-\vec{y})$$

$\vec{x}\cdot(\vec{x}+(-\vec{y})) = \vec{x}\cdot\vec{x} + \vec{x}\cdot(-\vec{y}) = \vec{x}\cdot\vec{x} - \vec{x}\cdot\vec{y}$

$$= \vec{x}\cdot\vec{x} - \vec{x}\cdot\vec{y} - \vec{y}\cdot\vec{x} + \vec{y}\cdot\vec{y}$$

Se. 1.1.1.e

$$= \vec{x}\cdot\vec{x} - \vec{x}\cdot\vec{y} - \vec{x}\cdot\vec{y} + \vec{y}\cdot\vec{y}$$

Se. 1.1.1b

$$= \vec{x}\cdot\vec{x} - 2\vec{x}\cdot\vec{y} + \vec{y}\cdot\vec{y}$$

$\boxtimes$

4.) e) Vis: $\vec{c}\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{c}\cdot\vec{a} + \vec{c}\cdot\vec{b}$ for alle $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$:

$$\vec{c}\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = (c_1, c_2, \dots, c_n)\cdot(a_1+b_1, a_2+b_2, \dots, a_n+b_n)$$

$$= c_1(a_1+b_1) + c_2(a_2+b_2) + \dots + c_n(a_n+b_n)$$

$$= \{c_1a_1 + c_2a_2 + \dots + c_na_n\} + \{c_1b_1 + c_2b_2 + \dots + c_nb_n\}$$

$$= \vec{c}\cdot\vec{a} + \vec{c}\cdot\vec{b}$$

5.) Grossistfirma: n vareslag

m_1 enheter av 1, verdi per enhet p_1

m_2 — " — 2, — " — p_2

⋮

m_n — " — n, — " — p_n

Total verdi av varelager:

$$V_{\text{Lager}} = m_1 p_1 + m_2 p_2 + \dots + m_n p_n$$
$$= (m_1, m_2, \dots, m_n) \cdot (p_1, p_2, \dots, p_n)$$
$$:= \vec{m} \cdot \vec{p}$$

$\boxtimes$

1.2: 7.) Skriv $\vec{a} = (4,3)$ som sum av $\vec{b}$ og $\vec{c}$ der $\vec{b}$ er parallell med $\vec{d} = (1,2)$ og $\vec{c}$ står normalt på $\vec{d}$.

$$(4,3) = \vec{a} \underset{\boxed{\text{VIL HA!}}}{=} \vec{b} + \vec{c} = \underbrace{t(1,2)}_{\vec{b} \text{ parallell med } \vec{d}} + \vec{c} \quad \text{slik at:}$$

$$0 = \vec{c} \cdot \vec{d} = c_1 + 2c_2 \Rightarrow c_1 = -2c_2$$

Vil velge t og c_2 s.a:

$$(4,3) = (t, 2t) + (-2c_2, c_2)$$
$$= (t - 2c_2, 2t + c_2)$$

$$4 = t - 2c_2 \Rightarrow t = 4 + 2c_2$$
$$3 = 2t + c_2 \Rightarrow 3 = 8 + 4c_2 + c_2$$
$$5c_2 = -5 \Rightarrow \underline{c_2 = -1}$$

$$t = 4 + 2\cdot(-1) = \underline{2}$$

Så: $\vec{a} = \underbrace{(2,4)}_{\vec{b}} + \underbrace{(2,-1)}_{\vec{c}}$

(parallell med (1,2)) (normal på (1,2))

13.) Per: Har $\vec{a}, \vec{b}$ s.a. $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, og $|\vec{a}+\vec{b}| = 7$

Kan ikke stemme! Fordi:

$|\vec{a}+\vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ (fra trekantulikheten)

ikke holder siden

$$7 = |\vec{a}+\vec{b}| > 5 = |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

(Trekantulikheten holder ikke)

15.) Vis: For alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, så er

$$\underbrace{|\vec{x}| - |\vec{y}| \le |\vec{x} - \vec{y}|}:$$

$$|\vec{x}| \overset{\text{OBS}}{=} |\underbrace{(\vec{x} - \vec{y})} + \vec{y}| \overset{\Delta\text{-ulikheten}}{\le} |\vec{x} - \vec{y}| + |\vec{y}|$$

$$|\vec{x}| - |\vec{y}| \le |\vec{x} - \vec{y}| \quad \blacksquare$$

Vis: $\underbrace{|\vec{y}| - |\vec{x}| \le |\vec{x} - \vec{y}|}$

Bytt rollene til $\vec{x}$ og $\vec{y}$ over, og bruk at

$$|\vec{y} - \vec{x}| = |\vec{x} - \vec{y}| \quad \blacksquare$$

Dermed er

$$\big|\, |\vec{x}| - |\vec{y}| \,\big| \le |\vec{x} - \vec{y}|$$

(siden $|\vec{x}| - |\vec{y}| \le |\vec{x} - \vec{y}|$ og $-(|\vec{x}| - |\vec{y}|)$
$= |\vec{y}| - |\vec{x}| \le |\vec{x} - \vec{y}|$: Fra def. av $|\cdot|$)

19.) Parameterframstilling av linja gj. $(-3,-2,5,8)=\vec{a}$, parallell med $\vec{b}=(1,-2,-1,3)$:

$$\vec{r}(t)=\vec{a}+t\vec{b}=(-3,-2,5,8)+t(1,-2,-1,3)$$
$$=(t-3,\,-2-2t,\,5-t,\,8+3t)$$

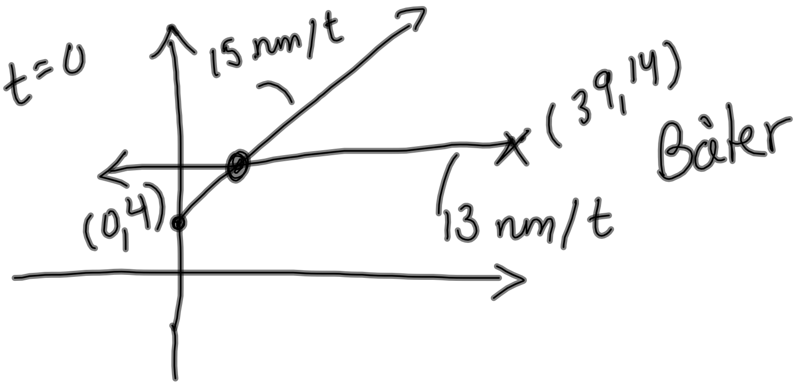
Er $(1,-6,3,14)$ på linja? Dvs: Fins det en t s.a. $1=t-3$, $-6=-2-2t$, $3=5-t$, $14=8+3t$?

$$1=t-3 \Downarrow t=4 \Rightarrow t=4:\ HS=-10 \neq -6$$

$\Downarrow$

Nei! $(1,-6,3,14)$ er ikke på linja.

25.) $t=0$



a) Hvor krysser båtene?

Parameterframstilling:

A: $\vec{r}_A(t) = (0,4) + t(3,4) = (3t,\ 4+4t)$

B: $\vec{r}_B(t) = (39,14) + t(-12,5) = (39-12t,\ 14+5t)$

Kryss: $3t_1 = 39 - 12t_2$, $4 + 4t_1 = 14 + 5t_2$

$t_1 = 13 - 4t_2 \Rightarrow 56 - 16t_2 = 14 + 5t_2$

$t_1 = 5 \Leftarrow t_2 = 2$

Så, båtene krysser hverandre i

$(3\cdot 5,\ 4+4\cdot 5) = (15, 24)$.

b) Kolliderer de? Nei! Krysser kun én gang, og det (15, 24).

A må flytte seg: $\sqrt{(15-0)^2 + (24-4)^2}$

$= \sqrt{15^2 + 20^2} = \underline{25 \text{ nm}}$

B må flytte seg: $\sqrt{(39-15)^2 + (14-24)^2}$

$= \underline{26 \text{ nm}}$

A bruker: $\frac{25}{15} = \frac{5}{3}$ timer på dette

B bruker: $\frac{26}{13} = 2$ timer —"—

Så: Siden tiden A bruker $\neq$ tiden B bruker, kolliderer de ikke.

27)

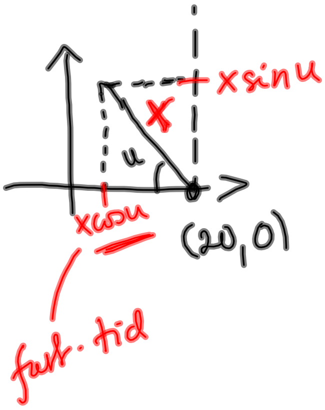
a) Ballongposisjon tid t:

$$|(4,3)| = \sqrt{4^2+3^2} = 5$$

Siden farten til O-B er 5 m/s, bruker ballongen 1 s på å flytte seg ett hakk (vektor) bortover. Dermed er posisjonen til ballongen ved tid t:

$$\vec{b}(t) = (0,6) + t(4,3) = \underline{(4t,\ 6+3t)}$$

b)



$$\vec{k}(t) = \overbrace{(20,0)}^{\text{start}} + \Big(\overbrace{-70}^{\text{Fart på kule}}\ \overbrace{(t-2)}^{\text{kula skytes v/ t=2}}\cos u,\ \underbrace{70}_{\text{Fart}}\ \underbrace{(t-2)}_{\text{kula skytes}}\sin u\Big)$$

$$= \underline{\underline{\big(20-70(t-2)\cos u,\ 70(t-2)\sin u\big)}}$$

c) Kula treffer hvis det fins t s.a.

Kula posisjon Ballongposisjon

$$20 - 70(t-2)\cos u = 4t$$

$$70(t-2)\sin u = 6 + 3t$$

$$\rightarrow \quad t = \frac{140\sin u + 6}{70\sin u - 3} \qquad (*)$$

$$\rightarrow \; 20 - \left(70\,\frac{140\sin u + 6}{70\sin u - 3} - 140\right)\cos u = 4\left(\frac{140\sin u + 6}{70\sin u - 3}\right)$$

$$1400\sin u - 60 - (70\cdot 6 + 140\cdot 3)\cos u = 4(140\sin u + 6)$$

$$60(\sin u - \cos u) = 6$$

$$\sin u - \cos u = \frac{1}{10}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin u - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos u = \frac{1}{\sqrt{2}\,10} \qquad \left(\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Trig. formel:
$\cos v \sin u - \sin v \cos u = \sin(u-v)$

$$\sin\left(u-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}\,10}$$

$$u-\frac{\pi}{4}=\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}\,10}\right)$$

$$u=\underbrace{\frac{\pi}{4}}_{45^\circ}+\underbrace{\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}\,10}\right)}_{\boxed{4^\circ}}$$

$$\approx 49^\circ$$

K-R må skyte med 49° vinkel.

Når treffes ballongen?

$$t^* \underset{(*)}{=} \frac{140\sin 49^\circ+6}{70\sin 49^\circ-3}\approx \underline{2,24}$$

Høyde over bakken $= \underbrace{6+3\cdot t^*}_{\text{y-koordinat til ballong}} = \underline{12,7}$

Ballongen er 12,7 m over bakken.