Plenumsregning

5.1: 7b, 9c

5.2: 1, 3, 4, 6, 7, 8, 10
b) b)

5.3: 1, 2, 3, 5
c)

5.1:

7) b) $f(x) = e^{x^2} \cdot \ln x$, i punkt $x = 2$:

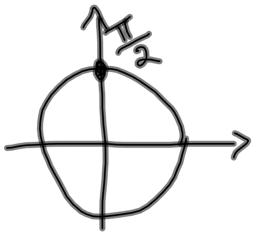
x^2 er kont. overalt, og e^y er kont. overalt.
Derfor er den sammensatte funksjonen e^{x^2} kont. overalt.

$\ln x$ er kont. der den er def., dvs. for alle positive x. Siden $x = 2 > 0$, er $\ln x$ kont. i $x = 2$. Dermed er produktet $e^{x^2} \cdot \ln x = f(x)$ kont. i $x = 2$.

9) c) $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{når } x \neq 0 \\ 0 & \text{når } x = 0 \end{cases}$

$\sin\frac{1}{x}$ er kont. når den er definert, dvs. for $x \neq 0$.
Dermed er eneste mulige diskontinuitet for f i $x = 0$.

Vil vise at f er diskont. ved å finne en følge $\left\{ \frac{1}{x_n} \right\}$ som konvergerer mot 0, men som oppfyller $\sin \frac{1}{x_n} = 1$ for alle $n \in \mathbb{N}$.



$$\frac{1}{x_n} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \quad \text{for alle } n$$

$$x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}, \quad n \in \mathbb{N}$$

La x_n være def. som over for $n \in \mathbb{N}$. Da vil $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$, men $\sin x_n = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Dermed er

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} 1 = 1 \neq 0 = f(0)$$

så f er <u>diskontinuerlig</u> i $x = 0$.

5.2: 1) b) $f(x) = e^x - x - 2, \ [0,2]$:

$f(x)$ er en kont. funksjon.

$f(0) = e^0 - 0 - 2 = 1 - 2 = -1 < 0$

$f(2) = e^2 - 2 - 2 = e^2 - 4 > 0$

$\boxed{e \approx 2{,}71 > 2}$

Skjæringssetningen gir at f har et nullpunkt (eller flere) i $[0,2]$.

3) b) $f(x) = \sin x, \ g(x) = x^3, \ i \ [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$:

f og g er kont. funksjoner.

$f(\frac{\pi}{6}) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$g(\frac{\pi}{6}) = (\frac{\pi}{6})^3$

$\xRightarrow{\boxed{\text{Kalkulator}}} \ g(\frac{\pi}{6}) < f(\frac{\pi}{6})$

$f(\frac{\pi}{3}) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$g(\frac{\pi}{3}) = (\frac{\pi}{3})^3$

$\xRightarrow{\boxed{\text{Kalk.}}} \ g(\frac{\pi}{3}) > f(\frac{\pi}{3})$

Korollaret til skjæringssetningen gir at f og g skjærer hverandre i $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$.

6.) La

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

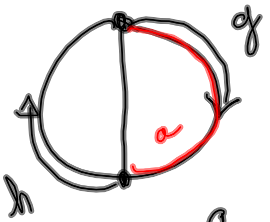
$$= x^n \left(\underline{a_n} + \underline{\frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^n}} \right)$$

være et polynom av grad n (så $a_n \neq 0$). Hvis n er et oddetall vil faktoren x^n over endre fortegn med x (siden $(-1)^n = (-1)^{2k+1} = ((-1)^2)^k (-1) = -1$) $k \in \mathbb{Z}$

For store verdier av $|x|$ vil parantesfaktoren ha samme fortegn som a_n (siden $\frac{a_{n-1}}{x}, \dots, \frac{a_0}{x^n}$ vil gå mot 0 når $|x| \to \infty$). Derfor fins det et stort tall $x_0 > 0$ s.a. $f(x_0)$ og $f(-x_0)$ har motsatte fortegn. Siden f er kont. overalt, spes. på $[-x_0, x_0]$, har den et nullpunkt i intervallet $(-x_0, x_0)$, dvs. minst en reell rot. ⊠

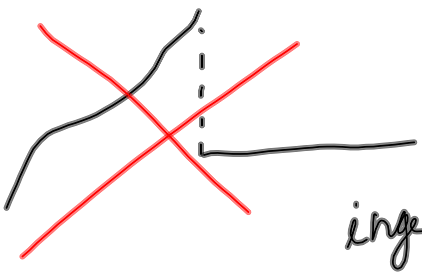
10.) l: $g(x)$ = høyde over havet x cm inn på sirkelen

$h(x)$ = høyde over havet x cm etter passerte halve sirkelen



La a være lengden av halve sirkelen.

g, h er kont. funk. (ingen hopp i høyde) på $[0, a]$.

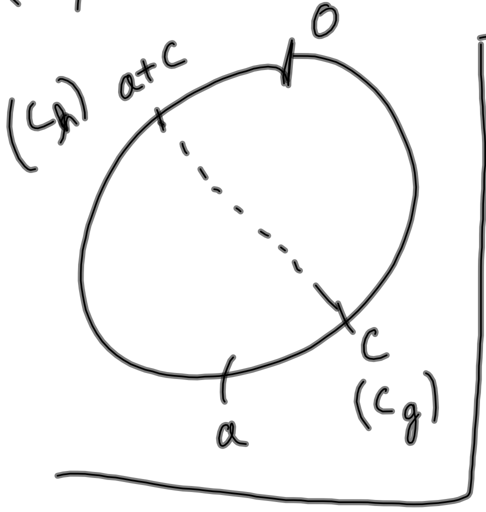


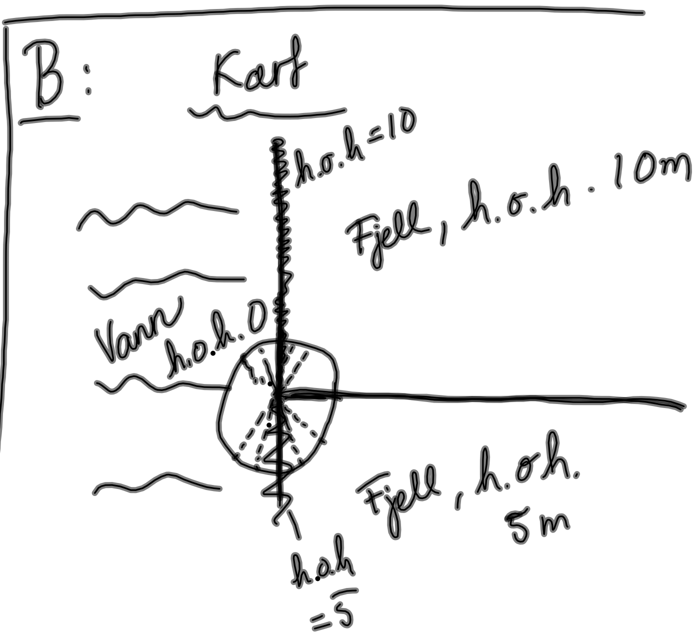
Hvis $g(0) = h(0)$, så er det ingenting å vise ($x=0$, $x=a$ er diametralt motsatte, og $h(0)$ svarer til h.o.h. i pkt. a).

Anta at $g(0) < h(0)$ (hvis omvendt; la g og h bytte plass)

Da er $\underset{(h(0))}{g(a)} > \underset{(g(0))}{h(a)}$, og dermed fins, fra korollaret til skjæringssetningen, $c \in (0, a)$ s.a. $g(c) = h(c)$.

Dvs. fins to diametralt motsatte punkter $(c, a+c)$ s.a. h.o.h. er den samme.





5.3: 1) c) $f(x) = \tan(x^2+1)$ på $[0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$:

$[0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ er et lukket og begrenset intervall.

x^2+1 for $x=0$: 1

x^2+1 for $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$: $\frac{1}{2}+1 = \frac{3}{2}$

Så at f er kont. på $[0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ er det samme som at:
$g(y) = \tan y$ er kont. på $[1, \frac{3}{2}]$. Men det er jo
g ($\tan y = \frac{\sin y}{\cos y}$ og $\cos y$ er ulik 0 for alle
$y \in [1, \underset{1, < \frac{\pi}{2}}{\frac{3}{2}}]$). Dermed gir ekstremal-
verdisetningen at f har max og minverdier
i $[0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$.

2.) a) $f(x) = \frac{1}{x}$: $g(x) = 1$ og $h(x) = x$ er kont.
overalt. Fra Set. 5.1.5 er da $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ kont.
(der vi bruker Def. 5.1.11 siden f ikke er def. der
$h(x)=0$).

b) Når $x \to 0^+$, vil $\frac{1}{x}$ $(= f(x)) \to \infty$,
så derfor er f ikke begrenset på $[-1, 1]$.

Fordi ekstremalverdisetningen sier at funksjonen må være definert på et lukket og begrenset intervall.
f er ikke definert på hele $[-1, 1]$ (ikke def. i 0), så ekstremal-verdi-setningen kan ikke brukes i dette tilfellet.

3.) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kont., $\lim_{x \to \infty} f(x)$, $\lim_{x \to -\infty} f(x)$
a) eksisterer. Vis: f er begrenset.

La $\lim_{x \to \infty} f(x) = a_+$.

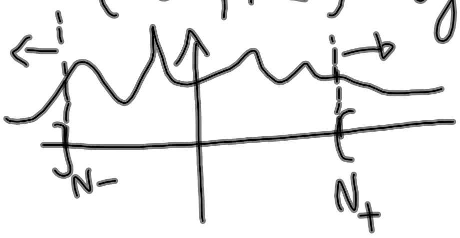
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = a_-$.

La $\varepsilon = 1$. Da fins (fra def. av lim) $N_+ \in \mathbb{N}$ s.a.

$$x \geq N_+ \Rightarrow |f(x) - a_+| < \varepsilon = 1$$

Tilsvarende fins $N_- \in \mathbb{N}$ s.a. $x \leq N_- \Rightarrow$
$|f(x) - a_-| < 1 \ (=\varepsilon)$. f er begrenset
(av $|a_+| + 1$ og $|a_-| + 1$ hhv.) på hhv.

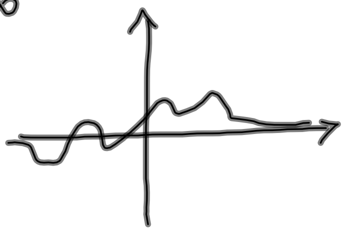
$(-\infty, N_-]$ og $[N_+, \infty)$.



Holder derfor å begrense f
$[N_-, N_+]$. f er kont. på

$[N_-, N_+]$ og dette er et lukket og begrenset
intervall der f er definert. Dermed gir Set. 5.3.2
at f er begrenset her, si av M. Da er
f begrenset av $\max\{|a_+|+1, |a_-|+1, M\}$.

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kont., både pos. og neg. verdier.
$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$. Vis: f har max. og min. pkt.



f har pos. og neg. verdier, så det
fins x_+, x_- s.a. $f(x_+) > 0, f(x_-) < 0$.

La $\varepsilon = \dfrac{\min\{|f(x_-)|, |f(x_+)|\}}{2} > 0$.

Da fins, fra def. av grense, $N_+ \in \mathbb{N}$ s.a. for alle $x \geq N_+$, så er $|f(x)| < \varepsilon$. Det fins også $N_- \in \mathbb{Z}$ s.a. for alle $x \leq N_-$, så er $|f(x)| < \varepsilon$. Dermed har ikke f max. eller min. punkter på $(-\infty, N_-]$ og $[N_+, \infty)$.

Se på $[N_-, N_+]$. Dette er et lukket og begrenset intervall, og f er def. og kont. på dette intervallet. Da gir ekstremalverdisetningen at f har max og minpunkter.