

Plenumsregning

4.3: $1, 3 \overset{b+c}{\underline{ab}}, 4, \overset{b}{\underline{11}}, 13, \dots, 14, 15, \overset{b+c}{\underline{18}}$

5.1: $1 \underline{abc}, 3 \underline{ab}, 5 \underline{abeg}, 6 \underline{ab}, \overset{b}{\underline{7}}, 9 \underline{abc}$

4.3: 1.) b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 4}{-2n^3 + 7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{n} - \frac{4}{n^3}}{-2 + \frac{7}{n^3}}$

deler på
høyeste potens
oppe og nedle

$= 0$
Teller $\rightarrow 0$
Nemur $\rightarrow -2$

3.) b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n}}{(\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n})(\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n})}$

ganger
med "den
konjugerte"
oppe og
nedle

Bruk konjugatsetning!

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n + \sqrt{n}} + \sqrt{n}}{\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}} = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n + \sqrt{n}} + \sqrt{n}}{\sqrt{n}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n + \sqrt{n}}}{\sqrt{n}} + 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{n + \sqrt{n}}{n}} + 1 \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}} + 1 \right) = 1 + 1 = \underline{\underline{2}}
\end{aligned}$$

4.) b) Def. 4.3.1: For alle $\varepsilon > 0$ fins det en $N \in \mathbb{N}$ s\u00e5nn at

for alle $n \geq N$, s\u00e5 er $|a_n - a| < \varepsilon$



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \sin n}{n} = 0 :$$

La $\varepsilon > 0$. Vi vil finne $N \in \mathbb{N}$ s.a. for alle $n \geq N$

er:

$$\left| \frac{2 \sin n}{n} - 0 \right| = \left| \frac{2 \sin n}{n} \right| = \frac{2 |\sin n|}{n} < \varepsilon$$

merk at $|\sin n| \leq 1$ for alle n . Er derfor nok å finne

$$N \in \mathbb{N} \text{ s.a. } \frac{2 \cdot 1}{N} = \frac{2}{N} < \varepsilon \quad \left(\begin{array}{l} \text{Fordi} \\ \frac{2 |\sin n|}{n} < \frac{2}{n} \text{ for alle } n \end{array} \right)$$

Velg N til å være det første heltallet større enn

$$\frac{2}{\varepsilon} \quad \left(\frac{2}{N} < \varepsilon \Rightarrow 2 < \varepsilon N \Rightarrow \frac{2}{\varepsilon} < N \right).$$

Da er, for alle $n \geq N$:

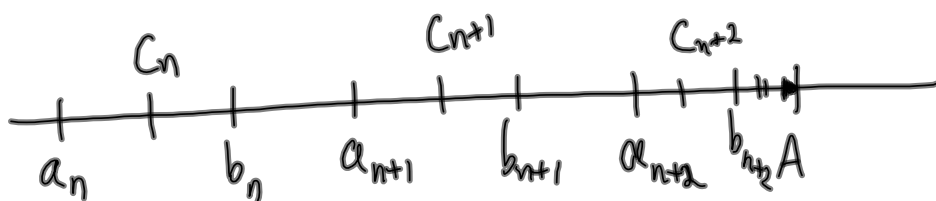
$$\left| \frac{2 \sin n}{n} - 0 \right| \leq \frac{2}{n} \leq \frac{2}{N} < \frac{2}{\frac{2}{\varepsilon}} = \underline{\varepsilon}$$

Dermed er grensen bevist.

11.) Vis at dersom $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A$ og

$$a_n \leq c_n \leq b_n \text{ for alle } n$$

så er $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = A$.



Bruke Def. 4.3.1:

La $\varepsilon > 0$ være gitt. Da fins, siden $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, $N_a \in \mathbb{N}$ s.a. for alle $n \geq N_a$ er $|a_n - A| < \varepsilon$.

Tilsvarende, siden $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A$, fins $N_b \in \mathbb{N}$ s.a. for alle $n \geq N_b$ er $|b_n - A| < \varepsilon$.

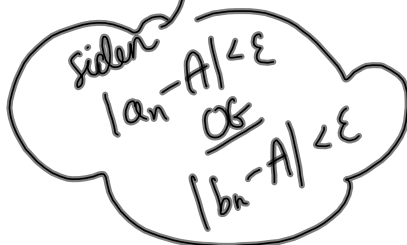
Merk at for alle n er

$$|c_n - A| \leq \max \{ |a_n - A|, |b_n - A| \} \quad \left(\begin{array}{l} \text{siden} \\ a_n \leq c_n \leq b_n \end{array} \right)$$

Velg $N = \max \{ N_a, N_b \}$. Da er, for alle $n \geq N$:

$$|c_n - A| \leq \max \{ |a_n - A|, |b_n - A| \} < \varepsilon$$

Dermed vil $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = A$ også
(fra Def. 4.3.1).



$$18.) \{x_n\}, x_1 = 1, x_{n+1} = \sqrt{2x_n} \text{ for } n \geq 1.$$

$$a) x_n < x_{n+1}$$

Induksjon:

$$b) \underline{n=1}: x_1 = 1 < 2$$

Hyp: Anta $x_n < 2$ for alle $1 \leq n \leq k$.

Vil vise at $x_{k+1} < 2$.

siden $x_k \geq 1$ for alle k fra a)

$$x_{k+1} = \sqrt{2} \sqrt{x_k} < \sqrt{2} \sqrt{2} = 2 \Rightarrow x_{k+1} < 2$$

Induksjons-
hypotese

Så ved induksjon er
 $x_n < 2$ for alle n .

Fra dette over og a), så er $\{x_n\}$ en \downarrow øvre begrenset, voksende følge. Fra Teorem 4.3.9 er denne følgen konvergent, si mot et punkt a .

Merk at:

$$x_{n+1} = \sqrt{2} \sqrt{x_n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2} \sqrt{x_n}$$

$$a = \sqrt{2} \sqrt{a}$$

$$a^2 = 2a \Rightarrow a^2 - 2a = 0 \Rightarrow a(a-2) = 0$$

$$a = 0 \text{ eller } a = 2$$

Derfor må følgen konvergere mot 0 eller 2 (siden den konvergerer). Følgen er nedre begrenset av 1, og voksende, så den kan ikke konvergere mot 0.

Dermed er $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$.

$$c) y_1 = 1, y_{n+1} = \sqrt{2y_n + y_n^2}, n \geq 1 \quad \begin{matrix} y_2 \\ y_3 \dots \end{matrix}$$

Viser $y_n < y_{n+1}$ for alle n : Dette er OK for $n=1$.

Anta at OK for $n \leq k$.

$$y_{k+1} = \sqrt{2y_k + y_k^2} > \sqrt{y_k^2} = y_k$$

siden $y_1 = 1 < y_2 < y_3 < \dots < y_k$
fra induksjonshypotesen.

Så ved induksjon er $\{y_n\}$ en voksende følge.

Hvis $\{y_n\}$ konvergerer mot a :

$$\left\{ \begin{aligned} a &= \lim_{n \rightarrow \infty} y_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2y_n + y_n^2} = \sqrt{2a + a^2} \\ a^2 &= 2a + a^2 \end{aligned} \right.$$

$$2a = 0 \Rightarrow a = 0$$

Men, $\{y_n\}$ er en voksende følge som er nedre begrenset av 1. Dermed kan den ikke konvergere mot 0.

Så $\{y_n\}$ konvergerer ikke.

5.1: 5.) b) $f(x) = x^2$ i punktet $x = 3$:

Gitt en $\varepsilon > 0$, må vi finne $\delta > 0$ s.a. når $|x - 3| < \delta$, så er $|f(x) - f(3)| < \varepsilon$.

La $h = x - 3$. Merk at

$$|f(x) - f(3)| = |x^2 - 9| = |(x+3)(x-3)|$$

$$= |h||h+6|$$

$\boxed{x = h+3}$ For $|h| < 1$, så er $|h+6| < 8$ (tatt i litt)

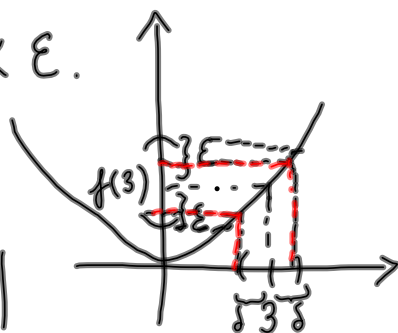
Så hvis $|h| < \min\{1, \frac{\varepsilon}{8}\}$, så er

$$|h||h+6| < \frac{\varepsilon}{8} \cdot 8 = \varepsilon$$

Så velg derfor $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{8}\}$. Da vil, når

$$|x - 3| = |h| < \delta, \text{ så er } |f(x) - f(3)| = |h||h+6| < \varepsilon.$$

Dermed har vi funnet en passende δ , og f er
kontinuerlig i $x = 3$. \square



g) $f(x) = \sqrt{x}$ er kont. i $x=4$:

La $\varepsilon > 0$ være gitt. Vi vil finne $\delta > 0$ s.a. når $|x-4| < \delta$, så er $|f(x) - f(4)| < \varepsilon$.

La $h = \underline{x-4}$ (så $x = h+4$).

Da er:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(4)| &= |\underline{\sqrt{x}} - 2| < |\sqrt{x} - 2| |\sqrt{x} + 2| \\ &= |x-4| = |h| \end{aligned}$$

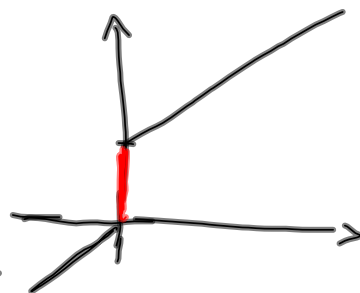
siden $\sqrt{x} \geq 0$ for $x \in D_f$

Velg $\delta = \varepsilon$. Hvis $|x-4| = |h| < \delta$, så er

$$|f(x) - f(4)| < |h| < \delta = \varepsilon.$$

Dermed er f kontinuerlig i $x=4$.

6)a) $f(x) = \begin{cases} x+1, & x > 0 \\ x, & x \leq 0 \end{cases}$



Må finne $\varepsilon > 0$ s.a. samme hvilken

$\delta > 0$ man velger, så fins det en x s.a. selv om

$$|x-0| = |x| < \delta, \text{ så er } |f(x) - f(0)| = |f(x)| \geq \varepsilon$$

Velg $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Samme hvor liten $\delta > 0$ vi velger vil f. eks. $x = \frac{\delta}{2}$ oppfylle $|x| < \delta$, men siden $x > 0$, så vil $|f(x) - f(0)| = |f(x)| = x + 1 = \frac{\delta}{2} + 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon$.

Dermed er f ikke kontinuert i $x=0$.

HOPP!