Ved

å ved induksjon er $x_n < 2$ for alle n.

Fra

Fra dette og a) er $\{x_n\}$ en øvre begrenset, voksende følge. Fra Teorem 4.3.9 er denne følgen derfor konvergent, si mot et punkt a.

Merk at

$$x_{n+1} = \sqrt{2}\sqrt{x_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2}\sqrt{x_n}$$

$$a = \sqrt{2}\sqrt{a}$$

4.3: Følger

$$a^2 = 2a$$

$$a^2 - 2a = 0$$

$$a(a-2) = 0$$

$$a = 0 \quad \text{eller} \quad a = 2$$

Derfor må følgen konvergere mot 0 eller 2 (siden den konvergerer). Følgen er nedre begrenset av 1 og voksende, så den kan ikke konvergere mot 0, altså konvergerer den mot 2.

c) $y_1 = 1$, $y_{n+1} = \sqrt{2y_n + y_n^2}$, $n \geq 1$

$y_1 = 1$, $y_2 = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$, $y_3 = \sqrt{2\sqrt{3}+3}$,

$y_4 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{3}+3} + 2\sqrt{3}+3}$, ...

Viser $y_n < y_{n+1}$ $\forall n$: Dette er OK for $n=1$. Anta OK $\forall n<k$.

$$y_{k+1} = \sqrt{2y_k + y_k^2} > \sqrt{y_k^2} = y_k$$

siden $y_1 = 1 < y_2 < y_3 < \dots < y_k$ fra induksjonshyp.

4.3: Følger

Så $\{y_n\}$ er en voksende følge.

Er $\{y_n\}$ øvre begrenset?

Hvis y_n konvergerer mot a:

$$a = \lim_{n\to\infty} y_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2y_n + y_n^2} = \sqrt{2a + a^2}$$

$$a^2 = 2a + a^2$$
$$0 = 2a$$
$$a = 0$$

Men $\{y_n\}$ er en voksende følge som er nedre begrenset av 1, altså kan den ikke konvergere mot 0, men da konvergerer ikke følgen $\{y_n\}$.

5.1: Kontinuitet

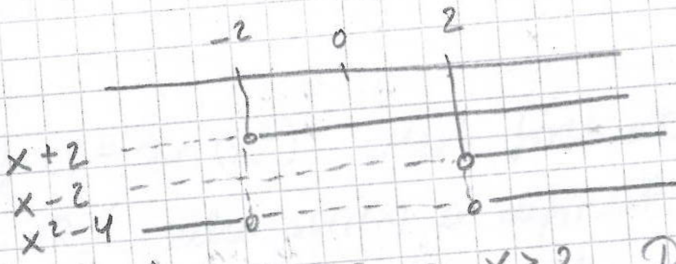
1) a) Finn definisjonsmengden til

$f(x) = \sqrt{x+1}$: $g(y) = \sqrt{y}$ er kun definert for $y \geq 0$. $y = x+1 \geq 0 \iff x \geq -1$, så

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}.$$

b) $f(x) = \ln(x^2 - 4)$: $g(y) = \ln(y)$ er kun def. for $y > 0$. $\underbrace{y = x^2 - 4}_{\text{Hvor er}} = (x+2)(x-2) > 0$?

Fortegnslinje:



Så $y = x^2 - 4$ er positiv for $x < -2$ og $x > 2$. Dermed e

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$$