b) Gjelder konklusjonen også dersom nedstigningen starter kl 10 og er ferdig kl. 16?

5.2: Skjæringssetn.

Definer g og h på samme måte som før.
Skal nå se på intervallet $[10, 16]$

$g(10) <$ høyden på fjellet (hun kommer jo ikke frem før kl. 15!)
$h(10) =$ høyden på fjellet

$$\Downarrow$$

$$g(10) < h(10)$$

$g(16) =$ høyden på fjellet (hun kom frem kl. 15)
$h(16) = 0 <$ høyden på fjellet

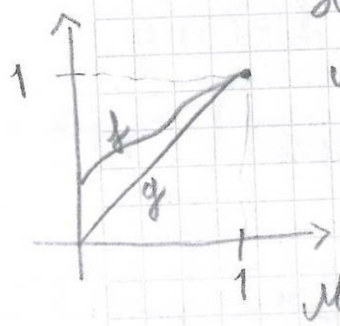
$$\Downarrow$$

$$h(16) < g(16)$$

Igjen er g og h kont. funksjoner. Korollaret til skjæringssetningen gir da at det fins en $c \in (10, 16)$ s.a. $g(c) = h(c)$, dvs. det fins et tidspunkt c mellom 10 og 16 der fjellklatreren er på samme høyde begge dager.

$\boxed{8.)}$ La $f : [0,1] \to [0,1]$ være en kontinuerlig funksjon.
Vis at f har et fikspunkt, dvs. at det fins en $x \in [0,1]$ s.a. $f(x) = x$.

Definer $g(x) = x$.
f og g er begge kontinuerlige på $[0,1]$.



Hvis $f(0) = g(0)$ eller $f(1) = g(1)$ er det ingenting å vise (dette er fikspunkter!).
Anta derfor at $f(0) \neq g(0)$ og $f(1) \neq g(1)$,
dvs. $f(0) \neq 0$ og $f(1) \neq 1$.
Merk at $f(1) < 1$ siden $f : [0,1] \to [0,1]$ og $f(1)$

Merk også at $f(0) > 0$ siden $f : [0,1] \to [0,1]$ og

$\underbrace{f(0)}_{g(0)} \neq 0$. Men da er:

$$f(0) > g(0) \; (=0)$$

og $$f(1) < g(1) \; (=1)$$

$\boxed{\text{5.2: Skjæringssetn.}}$

så siden f og g er kont. funksjoner gir korollaret til skjæringssetningen at det fins $c \in (0,1)$ s.a.

$f(c) = g(c)$, dvs. $f(c) = c$.

Fra argumentene over får vi at f har et fikspunkt.

10.) O: $g(x)$ = høyde over havet x cm inn på sirkelen

$h(x)$ = ——"—— x cm etter passerte halve sirkelen.

La a = lengden av halve sirkelen

g, h kont. funksjoner (ingen hopp i høyde) på $[0, a]$. Hvis $g(0) = h(0)$ er det ingenting å vise ($x = 0$ og $x = a$ er diametralt motsatte, $h(0)$ svarer til høh. i pkt. a).

Anta $g(0) < h(0)$ (hvis omvendt: la g og h bytte rolle).

Da er $$\underset{\substack{\| \\ h(0)}}{g(a)} > \underset{\substack{\| \\ g(0)}}{h(a)}$$, og dermed fins, fra korollaret til skjæringssetningen, $c \in (0, a)$ s.a. $g(c) = h(c)$. Dvs: Fins to diametralt motsatte punkter (c og $a + c$) s.a. høyden over havet er den samme.