.) Teorem 4.3.9 for avtagende følger:

En avtagende, begrenset følge er alltid konvergent.

Bevis: Anta at $\{a_n\}$ er en avtagende, begrenset følge. Da er mengden

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\} = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

ikketom og begrenset. Fra kompletthetsprinsippet har A en største nedre skranke a. Vi viser at
$\lim_{n \to \infty} a_n = a$.

For enhver $\varepsilon > 0$ må vi vise at det fins en N s.a. $|a_n - a| < \varepsilon$ når $n \geq N$. Siden a er en nedre skranke for A, så er $a_n \geq a$ for alle n. Dessuten må det finnes et ledd a_N s.a. $a_N < a + \varepsilon$; hvis ikke ville $a + \varepsilon$ vært en nedre skranke for A som er større enn den største nedre skranken a. Siden følgen er avtagende må $a_n < a - \varepsilon$ for alle $n \geq N$. Dermed har vi vist at $a - \varepsilon > a_n \geq a$ for alle $n \geq N$, og beviset er fullført. ∎

18.) $\{x_n\}$, $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$ for $n \geq 1$

$x_1 = 1$, $x_2 = \sqrt{2x_1} = \sqrt{2}$, $x_3 = \sqrt{2x_2} = \sqrt{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}\sqrt[4]{2}$,
$x_4 = \sqrt{2x_3} = \sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}, \dots$

a) Vis, v/ induksjon på n, at $x_n < x_{n+1}$ for alle naturlige tall n.

4.3: Følger

$\underline{n=1}$: $x_1 = 1$, $x_2 = \sqrt{2}$, $x_1 = 1 < \sqrt{2} = x_2$

$\Rightarrow$ OK for $n=1$.

Induksjonshypotese: Anta $x_n < x_{n+1}$ for alle $1 \le n \le k$

Induksjonssteg: Vil vise at da er $x_{k+1} < x_{k+2}$.

$$x_{k+1} = \sqrt{2x_k}$$

$$x_{k+2} = \sqrt{2x_{k+1}} = \sqrt{2}\sqrt{x_{k+1}} > \sqrt{2}\sqrt{x_k} = \sqrt{2x_k} = x_{k+1}$$

Induksjonshypotese og at $x_n \geq 1 \ \forall \ n \le k+1$

Siden $x_1 = 1$, og $x_n < x_{n+1}$ for alle $1 \le n \le k \Rightarrow$ $x_1 = 1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n$ $\forall \ 1 \le n \le k$

Dermed er induksjonen OK. $\boxtimes$

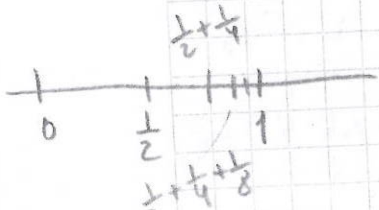
(b) Vis at $\{x_n\}$ konvergerer, og bestem grensen:

Fra de utregnede leddene ser vi at

$$x_k = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^{k-1}}} \quad \text{for } k \geq 1.$$

Siden summen i eksponenten konvergerer mot 1, vil x_k konvergere mot 2.

Rått



Evt: (mer formelt)

$\underline{n=1}$: $x_1 < 2$ (da $x_1 = 1$)

Hyp: Anta $x_n < 2$ for alle $1 \le n \le k$

Vil vise at $x_{k+1} < 2$.

siden $x_k > 1 \ \forall k$ fra a)

$$x_{k+1} = \sqrt{2}\sqrt{x_k} < \sqrt{2}\sqrt{2} = 2 \Rightarrow x_{k+1} < 2$$

def. Induksjonshypotese