$[0,1) \cup (2,\infty)$.

Dermed har vi vist (v/ induksjon) at
$x_n \in [0,1) \cup (2,\infty)$ for alle n (pga. ant. om a)

Dette viser, fra Merk, at $\underset{\downarrow}{x_{n+1}} = \frac{x_n^2+2}{3} \underset{\downarrow}{>} x_n$ for alle n.
$\boxed{\text{Def}}$ $\boxed{\text{Merk}}$

Dermed er følgen voksende.

b) For hvilke a er $\{x_n\}$ konvergent?

Fra a) vet vi at $\{x_n\}$ er str. voksende for $a \in [0,1) \cup (2,\infty)$ og str. avtagende for $a \in (1,2)$. For $\overset{x_1}{a} = 1$ er:

$$x_2 = \frac{1^2+2}{3} = 1 = x_1$$

$$x_3 = \frac{1^2+2}{3} = 1 = x_2$$

osv. $\Rightarrow$ Følgen er konstant = altså konvergent (mot 1)

For $\underline{\overset{x_1}{a} = 2}$: $x_2 = \frac{2^2+2}{3} = \frac{6}{3} = 2 = x_1$

$$x_3 = \frac{2^2+2}{3} = \frac{6}{3} = 2 = x_2$$

osv. $\Rightarrow$ Følgen er konvergent (mot 2)

Anta at grensen fins. Hva kan grenseverdien være
Kall denne x

Vet: $x_{n+1} = \frac{x_n^2+2}{3}$

Grenseverdi begge sider:

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2+2}{3}$$

$\Rightarrow \quad x = \frac{x^2+2}{3}$

Fra Mark vet vi: $\quad x = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$

Så grenseverdien må være 2 eller 1 hvis den fins.

For $a \in [0,1)$ er: $\quad x_2 = \frac{a^2+2}{3} \in [\frac{2}{3}, 1)$

$$x_3 = \frac{x_2^2+2}{3} \in [\frac{22}{27}, 1)$$

$$\frac{\frac{4}{9}+2}{3} = \frac{\frac{4+18}{27}}{} = \frac{22}{27}$$

osv. Holder seg under 1.

Så følgen er voksende og ser ut til begr. av 1. Vil vise:

$$x_k \leq 1 \quad \forall k \geq 1$$

Induksjon: OK for $i = 1$

Hyp: Anta $x_i \leq 1$, $i \leq k$.

Vil vise: $\quad x_{k+1} \leq 1$

$$x_{k+1} = \frac{x_k^2+2}{3} \underset{\boxed{\text{Hyp}}}{\leq} \frac{1^2+2}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

OK of induksjon.

Så for $a \in [0,1)$ er $\{x_n\}$ str. voksende og øvre begrenset av 1.

$$\Downarrow \boxed{\text{Thm. } 4.3.9}$$

$\{x_n\}$ konvergerer mot 1.