MAT 1100

Plenum 18/9-14

4.3: 4, 11, 13, 18, 19

5.1: 1, 3, 5abeg, 6, 7, 9bce

5.2: 1, 3, 5, 7, 8, 10

4.3: Konvergens av følger

4), 11), 13), 18): Se kopi fra ifjor.

19) $\{x_n\}$ gitt v/:

(UiO)

$$x_1 = a, \quad a > 0$$

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 2}{3}, \quad n \geq 1$$

Eks: $x_2 = x_{\underbrace{1+1}_{n}} = \frac{x_1^2+2}{3} = \frac{a^2+2}{3}$ osv.

a) Vis: Hvis a s.a. $x_2 > x_1$, er følgen strengt voksende. (i)

(ii) Hvis a s.a. $x_2 < x_1$, er følgen str. avtagende.

HINT: Vis $x_{n+1} > x_n$ for alle n v/ induksjon.

Viser (i). (ii) er helt tilsvarende (bare snu ulikhetene).

Anta a er s.a. $x_2 > x_1$. Vil vise at da er $x_{n+1} > x_n$. Vet at dette holder for $n=1$ (siden $x_2 > x_1$).

OBSERVER:

$$x_{n+1} \underset{\substack{\text{Def.}\\\text{følge}}}{=} \frac{x_n^2+2}{3} > x_n \iff x_n^2 > 3x_n - 2$$

$$\Updownarrow$$

$$x_n \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$$

Merk: For x et reellt tall er:

$$\frac{x^2+2}{3} > x$$

$$\Updownarrow$$

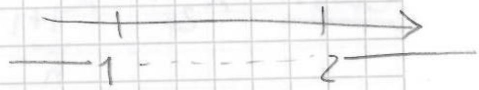
$$x^2 + 2 > 3x$$

$$\Updownarrow$$

$$x^2 - 3x + 2 > 0$$

Løser:

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$



$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

Så: $\frac{x^2+2}{3} > x \iff x \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$

Derfor: Nok å vise at $x_k \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$.

Viser dette v/ induksjon: Siden a er s.a. $x_2 > x_1$, må $a = x_1 \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty) \Rightarrow x_1 \overset{a}{=} [0, 1) \cup (2, \infty)$

Hyp: $x_i \in [0, 1) \cup (2, \infty)$ for $i \leq k$

Da er: $$x_{k+1} = \frac{x_k^2 + 2}{3} \in \left[\frac{0^2+2}{3}, \frac{1^2+2}{3}\right) \cup \left(\frac{2^2+2}{3}, \infty\right)$$

$$= \left[\frac{2}{3}, 1\right) \cup (2, \infty) \subseteq$$