3.) a) Anta $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er kont., og $\lim_{x \to \infty} f(x)$ og $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ eksisterer.

Vis at f er begrenset.

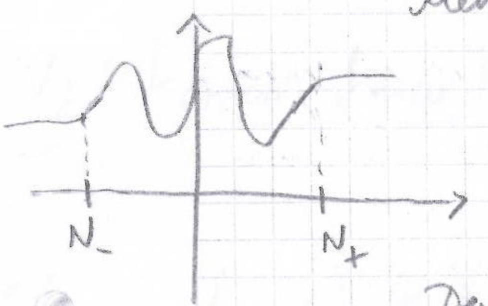
La $\lim_{x \to \infty} f(x) = a_+$.

og $\lim_{x \to -\infty} f(x) = a_-$.

NB: I bevisoppg. som dette: Alle antagelser skal som regel brukes

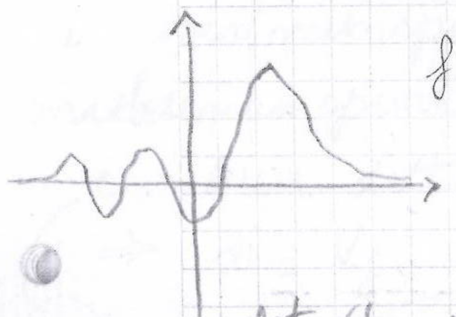
La $\varepsilon = 1$. Da finnes (fra def. av lim) N_+ s.a. $x \geq N_+ \Rightarrow |f(x) - a_+| < 1 (= \varepsilon)$.
Tilsvarende finnes N_- s.a. $x \leq N_- \Rightarrow |f(x) - a_-|$
f er begrenset (av $|a_+| + 1$ og $|a_-| + 1$ hhv.) på hhv. $(-\infty, N_-]$ og $[N_+, \infty)$.

Holder derfor å begrense f på $[N_-, N_+]$.



Men f er kontinuerlig og $[N_-, N_+]$ er et lukket, begrenset intervall der f er definert, så Setning 5.3.2 gir at f er begrenset her, si av M.
Da er f begrenset av $\max\{|a_+| + 1, |a_-| +$

b) Anta $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig og har både pos. og neg. verdier. Anta også at $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty}$ $= 0$. Vis at f har max og minpunkter.



f har både pos. og neg. verdier, så finnes x_+, x_- s.a. $f(x_+) > 0$ og $f(x_-) < 0$.
La $\varepsilon = \frac{\min\{|f(x_-)|, f(x_+)\}}{2}$. Da finnes det (fra def. av lim) N_+ s.a. ~~for~~ for alle $x \geq N_+$ er $|f(x)| < \varepsilon$, og finnes N_- s.a. ~~for~~ for alle $x \leq N_-$ er

Sek. 5.3

$|f(x)| < \varepsilon$. Dermed har ikke f max eller minpunkter på $(-\infty, N_-]$ og $[N_+, \infty)$.

Se på $[N_-, N_+]$. Dette er et lukket og begrenset intervall og f er definert og kontinuerlig på dette intervallet. Da gir ekstremalverdisetningen at f har max og minpunkter.

(5.) Anta at $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ er kont. Vis at verdimengden $V_f = \{ f(x) : x \in [a,b] \}$ er et lukket og begrenset intervall:

Vi viser at $V_f = [f_{min}, f_{max}]$ v/ å vise inklusjon begge veier.

Finnes fra ekstremalverdisetningen siden $[a,b]$ er lukket og begrenset og f er kontinuerlig.

$V_f \subseteq [f_{min}, f_{max}]$: Holder fra definisjonen av min og max.

$[f_{min}, f_{max}] \subseteq V_f$: Fra ekstremalverdisetningen oppnås f_{min} og f_{max} for $x \in [a,b] \Rightarrow f_{min}, f_{max} \in V_f$. Ta en verdi $d \in (f_{min}, f_{max})$. Da er den kontinuerlige funksjonen $g(x) = f(x) - d$ negativ i minimumspunktet til f og positiv i maksimumspunktet, og har derfor et nullpunkt c. Men dette betyr at $g(c) = 0 \Rightarrow f(c) = d \Rightarrow d \in V_f$. Dermed er $[f_{min}, f_{max}] \subseteq V_f$.

Fra skjæringssetningen!

Dette viser at $V_f = [f_{min}, f_{max}]$,