Sek. 6.2

(UiO) La f, g være to funk. som er kont. på $[a,b]$ og deriverbare på (a,b). Anta videre at $f(a)=g(a)$ og $f(b)=g(b)$. Vis at det fins et tall $c \in (a,b)$ s.a. $f'(c)=g'(c)$.

Definer $h(x)=f(x)-g(x)$. Da er h kont. på $[a,b]$ (siden f og g er det) og derivbar på (a,b) (igjen, siden f og g er det). Fra middelverdisetningen fins $c \in (a,b)$ s.a.

$$h'(c)=\frac{h(b)-h(a)}{b-a}=\frac{(f(b)-g(b))-(f(a)-g(a))}{b-a}$$

$$=\frac{0-0}{b-a}=0$$

Men $h'(c)=f'(c)-g'(c)$, så

$$f'(c)-g'(c)=0 \Rightarrow f'(c)=g'(c).$$

Dermed er påstanden bevist.

20.) (UiO)

a) Anta at f' er kont. på $[a,b]$. Vis at det fins $K \in \mathbb{R}$ s.a. $|f(x)-f(y)| \leq K|x-y|$ for alle $x, y \in [a,b]$

Krav for Lipschitz-kontinuitet. Vil derfor vise at en kontinuerlig deriverbar funksjon er Lipschitz-kontinuerlig.

La $x, y \in [a,b]$ være gitt. Hvis $x=y$ er påstanden opplagt OK, så anta at $x \neq y$.

(Sek. 6.2)

Anta $y \le x$. Da fins, fra middelverdisetningen (siden f' er kont. må f være kont. og deriverbar) $c \in (y, x)$ s.a.

(Ikke: Bytt navn!)

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

$$\Downarrow$$

$$|f(x) - f(y)| = |x - y||f'(c)|$$

Siden f' er kontinuerlig, og $[a, b]$ er et lukket og begrenset intervall gir ekstremalverdisetningen (eller korollar til denne) at f' er begrenset, dvs. $|f'(x)| \le K$ for alle $x \in [a, b]$.

Men dermed er

$$|f(x) - f(y)| \le K|x - y| \text{ for alle } x \in [a, b],$$

så påstanden er OK.

b) La $f(x) = \sqrt{x}$. Vis at det ikke fins K s.a. $|f(x) - f(y)| \le K|x - y|$. Anta for motsigelse at fins K: $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \le K|x - y|$. Da må det (velg $y = 0$) finnes K s.a. $|\sqrt{x}| \le K|x|$, dvs. $\left|\frac{1}{\sqrt{x}}\right| \le K$ for alle x. Dette går ikke når x nærmer seg 0: Velg f. eks.

$\stackrel{>0}{K}$ (må være > 0 pg 1-1)

$$x = \frac{1}{4K^2} \Rightarrow \left|\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4K^2}}}\right| = 2K \not\le K.$$

Dermed kan det ikke finnes noen slike K. (siden $K>0$)

Dette strider ikke mot a) siden $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ikke er kontinuerlig (ikke definert) i $x = 0$.