7.4: Omvendte funksjoner

1\) a) Vi skal vise at funksjonen er injektiv, finne den omvendte funksjonen og angi def. området til den omvendte funksjonen.

$f(x) = x^3$, $D_f = \mathbb{R}$:

Enklere: $f'(x) = 2x^2 \geq 0$, kun 0 i 0. Derfor er f str. voksende unntatt i 0, siden $f(x) = 0$ kun for $x = 0$, må f være injektiv.

La $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq x_2$. Vi vil vise at da er $f(x_1) \neq f(x_2)$, siden da er f injektiv.

- Anta først at $x_2 < 0 < x_1$: Da er $f(x_2) = x_2^3 < 0$, mens $f(x_1) = x_1^3 > 0 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.
- Anta så at $x_2 = 0$, $x_1 \neq 0$: Da er opplagt $f(x_1) \neq f(x_2)$
- Tilsv. hvis $x_1 = 0$, $x_2 \neq 0$.
- Anta så at $0 < x_1 < x_2$: Da er $f(x_1) = x_1^3 < x_2^3 = f(x_2)$, så $f(x_1) \neq f(x_2)$.

  mindre for hver faktor
- Tilsv. hvis $0 < x_2 < x_1$.
- Til slutt: Hvis $x_1 < x_2 < 0$: $f(x_1) = x_1^3 = -|x_1|^3 < -|x_2|^3 = f(x_2)$

  $\Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
- Tilsv. hvis $x_2 < x_1 < 0$.

(Poeng: For $x > 0$ og $x < 0$ er f strengt voksende/avtagende: Må bare se på tilfellene rundt 0.)

Men dermed er f injektiv.

Omvendt funksjon: Løser:

$$f(x) = y$$
$$x^3 = y$$
$$g(y) = x = \sqrt[3]{y}$$

$$D_g = V_f = \{x^3 : x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

b) $f(x) = x^2$, $D_f = [0, \infty)$:

Injektiv: $f'(x) = 2x > 0$ på $(0, \infty) \Rightarrow$ f er strengt voksende på $[0, \infty)$, dermed er f injektiv.

Omvendt funksjon: Løser

$$f(x) = y$$
$$x^2 = y$$
$$x = \pm\sqrt{y}$$

Invers

Men x skal være i $[0, \infty) \Rightarrow x = \sqrt{y}$ er eneste løsning.

$\Rightarrow f^{-1}(y) = g(y) = \sqrt{y}$.

$$D_{f^{-1}} = V_f = \{x^2 : x \in [0, \infty)\} = [0, \infty)$$

c) $f(x) = x^2$, $D_f = (-\infty, 0]$:

Injektiv: $f'(x) = 2x < 0$ på $(-\infty, 0)$, så f er strengt avtagende på $(-\infty, 0] \Rightarrow f$ er injektiv.

Omvendt funksjon: Løser:

$$f(x) = y$$
$$x^2 = y$$
$$x = \pm\sqrt{y}$$

Men x skal være i $(-\infty, 0] \Rightarrow$ Den eneste løsningen er $x = -\sqrt{y} \Rightarrow f^{-1}(y) = g(y) = -\sqrt{y}$.