$D_{f^{-1}} = V_f = \{x^2 : x \in (-\infty, 0]\} = \underline{\underline{[0,\infty)}}$

3.) Vis at $f(x) = 2xe^x + 1$ er injektiv i et område rundt 0, og finn dette området:

$$f'(x) = 2e^x + 2xe^x = \underbrace{2}_{>0}\underbrace{e^x}_{>0}\underbrace{(1+x)}_{>0 \text{ for } x>-1} > 0 \text{ for } x > -1$$

(lik 0 bare i endepkt.)

Så siden $f'(x) \geq 0$ for $x \in [-1, \infty)$ er f strengt voksende og dermed injektiv på dette området.

La g være den omvendte funksjonen. Hva er $g'(1)$?

Fra Teorem 7.4.6 er:

$$g'(1) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{der } x \text{ bestemmes v/ } f(x) = 1$$

$f(x) = 2xe^x + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$, så

$$g'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2e^0(1+0)} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

5.) Vis at $f(x) = \tan 2x$ er injektiv på $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$:

$f'(x) = \dfrac{2}{\cos^2 2x} > 0$ for $x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$, så dermed er f strengt voksende og derfor injektiv.

Finn $(f^{-1})'(1)$: Fra Teorem 7.4.6 er

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{der } x \text{ bestemmes v/ } f(x) = 1$$

$f(x) = \tan 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{8}$ (siden $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}$), så

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{\frac{2}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}} = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2} = \frac{2}{2 \cdot 4} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

8.) Anta g er den omvendte funksjonen til en kont., str. monoton funk. f og at f er $2\times$ derivbar i $y = g(x)$.

Vis at g er $2\times$ derivbar i x og at

$$g''(x) = -\frac{f''(g(x))g'(x)}{f'(g(x))^2} \quad \left(\text{der vi antar at } f'(g(x)) \neq 0\right)$$

Siden f er kontinuerlig, strengt monoton og deriverbar i $g(x) = y$ m/ $f'(g(x)) \neq 0$, gir Teorem 7.4.6 at g er deriverbar i punktet $f(g(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$ og at

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

Men da (siden f' er deriverbar $\Rightarrow$ HS deriverbar $\Rightarrow$ VS deriverbar) må

$$g''(x) = \left(\frac{1}{f'(g(x))}\right)' = -\frac{1}{(f'(g(x)))^2} f''(g(x))g'(x)$$

$$= -\frac{f''(g(x))g'(x)}{f'(g(x))^2}$$

7.5: Cotangens

"$0 \cdot \infty$": må omforme til L'Hôpital

$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}$

3.) a) $$\lim_{x \to 0} x \cot x = \lim_{x \to 0} x \frac{\cos x}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{\sin^2 x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2$$

"$\frac{\infty}{\infty}$" L'Hôpital

"$\frac{\infty}{\infty}$" L'Hôpital