g) $\lim_{x \to 0} \left( \underset{\downarrow}{\frac{1}{x}} - \underset{\downarrow}{\frac{1}{\arctan x}} \right)$

$\qquad\quad\ \infty \qquad\quad \infty$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\arctan x - x \to 0}{\underset{\overset{\downarrow}{0}}{x \arctan x}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - 1}{\arctan x + \frac{x}{1+x^2}}$$

"$\frac{0}{0}$": L'H

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - (1+x^2)}{(1+x^2)\arctan x + x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-x^2 \to 0}{\underset{\overset{\downarrow}{0}}{(1+x^2)\arctan x} + \underset{\overset{\downarrow}{0}}{x}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-2x}{2x \arctan x + \frac{\cancel{1+x^2}}{\cancel{1+x^2}} + 1}$$

"$\frac{0}{0}$": L'H

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-2x}{2x \arctan x + 2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-x \to 0}{\underset{\overset{\downarrow}{0}}{x \arctan x} + \underset{\overset{\downarrow}{1}}{1}} = \underline{\underline{0}}$$

6.) a) Vis: $\arctan x = 2 - x$ har kun én løsning, og den er i $[1, \sqrt{3}]$.

At det fins løsning i $[1, \sqrt{3}]$: $g(x) = \arctan x : [1, \sqrt{3}] \to \mathbb{R}$ og $h(x) = 2 - x : [1, \sqrt{3}] \to \mathbb{R}$

er kontinuerlige funksjoner og

$$\left.\begin{aligned} g(1) &= \arctan 1 = \underline{\tfrac{\pi}{4}} \\ h(1) &= 2 - 1 = \underline{1} \end{aligned}\right\} g(1) < h(1)$$

$$\left.\begin{aligned} g(\sqrt{3}) &= \arctan \sqrt{3} = \underline{\tfrac{\pi}{3}} \\ h(\sqrt{3}) &= \underline{2 - \sqrt{3}} \end{aligned}\right\} g(\sqrt{3}) > h(\sqrt{3})$$

Så fra Korrolaret til skjæringssetningen fins $c \in (1, \sqrt{3})$ s.a. $g(c) = \arctan c = h(c) = 2 - c$; Dvs. at det fins løsning av ligningen i $(1, \sqrt{3}) \subseteq [1, \sqrt{3}]$.

"leses som er inneholdt i"

At det kun fins én løsning: Def. $f(x) := \arctan x + x - 2$

Da er: $f'(x) = \frac{1}{x^2 + 1} + 1 > 0$ overalt, så

$f$ er strengt voksende. Dvs. at $f$ har max ett nullpunkt. Dvs. fins max ett pkt. $c$

s.a. $f(c) = 0 \Rightarrow \arctan c + x - 2 = 0$