Velg $\delta = \frac{\varepsilon}{\|A\|}$, og la $\vec{x}$ være s.a. $|\vec{x} - \vec{y}| < \delta$. Da er

$$|\vec{F}(\vec{x}) - \vec{F}(y)| = |A\vec{x} - A\vec{y}| = |A(\vec{x} - \vec{y})|$$

$$\leq \|A\| \, |\vec{x} - \vec{y}| < \|A\| \, \delta = \varepsilon$$

Set. 1.6.3

Normen til A, et tall; def:

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2} > 0$$

siden ant. $A \neq 0$

Hva må δ være for å kunne skrive $= \varepsilon$?

$\|A\| \delta = \varepsilon$

$\delta = \frac{\varepsilon}{\|A\|}$

Så dermed er $\vec{F}$ kont. $\boxtimes$

5.) Δ-ulikhet: $|\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$

a) Vis: $\big| |\vec{x}| - |\vec{y}| \big| \leq |\vec{x} - \vec{y}|$

Bevis: $|\vec{x}| = |(\vec{x} - \vec{y}) + \vec{y}| \leq |\vec{x} - \vec{y}| + |\vec{y}|$

Δ-ulikhet

$\Downarrow$

$$|\vec{x}| - |\vec{y}| \leq |\vec{x} - \vec{y}|$$

La $\vec{x}$ og $\vec{y}$ bytte rolle over $\Rightarrow$

$$|\vec{y}| - |\vec{x}| \leq |\vec{y} - \vec{x}| = |\vec{x} - \vec{y}|$$

Så $|\vec{x}| - |\vec{y}| \leq |\vec{x} - \vec{y}|$

og $|\vec{y}| - |\vec{x}| \leq |\vec{x} - \vec{y}| \Leftrightarrow |\vec{x}| - |\vec{y}| \geq -|\vec{x} - \vec{y}|$

Så

$$-|\vec{x}-\vec{y}| \leq |\vec{x}| - |\vec{y}| \leq |\vec{x}-\vec{y}|$$

Så $\underline{\underline{\big|\, |\vec{x}| - |\vec{y}| \,\big|}} \leq |\vec{x}-\vec{y}|$ ☒

b) La $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$. <u>Vis</u>: $f(\vec{x}) = |\vec{x}-\vec{a}|$ er kont.

<u>Bevis</u>: La $\varepsilon > 0$ være gitt, og la $y \in \mathbb{R}^n$.

Vil vise at fins $\delta > 0$ s.a. når $\vec{x}$ er s.a. $|\vec{x}-\vec{y}| < \delta$, så er $|f(\vec{x}) - f(\vec{y})| < \varepsilon$.

La $\delta = \varepsilon$, og $|\vec{x}-\vec{y}| < \delta$. Da er

$$|f(\vec{x}) - f(\vec{y})| = \big|\, |\vec{x}-\vec{a}| - |\vec{y}-\vec{a}| \,\big|$$

$$\underset{a)}{\leq} |\vec{x}-\vec{a}-(\vec{y}-\vec{a})| = |\vec{x}-\vec{y}|$$

$$< \delta = \varepsilon$$

Hva må δ være for å kunne skrive $=\varepsilon$?

Så dermed er f kontinuerlig ☒

c) <u>Vis</u>: $g(\vec{x}) = \dfrac{1}{|\vec{x}-\vec{a}|}$ er kont. der den er definert.

<u>Bevis</u>: $1 \in \mathbb{R}$ og $|\vec{x}-\vec{a}| \in \mathbb{R}$, og $|\vec{x}-\vec{a}|$ er kont. fra b), så fra Set. 2.2.2 er g kont. der den er <u>definert</u>.