EKSTRA (ut. til plenum 27/11-14)

2.3: Grenseverdier

2) Anta $A \subset \mathbb{R}^n$ og $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$. Anta at enhver kule $B(\vec{a}, \varepsilon)$ om $\vec{a}$ inneholder minst ett element fra A (kall dette $\vec{c}_\varepsilon \in A$) ulik $\vec{a}$.

altså: for alle $\varepsilon > 0$

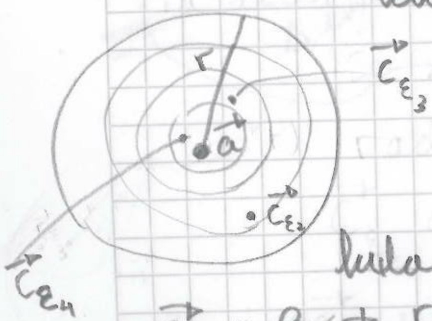
<u>VIS</u>: $\vec{a}$ opphopningsplt. for A.

Bevis: Fra def. <u>2.3.1</u>: $\vec{a}$ er opphopningsplt. for A dersom: Enhver kule $B(\vec{a}, r)$ om $\vec{a}$ inneholder ∞ mange plt. fra A.

La $r > 0$ være gitt. Se på kulen $B(\vec{a}, r)$ om $\vec{a}$. Denne kulen må inneholde $B(\vec{a}, \frac{r}{2})$:

La: $\varepsilon_2 := \frac{r}{2}$. Fra antagelsen vil $B(\vec{a}, \frac{r}{2})$ inneholde et plt. $\vec{c}_{\varepsilon_2} \neq \vec{a}$ s.a. $\vec{c}_{\varepsilon_2} \in A$. Se så på

kula $B(\vec{a}, \underbrace{\frac{|\vec{c}_{\varepsilon_2} - \vec{a}|}{2}}_{:= \varepsilon_3})$. Denne



kula er inneholdt i $B(\vec{a}, r)$ (siden $\vec{c}_{\varepsilon_2} \in B(\vec{a}, \frac{r}{2})$), men inneholder ikke $\vec{c}_{\varepsilon_2}$. Dermed fins det et plt. $\vec{c}_{\varepsilon_3} \in B(\vec{a}, \varepsilon_3) \subseteq B(\vec{a}, r)$ s.a. $\vec{c}_{\varepsilon_3} \notin \{\vec{a}, \vec{c}_{\varepsilon_2}\}$. Se så på $B(\vec{a}, \underbrace{\frac{|\vec{c}_{\varepsilon_3} - a|}{2}}_{:= \varepsilon_4})$

og gjør tilsvarende $\Rightarrow$ fins $\vec{c}_{\varepsilon_4} \in B(\vec{a}, r)$ som er ulik $\vec{a}, \vec{c}_{\varepsilon_2}, \vec{c}_{\varepsilon_3}$.

…enne metoden kan vi gjøre ∞ mange ganger

$\Downarrow$

Fins ∞ mange forskjellige punkter fra A i $B(\vec{a}, r)$.

Siden r var vilkårlig, betyr dette at $\vec{a}$ er et opphopningsplt for A. $\blacksquare$

2.4: Derivasjon av skalarfelt

…b) I hvilken retning vokser funksjonen raskest i plt?

$$f(x,y,z) = (x^2-y^2)e^z, \quad \vec{a} = (1,-1,3)$$

Set. 2.4.7: Gradienten peker i den retningen f vokser raskest:

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^z x \\ -2y e^z \\ e^z (x^2-y^2) \end{bmatrix}$$

$$\nabla f(1,-1,3) = \begin{bmatrix} 2e^3 \\ 2e^3 \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{2e^3}_{\text{konst. har ingenting å si for retning!}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Retningen f vokser raskest i i plt $(1,-1,3)$ er $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.