e) VIS: $\lim_{x \to \infty} L(x) = \infty$

& $\lim_{x \to 0^+} L(x) = -\infty$

Bevis:

$x \to \infty \Rightarrow 2^x \to \infty$, så

$$\lim_{x \to \infty} L(x) = \lim_{x \to \infty} L(2^x) = \lim_{x \to \infty} x \underbrace{L(2)}_{>0}$$

$$= L(2) \lim_{x \to \infty} x = \underline{\underline{\infty}}$$

NB: Har ikke noe å si at vi setter inn noe annet her. Fra def. av L er x kun i skranken av integralet:

$$\lim_{x \to \infty} L(x) = \int_1^\infty \frac{1}{t}\,dt = \lim_{x \to \infty} L(2^x).$$

$$\lim_{x \to 0^+} L(x) = \lim_{x \to \infty} \left(L\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{x \to \infty} -L(x)$$

$\frac{1}{x} = x^{-1}$, Bruk c)

KLADD:

$$\left(\int_1^0 \frac{1}{t}\,dt = -\int_0^1 \frac{1}{t}\,dt \right)$$

$$= -\lim_{x \to \infty} L(x) = \underline{\underline{-\infty}}$$

e) VIS: L har omvendt funksjon.

Bevis: L er strengt voksende, altså injektiv, og (fra a)) har derfor en omvendt funksjon E.

L er kontinuerlig & strengt voksende.
Fra Teorem 7.4.5 er derfor E også kont. & str. voksende med $D_E = V_L$

$= \mathbb{R}$.

f) Vis: $E'(x) = E(x)$.

L er kont., str. voksende (dvs. monoton) og (fra Analysens fundamentalteorem) deriverbar i alle pkt x, m/ $L'(x) = \frac{1}{x} \neq 0$. Fra Thm. 7.4.6 er E deriverbar

$\in (0, \infty)$

i alle punkter $y = L(x)$ (dvs. alle $y \in D_E = V_E$) med:

$$E'(y) = \frac{1}{L'(x)} \overset{\text{Fra over}}{=} \frac{1}{\frac{1}{x}} \; x = L^{-1}(y) = E(y)$$

def. av E

$\boxtimes$

heter y i opprig. Vil ikke forvirre m/ f)

g) Vis: $E(x+z) = E[x] + E[z]$:

$E(x+z)$ løser $L(E(x+z)) = x+z$, men

$$L(E(x)E(z)) \overset{b)}{=} L(E(x)) + L(E(z))$$
$$\overset{\text{def. }E}{=} x + z$$
$$\Downarrow$$
$$L(E(x+z)) \overset{!}{=} x+z = L(E(x)E(z))$$

for alle x, z.