Plenum 18/9

4.3: 1^d, 3^c, ?

4.3: 4^b, 11, 13^c, 18, 19

5.1: 1^e, 3^c, 5abeg, 6^b, 7^b, 9bce ?

5.2: 1^b, 3^a, 5, 7, 8, 10 ?

4.3: Konvergens av følger

1) d) $\lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{\frac{2n^3-13}{5n^3-4}}_{\mathrm{I}} - \underbrace{\frac{4n^4+12}{1-5n^4}}_{\mathrm{II}}\right)$

ser om disse konvergerer

I) $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3-13}{5n^3-4} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n^3-13}{n^3}}{\frac{5n^3-4}{n^3}}$

deler på høyeste potens av n

$= \lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{13}{n^3}}{5-\frac{4}{n^3}} = \underline{\frac{2}{5}}$

$\frac{13}{n^3} \to 0$, $\frac{4}{n^3} \to 0$

II) $\lim_{n\to\infty}\frac{4n^4+12}{1-5n^4} = \lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{12}{n^4}}{\frac{1}{n^4}-5} = \underline{-\frac{4}{5}}$

$\frac{12}{n^4} \to 0$, $\frac{1}{n^4} \to 0$

Da er:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^3-13}{5n^3-4}-\frac{4n^4+12}{1-5n^4}\right)$$

$$\underset{\substack{\downarrow\\ \text{Setning } 4.3.3}}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3-13}{5n^3-4}-\lim_{n\to\infty}\frac{4n^4+12}{1-5n^4}$$

$$=\frac{2}{5}-\left(-\frac{4}{5}\right)=\underline{\underline{\frac{6}{5}}}$$

3) c) $$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}$$

$$\underset{\substack{\downarrow\\ \text{3. kvad. set.}}}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^2}+n-\cancel{n^2}}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n}}{\frac{\sqrt{n^2+n}+n}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{\sqrt{n^2+n}}{n}+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{n^2+n}{n^2}}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$$

$$\frac{1}{n}\to 0$$

$$\frac{n^2+n}{n^2}=\frac{n^2}{n^2}+\frac{n}{n^2}=1+\frac{1}{n}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+0}+1}=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

4) b) $\lim_{n\to\infty} \frac{2\sin(n)}{n} = 0$:

La $\varepsilon > 0$. Vil finne $N \in \mathbb{N}$ s.a. for alle $n \geq N$ er:

$$\Big|\underbrace{\frac{2\sin(n)}{n}}_{a_n} - \underbrace{0}_{a}\Big| = \left|\frac{2\sin(n)}{n}\right| = \frac{2|\sin(n)|}{n} < \varepsilon$$

Merk: $|\sin(n)| \leq 1$ for alle n ($\sin(n) \in [-1, 1]$ for alle n). Derfor er det nok å finne $N \in \mathbb{N}$

s.a: $\frac{2\cdot 1}{N} = \frac{2}{N} < \varepsilon$ (siden $\frac{2|\sin(n)|}{n} \leq \frac{2\cdot 1}{n}$ for alle n)

$$\frac{2}{\varepsilon} < N$$

Velg N til å være det første heltallet større enn $\frac{2}{\varepsilon}$. Da er, for alle $n \geq N$:

$$\left|\frac{2\sin(n)}{n} - 0\right| \leq \frac{2}{n} \leq \frac{2}{N} < \frac{2}{\frac{2}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

Dermed er $\lim_{n\to\infty} \frac{2\sin(n)}{n} = 0$.

13) c) $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = 0$

Vil ha: $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n}$ er verken 0 eller ∞.

La $\{a_n\} = \{\frac{1}{n}\}$, $\{b_n\} = \{\frac{1}{n}\}$. Da vil

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n \to \infty} b_n = 0$$

Hva med:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{\cancel{1}}{n}}{\frac{1}{\cancel{n}}} = \lim_{n \to \infty} 1 = \underline{\underline{1}} \notin \{0, \infty\}$$

$$\{c_n\} = \{\frac{2}{n}\}$$

5.1: Kontinuitet

1) e) $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{\ln|x|}$; antar $f \to \mathbb{R}$ (reell funksjon)

$\sqrt{y}$ er definert for $y \geq 0$ (pga.)

$y = x+2 \geq 0$

$x \geq -2$

$\ln|x|$ er definert for alle $x \neq 0$.

$\frac{1}{\ln|x|}$ er definert for alle $x \neq 0$ og s.a. $\ln|x| \neq 0$,

dvs. $x \neq 1$ og $x \neq -1$

$$\Rightarrow \underbrace{D_f}_{\text{definisjons-mengde } f} = \{x\in\mathbb{R} \mid x \geq -2,\ x \notin \{-1,0,1\}\}$$

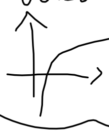
definisjons-mengde f — mengden av ... — slik at — ligger ikke i — mengden av ...

3) c) $f(x)=\ln(x^2+1),\ x\in\mathbb{R}$:

$$x\in\mathbb{R} \Rightarrow x^2 \in \underbrace{\mathbb{R}_+}_{\text{ikke-neg. reelt tall}} \Rightarrow x^2+1\in[1,\infty)$$

$$\Rightarrow \ln(x^2+1) \in \left[\ln(1),\ \lim_{y\to\infty}\ln(y)\right) = [0,\infty)$$

ln er voksende



Så: $\underbrace{V_f}_{\text{verdimengde } f} = [0,\infty)$

5) g) $f(x)=\sqrt{x}$ i $x=4$:

La $\varepsilon>0$ være gitt. Vil finne $\delta>0$ s.a. (slik at) når $|x-4|<\delta$, så er $|f(x)-f(4)|<\varepsilon$.

La $h := x-4$ (så $x=h+4$)

Da er: $|f(x)-f(4)| = |\sqrt{x}-2| \leq |\sqrt{x}-2|\,|\sqrt{x}+2|$ (siden $\sqrt{x}\geq 0$ for alle x)

$= |(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)|$

$\boxed{|a\cdot b| = |a|\,|b|}$ 3. kvad. set.

$= |x-4| = |h|$

Velg $\delta = \varepsilon$. Hvis $\underline{|x-4| = |h|} < \delta$, så er

$$\underline{|f(x) - f(4)|} < |h| \leq \delta = \varepsilon \qquad \left(\begin{array}{l} \delta = \frac{\varepsilon}{2} \\ \delta = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \end{array} \right)$$

$\boxed{\text{forrige side}}$

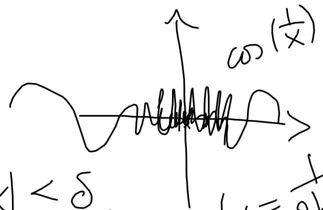
Så dermed er f kontinuerlig i $x = 4$.

6) b) $f(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{for } x \neq 0 \\ 0 & \text{for } x = 0 \end{cases}$ i pkt. 0.

Merk at $\frac{1}{x} \xrightarrow[x \to 0_+]{} \infty$ og $\frac{1}{x} \xrightarrow[x \to 0_-]{} -\infty$, så

$\left(\lim_{x \to 0_+} \frac{1}{x} = \infty \right)$ $\cos \frac{1}{x}$ vil ossillere

(svinge) fortere og fortere når x nærmer seg 0



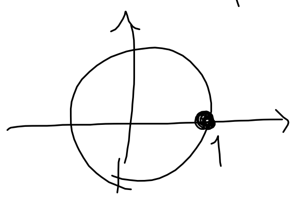
Velg $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Samme hvor liten δ man velger vil det være mulig å finne en x s.a. $|x - 0| = |x| < \delta$, men $\frac{1}{x} = 2k\pi$ for et heltall k. $\left(x = \frac{1}{2k\pi} \right)$

f.eks

Men da er:

$$|f(x)-f(0)| = \left|\cos\tfrac{1}{x} - 0\right| = \left|\cos\tfrac{1}{x}\right|$$

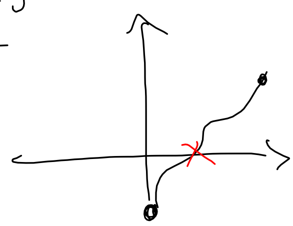
$$= |\cos(2k\pi)| = 1 \geq \tfrac{1}{2} = \varepsilon,$$



så dermed er f ikke kontinuerlig i $x = 0$.

5.2:

1) b) $f(x) = e^x - x - 2$ i $[0,2]$:



f er en kontinuerlig funksjon.

$f(0) = e^0 - 0 - 2 = -1 < 0$

$f(2) = \underbrace{e}_{\approx 2{,}71}{}^2 - 2 - 2 > 0$

Skjæringssetningen gir da at f har nullpunkt(er) i $(0,2)$.

3) a) $f(x) = \ln(x)$, $g(x) = x^2 - 2$, $[1,2]$:

f og g er kont. funk.

$f(1) = 0$
$g(1) = -1$ $\Rightarrow f(1) > g(1)$

$f(2) = \ln(2)$
$g(2) = 2$ $\Rightarrow f(2) < g(2)$

Korollaret til skjæringsset. gir at f og g skjærer hverandre i $(1,2)$.