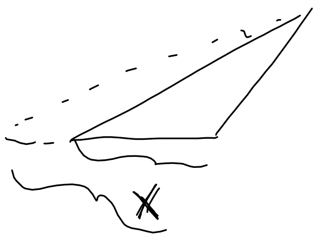
Plenum 15/10-14

7.2:

10) $x(t) = 3$, $x'(t) = 2$, $y(t) = ?$, $y'(t) = ?$



$$3^2 + 3y(t) + y^2(t) = 49$$

$$y^2(t) + 3y(t) - 40 = 0$$

$$y(t) = \frac{-3 \pm \sqrt{9+160}}{2} = \begin{cases} 5 \\ \cancel{-8} \end{cases}$$

→ Går ikke pga. y er en lengde

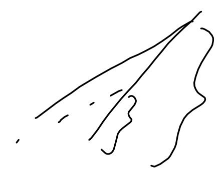
Deriverer uttrykket:

$$2x(t)x'(t) + x(t)y'(t) + x'(t)y(t) + 2y(t)y'(t) = 0$$

Setter inn: $2 \cdot 3 \cdot 2 + 3y'(t) + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 5 y'(t) = 0$

$$12 + 10 + 13y'(t) = 0$$

$$y'(t) = -\frac{22}{13} \text{ m/s}$$



Stigen glir nedover med $\frac{22}{13}$ m/s.

7.4

8.) Vis: g er $2\times$ derivbar i x &

$$g''(x) = -\frac{f''(g(x))\,g'(x)}{f'(g(x))^2}$$

Bevis: Siden f er kont., str. monoton og derivbar i $g(x)=y$ med $f'(g(x)) \neq 0$, gir Teorem 7.4.6 at g er derivbar i punktet $f(g(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$ og at

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

men da, siden f' er derivbar $\Rightarrow$ HS er derivbar $\Rightarrow$ VS er derivbar, så må

$$g''(x) = \left(\frac{1}{f'(g(x))}\right)' \overset{\text{kjerneregel}}{=} -\frac{1}{(f'(g(x)))^2} f''(g(x))\,g'(x)$$

$$= -\frac{f''(g(x))\,g'(x)}{(f'(g(x)))^2}$$

7.5: Cotangens

2) d) $D[e^x \cdot \cot(\ln x)] = e^x \cot(\ln x) + e^x\left(-\frac{1}{\sin^2(\ln x)}\right) \cdot \frac{1}{x}$

$$= e^x\left(\cot(\ln x) - \frac{1}{x\sin^2(\ln x)}\right)$$

3) c) $\lim_{x \to 0^+} (\cot(x))^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x \ln(\cot(x))}$

$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

$$= e^{\lim_{x\to 0^+} x \ln(\cot(x))}$$

e^y er kont.

M: $\lim_{x\to 0^+} \underbrace{\underset{\downarrow 0}{x}\, \underset{\downarrow \infty}{\ln(\cot(x))}}_{\infty} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(\cot(x))}{\frac{1}{x}}$ "$0 \cdot \infty$" $\quad \ln(\cot(x)) \to \infty$, $\quad \frac{1}{x} \to \infty$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\cot(x)}\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{+\frac{\cancel{\sin x}}{\cos x}\,\frac{1}{\sin^{\cancel{2}} x}}{+\frac{1}{x^2}}$$

"$\frac{\infty}{\infty}$": L'H

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 \to 0}{\underbrace{\cos x \sin x}_{0}} \underset{\text{L'H}}{\overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}} \lim_{x \to 0^+} \frac{2x \to 0}{-\sin^2 x + \cos^2 x}$$

$$= \frac{0}{1} = \underline{0}$$

<u>Så</u>:

$$\lim_{x \to 0^+} (\cot(x))^x = e^0 = \underline{\underline{1}}$$

7.6: Arcusfunksjoner

6.) a) <u>Vis:</u> $\arctan x = 2 - x$ har kun én løsning, og den er i $[1, \sqrt{3}]$.

<u>At det fins én løsning i $[1, \sqrt{3}]$:</u> $g(x) := \arctan x$ og $h(x) := 2 - x$. Begge går fra $[1, \sqrt{3}] \to \mathbb{R}$. Både g og h er kontinuerlige funk. og:

$$\left.\begin{aligned} g(1) &= \arctan 1 = \frac{\pi}{4} \\ h(1) &= \underline{1} \end{aligned}\right\} g(1) < h(1)$$

$$g(\sqrt{3}) = \arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$
$$h(\sqrt{3}) = 2-\sqrt{3}$$
$\Bigg\}\ g(\sqrt{3}) > h(\sqrt{3})$

Så fra Korollaret til skjæringssetningen fins $c \in (1,\sqrt{3})$ s.a. $g(c) = h(c)$, dvs:

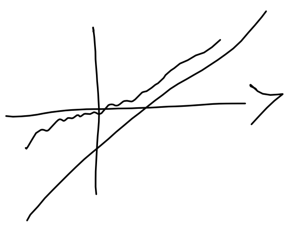
$$\arctan c = 2 - c$$

Dvs at det fins en løsning av ligningen i $(1,\sqrt{3}) \subseteq [1,\sqrt{3}]$

"er inneholdt i"

<u>At det kun fins én løsning</u>: Def: $f(x) := \arctan x + x - 2$

Da er $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} + 1 > 0$ overalt, så f er strengt voksende. Dvs. at f har maks ett nullpkt.



Dvs. fins maks ett pkt. c s.a.

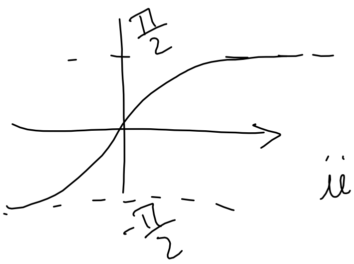
$$f(c) = 0 \Rightarrow \arctan c + c - 2 = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\arctan c = 2 - c$$

Dermed har ligningen <u>maks</u> én løsning.

b) <u>Vertikale asymptoter</u>: f er kont. & definert overalt $\Rightarrow$ ingen vertikale asymptoter.

<u>Skråasymptoter</u>: i) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\dfrac{\arctan x}{x} + 1 - \dfrac{2}{x} \right)$

$$= \underline{1}$$



ii) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - 1 \cdot x \right) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (\arctan x - 2)$

$$= \pm \frac{\pi}{2} - 2$$

f har skråasymptote $\underline{\underline{y = x \pm \frac{\pi}{2} - 2}}$ når $x \to \pm\infty$.