Plenum 27/11-14

1.7: 8, 10

1.8: 9, 17, 20

2.1: 1 → e

2.2: 1 → d, 4, 5, 3

1.7: Identitetsmatriser og inverse matriser

8.) $((AB)^T)^{-1} = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

Merk: AB er inverterbar pga 1.7.4 ii. Da er $(AB)^T$ inverterbar fra Set. 1.7.4 iii.

Dessuten er

$$((AB)^T)^{-1} \underset{\text{Set. 1.7.4 iii}}{=} ((AB)^{-1})^T \underset{\text{Set. 1.7.4 ii}}{=} (B^{-1}A^{-1})^T \underset{\text{Set 1.6.2 v}}{=} (A^{-1})^T (B^{-1})^T \quad \blacksquare$$

10.) $\Rightarrow$: Anta A er inverterbar. Den eneste matrisen X som oppfyller $AX = I_2$ og $XA = I_2$, det er

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad \left(\text{Løs ligningene!}\right)$$

Denne er kun def. når $ad - bc \neq 0$. Siden A er inverterbar, må $ad - bc \neq 0$ og

$$A^{-1} = X.$$

$\Leftarrow$: Anta at $ad - bc \neq 0$. Da fins en løsning på $XA = I_2$ og $AX = I_2$ og det er $X = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

Det betyr at A er invertibel (og $A^{-1} = X$).

det(A)

1.8: Determinanter

9.) Ligningssystemet kan skrives

a)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Antagelse: $\det(A) \neq 0$

$\Downarrow$ (Oppg. 1.7.10)

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{bmatrix}$$

Ganger m/ A^{-1} på begge sider:

$$2\times\cancel{2}\cdot\cancel{2}\times 1$$

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix}b_2 & -b_1\\ -a_2 & a_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix}b_2c_1 - b_1c_2\\ -a_2c_1 + a_1c_2\end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{\det(A)}}}, \quad \underline{\underline{y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{\det(A)}}}$$

b) Hva hvis $a_1b_2 = b_1a_2$? (a_1, a_2) er parallell (eller identisk) med (b_1, b_2).

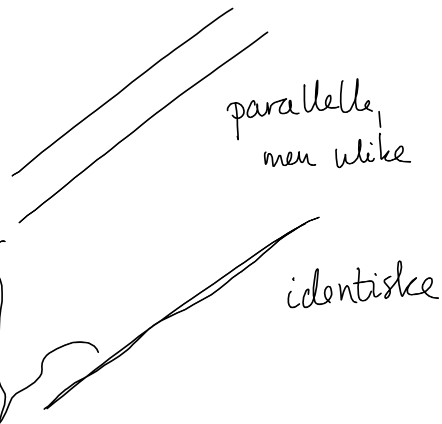
<u>NB</u>: (a_1, a_2) og (b_1, b_2) er parallelle

$\Updownarrow$

De to vektorene har samme stigningstall.

$\Updownarrow$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} \iff a_2b_1 = a_1b_2$$



Ingen løsninger av ligningssystemet, eller ∞ mange løsninger av ligningssystemet.

17.) a) Anta f. eks. at $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er like (hvis ikke: bytt navn). Det er derfor nok å vise at $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$ når $\vec{a} = \vec{b}$.

$$\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1(a_2 c_3 - a_3 c_2) - a_2(a_1 c_3 - a_3 c_1) + a_3(a_1 c_2 - c_1 a_2)$$

$$= 0$$

$\boxtimes$

b) $$\det(s\vec{a} + t\vec{d}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} sa_1 + td_1 & sa_2 + td_2 & sa_3 + td_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= (sa_1 + td_1) \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - (sa_2 + td_2) \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + (sa_3 + td_3) \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= s\Big(\underbrace{a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}}_{\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})}\Big) + t\Big(\underbrace{d_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - d_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + d_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}}_{\det(\vec{d}, \vec{b}, \vec{c})}\Big)$$

$$= s\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) + t\det(\vec{d}, \vec{b}, \vec{c})$$

$\blacksquare$

c) Anta at $\vec{a}$ er en lineær kombinasjon av $\vec{b}$ og $\vec{c}$.

Dvs. det fins $s, t \in \mathbb{R}$ s.a. $\vec{a} = s\vec{b} + t\vec{c}$.

Da er:

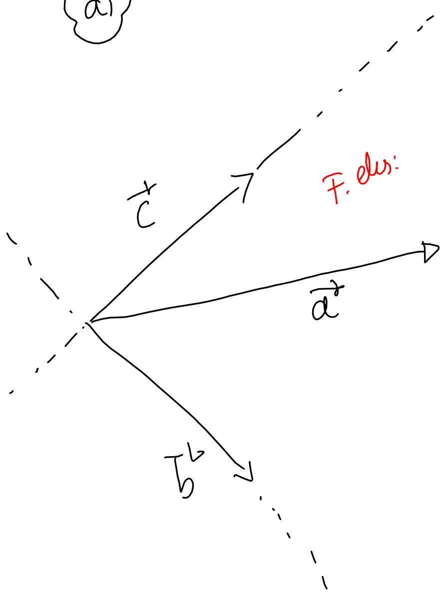
$$\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \det(s\vec{b} + t\vec{c}, \vec{b}, \vec{c})$$

$$\underset{b)}{=} s\det(\vec{b}, \vec{b}, \vec{c}) + t\det(\vec{c}, \vec{b}, \vec{c})$$

$$\underset{a)}{=} s \cdot 0 + t \cdot 0 = \underline{0}$$

$\blacksquare$

d)



$\vec{a} = s\vec{b} + t\vec{c} \Rightarrow$

$\vec{a}$ ligger i planet utspent av $\vec{b}$ og $\vec{c}$

$\Rightarrow$ Volumet utspent av $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$ er 0 (siden kun er et "ark" i rommet)

dette av determinant: Set. 1.8.4

20.) La A være en 2×2 matrise; $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$: Anta at A er inverterbar. Da er $ad - bc \neq 0$ fra oppg. 1.7.10. Men dette er det samme som at $\det(A) \neq 0$.

$\Leftarrow$: Motsatt, anta at $\det(A) \neq 0$. Da er $ad - bc \neq 0$ fra def. av $\det(A)$. Fra Oppg. 1.7.10, er A inverterbar. $\boxtimes$

2.1: Funk. av flere var.

1.) e) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2 - 25}$

f er definert overalt unntatt der hvor $x^2 + y^2 + z^2 - 25 = 0$.

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25$$

$$\underbrace{x^2 + y^2 + z^2 = 5^2}_{\text{Kule med sentrum origo og radius 5.}}$$

$\Downarrow$

$D_f = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ unntatt kula m/ sentrum origo, radius 5$\}$.

$D_f = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \neq 25 \}$

2.2: Kontinuerlige funksjoner

1) d) $f(x,y) = e^{-x} \sin(x+y)$

$-x$ → kont.

Set. 2.2.3: kont. (funk. av kont. er kont.)

kont. kont.

Set. 2.2.2: kont. (sum av kont. er kont.)

Set. 2.2.3: kont. (kont. funk. av kont. er kont.)

Set. 2.2.2: kont. (prod. av kont. er kont.)

4.) a) $|\vec{F}(\vec{x}) - \vec{F}(\vec{y})| \le M\,|\vec{x} - \vec{y}|$ for alle $\vec{x}, \vec{y}$ → (★)

Vis: $\vec{F}$ er kont.

Bevis: La $\varepsilon > 0$ være gitt, og la $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$. Vil vise at $\vec{F}$ er kont. i $\vec{y}$. Siden $\vec{y}$ er en generell vektor, vil dette vise at $\vec{F}$ er kont. i hele $D_{\vec{F}}$.

Vil vise at det fins $\delta > 0$ s.a. når $\vec{x}$ er s.a. $|\vec{x} - \vec{y}| < \delta$, så er

$$|\vec{F}(\vec{x}) - \vec{F}(\vec{y})| < \varepsilon.$$

La $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$, og se på $\vec{x}$ s.a. $|\vec{x} - \vec{y}| < \delta$.

Da er:

$$|\vec{F}(\vec{x}) - \vec{F}(\vec{y})| \underset{(\star)}{\leq} M|\vec{x} - \vec{y}| < M\delta = M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

$M z = \varepsilon$

$z = \frac{\varepsilon}{M}$

$\blacksquare$

b) $\vec{F}(\vec{x}) = A\vec{x}$ $\to$ Anta $A \neq 0$: Hvis $A = 0$, så er $\vec{F}(\vec{x}) = 0$, så denne er kont.

<u>Bevis</u>: La $\varepsilon > 0$ være gitt, og la $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$.

Vil vise at det fins $\delta > 0$ s.a. når $\vec{x}$ er sånn at $|\vec{x} - \vec{y}| < \delta$, så er $|\vec{F}(x) - \vec{F}(\vec{y})| < \varepsilon$.

Velg $\delta = \frac{\varepsilon}{\|A\|}$, og la $\vec{x}$ være s.a. $|\vec{x} - \vec{y}| < \delta$. Da er

$\|A\|\delta = \varepsilon$

$\delta = \frac{\varepsilon}{\|A\|}$

$$|\vec{F}(\vec{x}) - \vec{F}(\vec{y})| = |A\vec{x} - A\vec{y}| = |A(\vec{x} - \vec{y})|$$

$$\underset{\text{Set 1.6.3}}{\leq} \underbrace{\|A\|}_{\text{matrisenorm}} |\vec{x} - \vec{y}| < \|A\|\delta = \cancel{\|A\|}\frac{\varepsilon}{\cancel{\|A\|}} = \varepsilon$$

$\blacksquare$