Plenum 2/10-14

6.2: 2a, 3, 5, 6, 7, 9, 13, 16, 20, 23

6.3: 1 acdfg, 3acde, 5, 7, 13, 23

6.4: 3ac

6.5: 1, 6, 10, 13

6.2: Middelverdisetningen

7.) Anta først at $x=0$. Da stemmer påstanden, siden

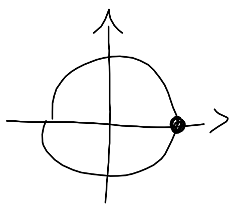
$$\underbrace{\sin 0}_{0} = \underbrace{0 \cos 0}_{0} \quad (\text{f.eks. } c=0 \text{ virker})$$

Anta deretter at $x>0$. La $f(x) = \sin x$. Siden f er kontinuerlig og deriverbar på $[0,x]$, så fins det fra middelverdisetningen en $c \in (0,x)$ s.a.

$$\cos c = f'(c) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\sin x}{x}$$

$$\Downarrow$$

Det fins $c \in (0,x)$ s.a. $x \cos c = \sin x$.



Husk at $|\cos c| \leq 1$. Derfor er:

$$|x \cos c| = |\sin x|$$

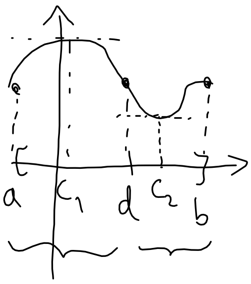
$$|x| \underset{|\cos c| \leq 1}{\geq} |x||\cos c| = |\sin x|$$

Dermed er $|\sin x| \leq |x|$.

Anta til slutt at $x<0$. Se da på $[x,0]$ og gjør nøyaktig som over.

(a, d)

13) Se først på $[a, d]$. Her er f kont. og deriverbar. Fra middelverdisetningen fins det $c_1 \in (a, d)$ s.a.



$$f'(c_1) = \frac{f(d) - f(a)}{d - a} = 0$$

Se så på $[d, b]$. Her er f kont. og deriverbar. Fra middelverdisetningens fins $c_2 \in (d, b)$ s.a.

$$f'(c_2) = \frac{f(b) - f(d)}{b - d} = 0$$

La nå $g(x) := f'(x)$ og se på $[c_1, c_2]$. Her er g kont. og deriverbar (siden f er $2\times$ deriverbar). Fra middelverdisetningen fins $c \in (c_1, c_2)$ s.a.

$$f''(c) \underset{\text{Fra def. av } g}{=} g'(c) = \frac{g(c_2) - g(c_1)}{c_2 - c_1} \underset{\text{Fra def. av } g}{=} \frac{0 - 0}{c_2 - c_1} = 0$$

Dermed er påstanden vist.

16.) Definer $h(x) := f(x) - g(x)$. Da er h kont. på $[a,b]$ (siden f og g er det) og deriverbar på på (a,b) (igjen, —— " ——). Fra middelverdisetningen fins $c \in (a,b)$ s.a.

$$h'(c) = \frac{h(b)-h(a)}{b-a} = \frac{(f(b)-g(b)) - (f(a)-g(a))}{b-a}$$

$$= \frac{0-0}{b-a} = 0$$

Men $h'(c) = f'(c) - g'(c)$, så

$$f'(c) - g'(c) = 0$$

$$f'(c) = g'(c)$$

Dermed er <u>påstanden</u> bevist.

6.3: L'Hôpitals regel

5) $\lim_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

$$(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \left(e^{\ln(\cos x)}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{x^2}\ln(\cos x)}$$

$f(x) = e^x$ er kont, så

$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}\ln(\cos x)} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln(\cos x)}$$

M: $\lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to\infty} \underbrace{\ln(\underbrace{\cos x}_{\to 1})}_{0} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}$ "$\infty \cdot 0$"

"$\frac{0}{0}$": L'Hôpital

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos x}(-\sin x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{\cos^2 x}}{2}$$

"$\frac{0}{0}$": L'Hôpital

$$= \frac{-\frac{1}{1^2}}{2} = \underline{-\frac{1}{2}}$$

Så: $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln(\cos x)} = \underline{\underline{e^{-\frac{1}{2}}}}$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{e^{\frac{1}{2}}}}} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{e}}}}$$

6.4: Kurvedrøfting

3) c) $f(x) = e^x \cos x$

$$f'(x) = e^x \cos x + e^x(-\sin x) = e^x(\cos x - \sin x)$$

$$f''(x) = e^x(\cos x - \sin x) + e^x(-\sin x - \cos x)$$

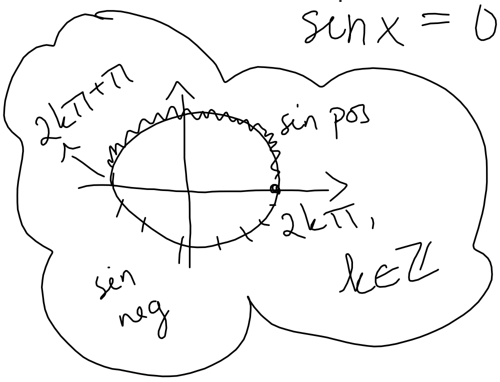
$$= e^x(\cancel{\cos x} - \sin x - \sin x - \cancel{\cos x})$$

$$= -2e^x \sin x$$

$$f''(x) = 0$$

$$-2e^{x}\sin x = 0$$

$$\sin x = 0$$



$\cap$ konkav

$f'' \leq 0$ i $[2k\pi, 2k\pi+\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$

$f'' \geq 0$ i $[2k\pi+\pi, 2(k+1)\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$

$\Downarrow$ $\cup$ konveks

f er konveks på $[2k\pi+\pi, 2(k+1)\pi]$ og konkav på $[2k\pi, 2k\pi+\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$.

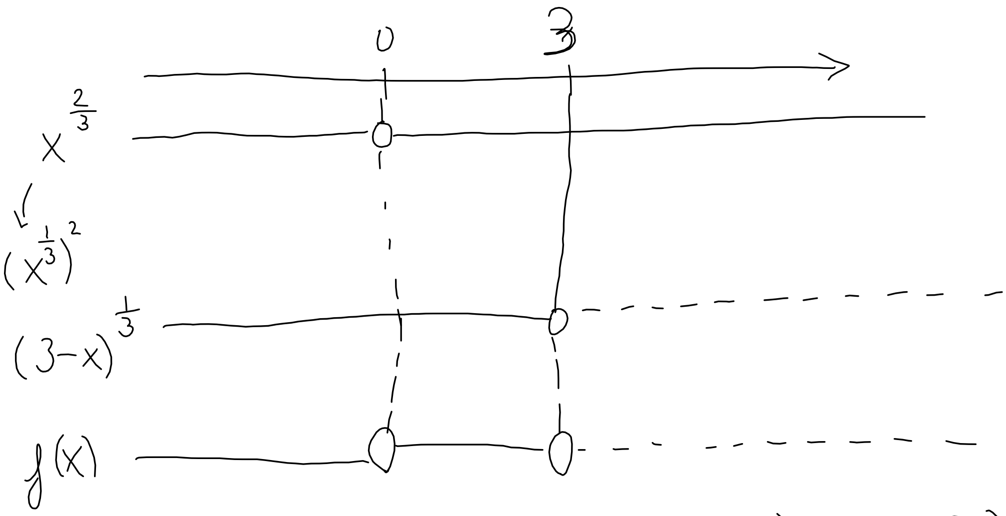
6.5: Asymptoter

13) $f(x) = (3x^2 - x^3)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{2}{3}}(3-x)^{\frac{1}{3}}$

a) $f(x) = 0$

$x^{\frac{2}{3}}(3-x)^{\frac{1}{3}} = 0 \iff x^{\frac{2}{3}} = 0$ eller $(3-x)^{\frac{1}{3}} = 0$

$\iff x = 0$ eller $x = 3$



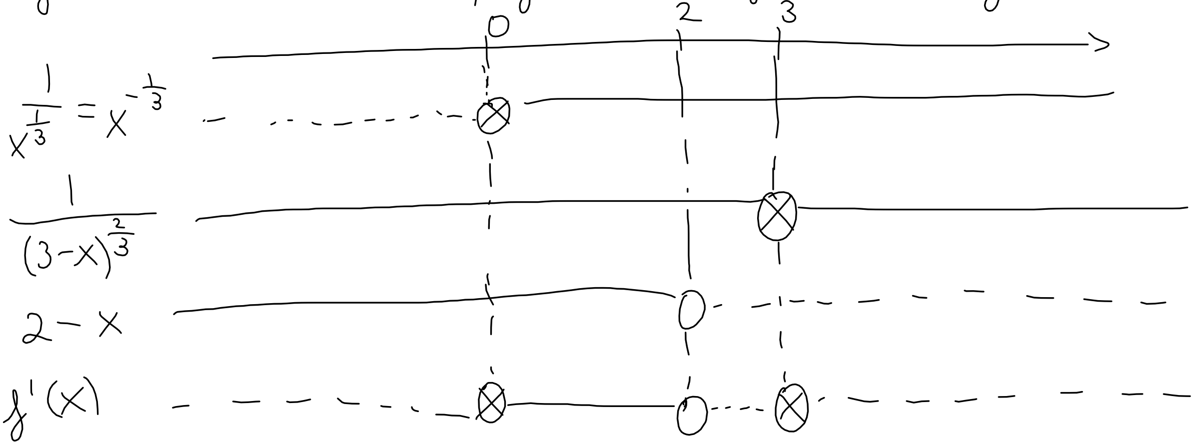
Så $f(x) > 0$ for $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 3)$ og

$f(x) < 0$ for $x \in (3, \infty)$.

b) $f'(x) = \frac{1}{3}(3x^2 - x^3)^{-\frac{2}{3}}(6x - 3x^2) = x^{-\frac{1}{3}}(3-x)^{-\frac{2}{3}} \cdot (2-x)$

$$= \frac{2-x}{x^{\frac{1}{3}}(3-x)^{\frac{2}{3}}}$$

$f'(x) = 0 \iff x = 2$, f' ikke def. i $x = 0$ og $x = 3$



$\Rightarrow f'(x) \geq 0$ for $x \in [0, 2]$ og $f'(x) < 0$ for $x \in (-\infty, 0) \cup (2, 3) \cup (3, \infty)$.

$\Rightarrow$ f er voksende for $x \in [0,2]$ og f er avtagende for $x \in (-\infty, 0] \cup [2, \infty)$.

Punktet $x = 0$ ($\overset{f(x)}{\overset{\shortparallel}{y}} = 0$) er et lokalt minimum.

Punktet $x = 2$ ($f(x) = y = \sqrt[3]{4}$) er lokalt maksimum. (Punktet $x = 3$ er IKKE et lokalt minimum, siden f avtar igjen med en gang).

c) $f''(x) = \underset{\text{kjerne \& produktregel}}{\dots} = \dfrac{2}{x^{\frac{4}{3}}(3-x)^{\frac{2}{3}}}\left(1 - x - \dfrac{(2-x)^2}{3-x}\right)$

$$f''(x) = 0 \iff 1 - x = \frac{(2-x)^2}{3-x}$$

$$(1-x)(3-x) = (2-x)^2$$

$$3 - \cancel{x - 3x} + \cancel{x^2} = 4 - \cancel{4x} + \cancel{x^2}$$

Aldri sant!

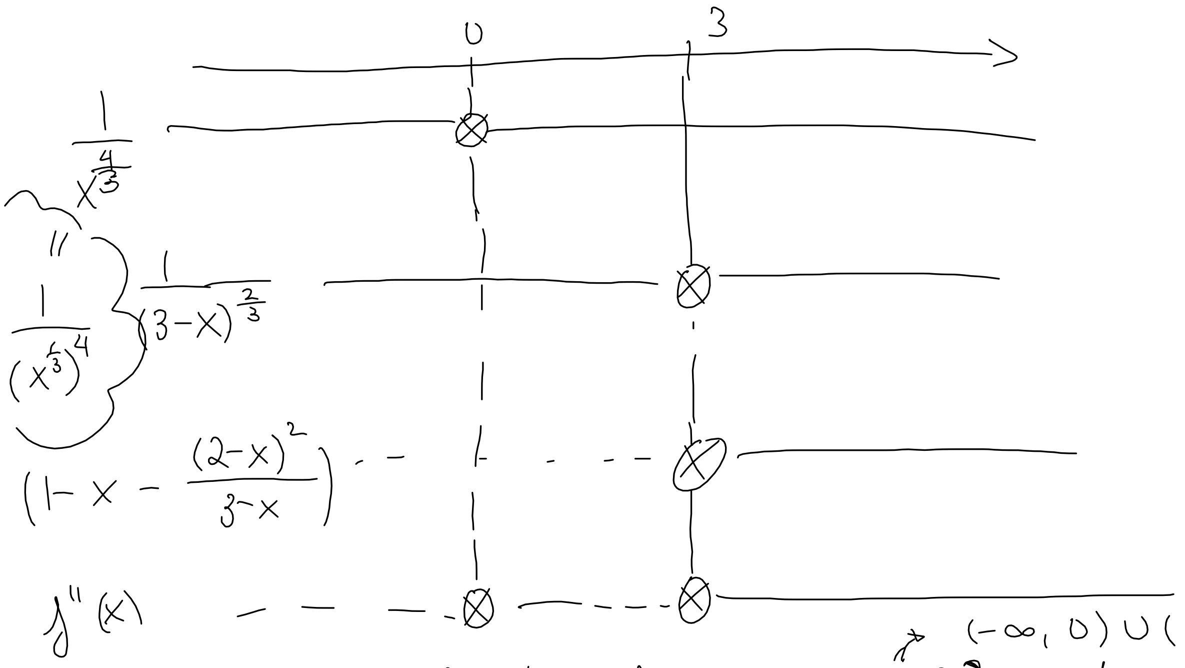
Så $f''(x) \neq 0$ for alle x, men f'' er ikke definert $x = 0$ og $x = 3$.

Setter inn tall for å finne fortegn parantes:

$x < 3$: Sett inn $x = 0$; $1 - \frac{4}{3} < 0$

Sett inn $x = 4$ for å finne fortegn for $x > 3$:

$-3 + 4 > 0$



$(-\infty,0)\cup(0,3)$

Dermed er f konkav for $x \in (-\infty, 3)$ og f er konveks for $x \in (3, \infty)$.

d) <u>Vertikale asymptoter</u>: f er kont. og definert overalt, så vi har ingen vertikale asymptoter.

<u>Skråasymptoter</u>: Når $x \to \pm\infty$:

i) $$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(3x^2 - x^3)^{\frac{1}{3}}}{x}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{3x^2 - x^3}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{3}{x} - 1\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \underline{-1}$$

ii) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)+\underbrace{x}_{\underbrace{-(-1)x}_{+x}}\right] = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[(3x^2-x^3)^{\frac{1}{3}}+x\right]$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{(3x^2-x^3)^{\frac{1}{3}}}{x}+1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{3}{x}-1\right)^{-\frac{2}{3}}\left(\cancel{-}\frac{3}{\cancel{x^2}}\right)}{\cancel{-}\frac{1}{\cancel{x^2}}}$$

"$\frac{0}{0}$": L'Hôpital

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3}{x}-1\right)^{-\frac{2}{3}} = \underline{1}$$

<u>Så</u>: $y=-x+1$ er en skråasymptote når $x\to\infty$ og når $x\to-\infty$.