Seksjon 5.1

1. Finn definisjonsmengden:

a) $f(x) = \sqrt{x+1}$

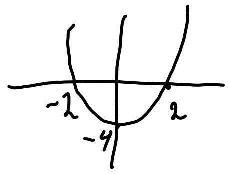
b) $f(x) = \ln(x^2 - 4)$

c) $f(x) = \ln(\sin x)$

Reelle funksjoner.

a) $x+1$ må være større eller lik 0.
$x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1.$
$D_f = [-1, \infty)$

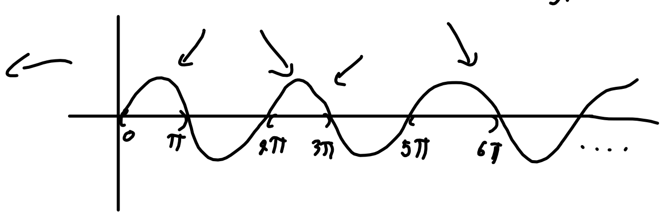
b) Husk: $\ln(y)$ definert for $y > 0$
Får ulikheten $x^2 - 4 > 0$
$\rightarrow (x-2)(x+2) > 0.$ (se på grafen)

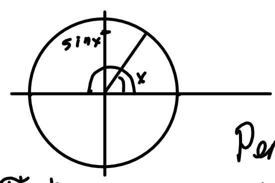


$\Rightarrow x > 2$ eller $x < -2$, da er $x^2 - 4 > 0.$

$D_f = (-\infty, -2) \cup (2, \infty).$

c) $f(x) = \ln(\sin x)$. Må ha $\sin x > 0$





$x \in [0, 2\pi)$
$\Rightarrow x \in (0, \pi)$

Periodisk med 2π.

$\Rightarrow x \in (2\pi \cdot k, \pi + 2\pi \cdot k)$, $k \in \mathbb{Z}.$

$\Rightarrow D_f = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (2\pi k, \pi + 2\pi k).$

andre måter å skrive D_f:

$= \bigcup_{k=-\infty}^{\infty}$ ——— " ———

$= \left(\bigcup_{k=0}^{\infty} (2\pi k, \pi + 2\pi k)\right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (-2\pi k, \pi - 2\pi k)\right)$

5 Vise at funksjonene er kontinuerlige:

a) $f(x) = 2x+1$, $x = 2$.

Bruke Def. 5.1.1:

$f(x)$ er kontinuerlig i $x = a \in D_f$ hvis $\forall \varepsilon > 0$, så finnes en $\delta > 0$ s.a. $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

La $\varepsilon > 0$. Skal finne passende δ.

Skal vise: hvis $|x-2| < \delta \Rightarrow$

$\underbrace{|f(x) - f(2)| < \varepsilon}$.

$$|2x+1-5| = |2x-4| = |2(x-2)| = \underline{2|x-2|}.$$

vil at dette $< \varepsilon$

Kan velge $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Får da:

$|x-2| < \delta = \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow 2|x-2| < 2 \cdot \left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon$. Ferdige.

5 h) $f(x) = x^2$ i $x = 3$.

$\forall \varepsilon > 0$: må finne $\delta > 0$ s.a.

$$|x-3| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(3)| < \varepsilon.$$

$|x^2 - 3^2| = |(x-3)(x+3)|$. Hvordan velge δ?

Svar at: $= |x-3| \cdot |x+3|$

kontroll ikke kontroll

Gitt en δ: $|x-3| < \delta$

$\Leftrightarrow$ $-\delta < x - 3 < \delta$ $\quad |+6$

$\Rightarrow$ $6-\delta < x+3 < \delta + 6$.

Antar først: $\delta < 6$.

$\Rightarrow$ 2. $\underline{|x+3| < |\delta + 6|}$. (antatt at $|x-3| < \delta$ 1.)

$\Rightarrow$ $|x^2 - 3^2| = |x-3| \cdot |x+3|$

$< \delta \cdot |\delta + 6| = \delta(\delta + 6)$.

Vil at $\delta(\delta+6) < \varepsilon$. Må velge en passende δ slik at ulikheten over gjelder. Det er klart at en sånn δ eksisterer. $\square$

f): $f(x) = \dfrac{x+1}{x+3}$ i $x=0$.

Velg $\varepsilon > 0$: $|x-0| < \delta$

$\Rightarrow |f(x) - f(0)| < \varepsilon$.

$$|x| < \delta \Rightarrow \left| \frac{x+1}{x+3} - \frac{1}{3} \right| < \varepsilon.$$

$$\left| \frac{x+1}{x+3} - \frac{1}{3} \right| = \left| \frac{3(x+1) - (x+3)}{3(x+3)} \right| = \left| \frac{2x}{3(x+3)} \right|$$

$$= \frac{2}{3} \frac{|x|}{|x+3|}.$$

$$|x| < \delta$$

$\Leftrightarrow$ Positivt $-\delta < x < \delta$ $\quad | +3$

$3 - \delta < x + 3 < \delta + 3$ $\quad |$ Antar $\delta < 3$

$\Rightarrow |x+3| > 3 - \delta$

$$|f(x) - f(0)| = \frac{2}{3} \frac{|x|}{|x+3|} = \frac{2}{3} \frac{\delta}{3-\delta}$$

Antar videre: $\delta < 1 \Rightarrow 3 - \delta > 2$.

$$\frac{2}{3} \frac{\delta}{3-\delta} < \frac{\cancel{2}}{3} \cdot \frac{\delta}{\cancel{2}} = \frac{\delta}{3} \quad (< \varepsilon).$$

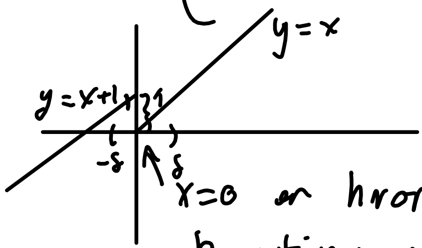
Velger $\delta = 3\varepsilon$. $\Rightarrow \dfrac{\delta}{3} = \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(0)| < \varepsilon$.

Må faktisk sette $\delta = \min(3\varepsilon, 1)$.

$\Rightarrow \delta < 1$ og $\dfrac{\delta}{3} \leq \varepsilon$.

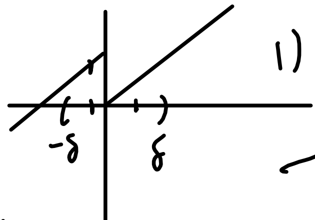
6. Vis at funksjonen ikke er kontinuerlig.

a) $$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{for } x<0 \\ x & \text{for } x \geq 0. \end{cases}$$



$x=0$ er hvor $f(x)$ ikke er kontinuerlig.

Beviset går ved motsigelse.
Anta at $f(x)$ er kontinuerlig i 0.
Velg $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Da finnes en δ slik at
$|x| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \frac{1}{2}$.
$|x| < \delta \Leftrightarrow x \in (-\delta, \delta)$. Hva skjer hvis vi velger $x = -\frac{\delta}{2} \Rightarrow f(x) = x+1 = -\frac{\delta}{2}+1$.



1) Vi vil at $-\frac{\delta}{2}+1 > \frac{1}{2}$.

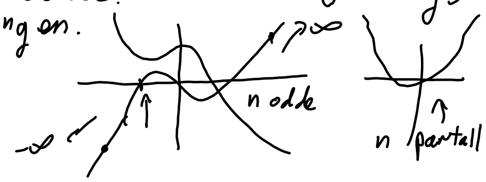
Hvis vi velger $x = \frac{\delta}{2} \Rightarrow f(x) = x = \frac{\delta}{2}$.
Per antagelse: $\left|1 - \frac{\delta}{2}\right| < \frac{1}{2}$ og $\frac{\delta}{2} < \frac{1}{2}$.
$1 - \frac{\delta}{2} < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{\delta}{2} \Rightarrow 1 < \delta. \Leftrightarrow \underline{\delta > 1.}$
$\frac{\delta}{2} < \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{\delta < 1.}$ Umulig δ.
$\Rightarrow f(x)$ diskontinuerlig i $x=0$.

Seksjon 5.2.

6) Vis at ethvert polynom av odde grad har minst èn reell rot.

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$

n er odde. Bruke skjæringssetningen.



: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig og $f(a)$ og $f(b)$ har motsatt fortegn. Da finnes en $c \in (a,b)$ s.a. $f(c)=0$.

Ser på når $x \to \infty$:

$$\frac{f(x)}{x^{n-1}} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0}{x^{n-1}}$$

$$= a_n x + \left(a_{n-1} + a_{n-2}\cdot\frac{1}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^{n-1}}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^{n-1}} = \lim_{x\to\infty}\Big(\underbrace{a_n x}_{\to \pm\infty} + \underbrace{\left(a_{n-1} + a_{n-2}\cdot\frac{1}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^{n-1}}\right)}_{\to a_{n-1}}\Big)$$

avhengig av fortegn til a_n.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^{n-1}} = \begin{cases}\infty & \text{hvis } a_n > 0\\ -\infty & \text{hvis } a_n < 0\end{cases}$$

Deler på x^{n-1}, der $n-1$ er et partall.

Så $\lim_{x\to\infty} x^{n-1} = \infty.$ $\Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = \begin{cases}\infty & \text{hvis } a_n>0\\ -\infty & \text{hvis } a_n<0.\end{cases}$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x^{n-1}} = \lim_{x\to-\infty} a_n x + \underbrace{\left(a_{n-1} + a_{n-2}\cdot\frac{1}{x} + \dots a_0\frac{1}{x^{n-1}}\right)}_{\to a_{n-1}}$$

$= \pm\infty$ avhengig av fortegn.

$\lim_{x\to-\infty} x^{n-1} = \infty$ fordi $n-1$ er et partall.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x^{n-1}} = \begin{cases}-\infty & \text{hvis } a_n > 0\\ \infty & \text{hvis } a_n < 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = \begin{cases}-\infty & \text{hvis } a_n > 0\\ \infty & \text{hvis } a_n < 0.\end{cases}$$

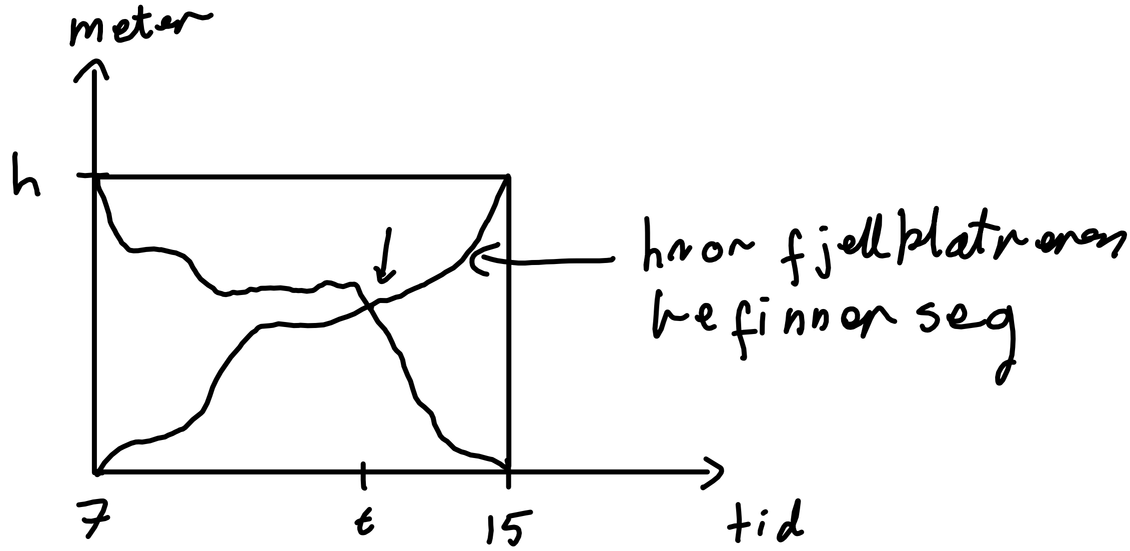
$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ og $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ hvis $a_n>0$.

$\Rightarrow$ Det finnes $a<0$ slik at $f(a)<0$.
Det finnes $b>0$ slik at $f(b)>0$.

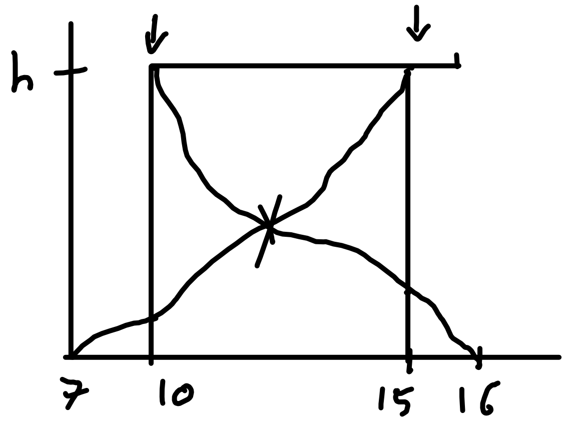
$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ gitt ved polynomet.
$f(a)$ og $f(b)$ har motsatt fortegn.
$\Rightarrow$ det finnes en $c \in (a,b)$ s.a. $f(c)=0$

Tilsvarende for $a_n < 0$.

7a)



Det vil alltid være et skjæringspunkt.
Det følger av skjæringssetningen.

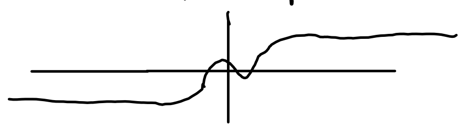


Samme argument.

5.3

3) a) Anta at $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ er kontinuerlig og $\lim_{x\to\infty} f(x)$ og $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ eksisterer. Skal vise at f er begrenset.

Begrenset: Det finnes en $M\in\mathbb{R}$ slik at $|f(x)|\leq M$ for alle $x\in\mathbb{R}$.



La $a=\lim_{x\to\infty} f(x)$, og $b=\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

$\forall\, \varepsilon>0$ finnes en $N\in\mathbb{R}$ slik at $|f(x)-a|<\varepsilon$ når $x\geq N$. } Per def.

F.eks velger $\varepsilon=1$. Da finnes en slik N. $|f(x)-a|<1$ når $x\geq N$.

$-1<f(x)-a<1$ når $x\geq N$.

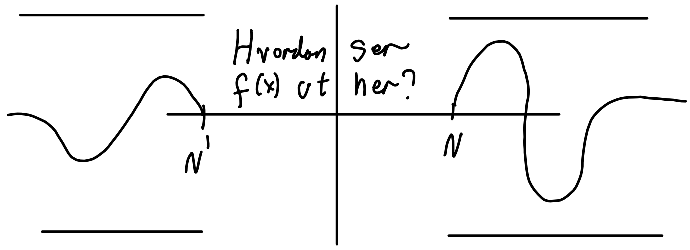
$\Rightarrow$ $f(x)<1+a$, $f(x)>a-1$.

M_a $|f(x)|<\underbrace{\min(|1+a|,|a-1|)}_{M_a}$ når $x\geq N$.

Tilsvarende når $x\to-\infty$. Det finnes en $N'\in\mathbb{R}$ slik at $|f(x)-b|<1$ når $x\leq N'$. Ved samme argumentasjon:

$|f(x)|<\underbrace{\min(|1+b|,|b-1|)}_{M_b}$ når $x\leq N'$.

Når $x\geq N$ eller $x\leq N'$, så er $|f(x)|<\max(M_b,M_a)$.



$[N',N]$ begrenset intervall.
$\Rightarrow$ f har et max og min punkt.
$\Rightarrow$ f begrenset på $[N,N']$.

$(-\infty,N']\cup[N',N]\cup(N,\infty)=\mathbb{R}$

begrenset av $\max(M_a,M_b)$. Betyr at f er begrenset på hele $\mathbb{R}$.