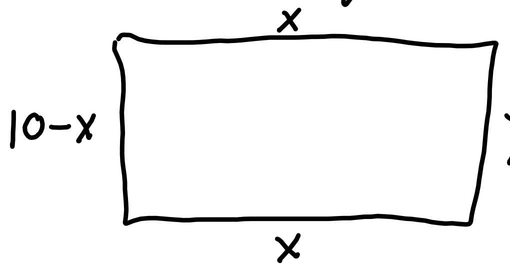
Kapittel 7

7.1 Maksimum og minimumsproblem.

Eks: 20 cm ståltråd ———— 20 cm

Skal bøyes til et rektangel:



Oppgave: Hva er det største arealet rektangelet kan få?

Løsning: Setter x = lengden til nederste kant. Omkretsen er 20 cm.

Skal uttrykke y med.

Omkretsen $= 2x + 2y = 20.$

$\Rightarrow 2y = 20 - 2x \Rightarrow y = 10 - x.$

Hva er arealet $= x(10-x).$

Får en arealfunksjon $A(x) = x(10-x).$

Må finne et makspunkt til $A(x).$

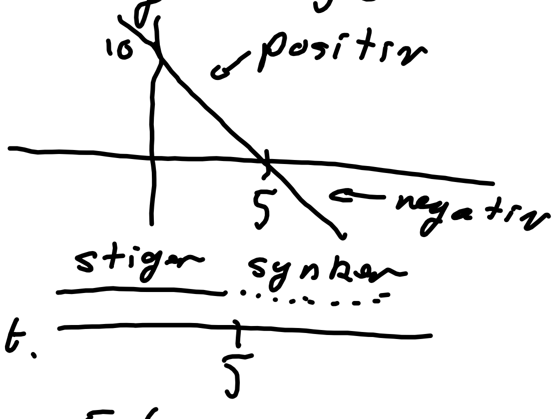
Definert for $x \in (0,10).$ $A : (0,10) \to \mathbb{R}.$

$A(x) = 10x - x^2$

$A'(x) = 10 - 2x.$

Nullpunkt: $x = 5.$

Fortegnslinje:



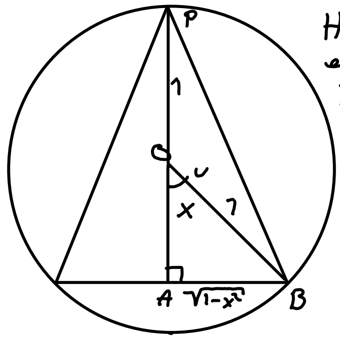
Da $x = 5$ et toppunkt.

Maksverdien: $A(5) = 5 \cdot (10-5) = 25.$

Svaret blir da: må bøyes til et kvadrat.

Eks: 7.1.2

Hva er det største arealet en likebeint trekant kan ha dersom den er innskrevet i en sirkel av radius 1.



Høyden er $h = 1+x$

Løsning:

Definerer x = lengden fra sentrum ned til grunnlinjen. $x \in (-1,1)$.

ΔAOB er rettvinklet og $OB = 1$. $OA = x$.

Pytagoras $AB^2 + x^2 = 1$. $AB = \sqrt{1-x^2}$.

AB er halve grunnlinja G. $\Rightarrow G = 2\sqrt{1-x^2}$.

Mangler bare høyden.

$$A(x) = \frac{G \cdot h}{2} = \frac{2\sqrt{1-x^2}\cdot(1+x)}{2} = (1+x)\sqrt{1-x^2}.$$

Finne toppunktet til $A(x)$.

Deriverer:

$$A'(x) = 1\cdot\sqrt{1-x^2} + (1+x)\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \sqrt{1-x^2} - \frac{(1+x)x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$= \frac{(1-x^2)-(1+x)x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{1-x^2-x-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-x-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

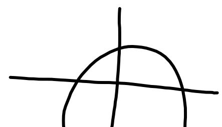
Nullpunkt når telleren er 0.

andregradsformel gir $x = \frac{1}{2}$, $x = -1$.

Fortegnslinj:

stigen

$-1 \quad 0 \quad \frac{1}{2}$



$x = \frac{1}{2}$ vil være et toppunkt.

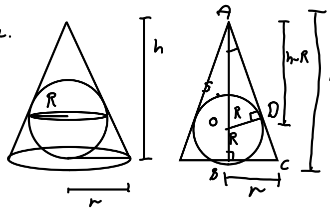
Det maksimale arealet er:

$$A\left(\frac{1}{2}\right) = \left(1+\frac{1}{2}\right)\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Eks: En kule med radius R er innskrevet i en regulær kjegle. Hva er det minste volumet kjeglen kan ha.

h kan nærme seg 2R.



ΔABC og ΔADO er formlike.

$AB : BC = AD : DO$. $\quad : (*)$

$AB = h$, $BC = r$. $AO = h - R$

$OD = R$. Pytagoras for å finne AD.

$AD^2 + OD^2 = AO^2$.

$AD^2 = AO^2 - OD^2 = (h-R)^2 - R^2 = h^2 - 2hR + R^2 - R^2$

$= h^2 - 2hR$.

$AD = \sqrt{h^2 - 2hR}$.

$(*)$: $\dfrac{h}{r} = \dfrac{\sqrt{h^2 - 2hR}}{R}$. Får et forhold som relaterer r til h.

Volumet til kjeglen:

$V = \dfrac{\pi}{3} r^2 h$. Prøve å uttrykke dette med èn ukjent, nemlig h.

$(*)$ $\dfrac{h^2}{r^2} = \dfrac{h^2 - 2hR}{R^2}$ (skal løse for r)

$\dfrac{r^2}{h^2} = \dfrac{R^2}{h^2 - 2hR} \quad \Big| \cdot h^2$

$r^2 = \dfrac{R^2 h^2}{h^2 - 2hR} \Rightarrow r = \dfrac{Rh}{\sqrt{h^2 - 2hR}}$.

$V = \dfrac{\pi}{3} r^2 h = \dfrac{\pi}{3}\left(\dfrac{R^2 h^2}{h^2 - 2hR}\right) h$.

$= \dfrac{\pi \cdot R^2 h^3}{3h(h - 2R)}$

$= \dfrac{\pi R^2 h^2}{3(h - 2R)}$.

$V(h) = \dfrac{\pi R^2 h^2}{3(h - 2R)} \quad \Big| \leftarrow h \in (2R, \infty)$

$\underline{V'(h)} = \dfrac{\pi R^2}{3}\left(\dfrac{h^2}{h - 2R}\right)' = \dfrac{\pi R^2}{3}\left(\dfrac{-h^2 + 2h(h-2R)}{(h-2R)^2}\right)$

$= \dfrac{\pi R^2}{3}\left(\dfrac{-h^2 + 2h^2 - 4hR}{(h-2R)^2}\right)$

Denne er 0 når telleren er 0.

$-h^2 + 2h^2 - 4hR = -4hR + h^2 = 0$.

$h(4R - h) = 0$. $\quad h = 0$, $h = 4R$.

$h \in (2R, \infty)$. Må egentlig sjekke grensene.

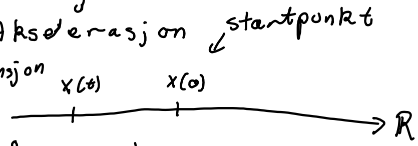
$h = 4R$ er et minimum. Fortegnet er viktig.

$\underline{V(4R) = \dfrac{8}{3}\pi R^3}$. $\leftarrow$ Minimale volumet.

7.2 Koblede hastigheter

- Posisjon
- Hastighet
- Akselerasjon

1-dimensjon



Ser på en funksjon $x(t)$ avhengig av tiden t: måler posisjonen til et punkt.

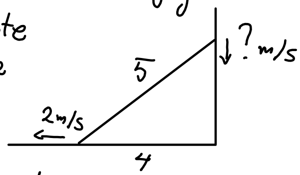
$x(t)$ = posisjon

$x'(t)$ = hastigheten til punktet ved tiden t.

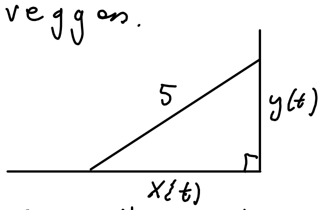
$x''(t)$ = akselerasjon ———— || ————

Eks: En 5 meter lang stige står mot en husvegg

Drar den nederste delen mot venstre med en hastighet på 2m/s.



Hvor fort glir den andre enden nedover, når den nederste enden er 4 m fra husveggen.



Finne en relasjon mellom $x(t)$ og $y(t)$.

$x(t)^2 + y(t)^2 = 25.$

Interessente i $y'(t)$ når t er slik at $x(t) = 4$. Vet at $x'(t) = 2 \ \forall t$.

Deriverer begge sider (mhp t).

$$2x'(t)x(t) + 2y'(t)y(t) = 0.$$

$$y'(t)y(t) = -x'(t)x(t).$$

$$y'(t) = -\frac{x'(t)x(t)}{y(t)}.$$

Vet at $x'(t) = 2$, $x(t) = 4$.

$$y(t)^2 + x(t)^2 = 25.$$

$$y(t)^2 + 16 = 25$$

$$y(t)^2 = 9. \Rightarrow y(t) = 3.$$

$$\Rightarrow y'(t) = \frac{-2 \cdot 4}{3} = -\frac{8}{3} \text{ m/s}.$$