7.4: Omvendte funksjoner

Utgangspunkt: $y = f(x)$

Omvendt funksjon g: $g(y) = x$.

$g(f(x)) = x$

Eks: $f(x) = 2x+1$.

$y = 2x+1$ Løser for x.

$\frac{y-1}{2} = x$. Har funnet g:

$g(y) = \frac{y-1}{2}$.

$2x+1 = -3$. Likning:

g gir den "generelle" løsningen.

$y = -3 \Rightarrow x = g(-3) = \frac{-3-1}{2} = -2$.

Gitt funksjon $f : D_f \longrightarrow V_f$.

D_f = definisjonsmengden

V_f = verdimengden

$= \{ f(x) \mid x \in D_f \}$.

g omvendte funksjonen til f:

$g : V_f \to D_f$. $(D_g = V_f, \ V_g = D_f)$.

g er den inverse funksjonen til f.

$g = f^{-1}$. $\left(\neq \frac{1}{f} \right)$

For at inversen skal eksistere må f være <u>injektiv</u>:

Det vil si: alle verdier $y \in V_f$ er verdien til nøyaktig <u>èn</u> $x \in D_f$.

Med andre ord: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Kontrapositivt: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Definisjon:

Anta at $f : D_f \longrightarrow V_f$ er injektiv.
Da definerer vi den omvendte funksjonen som: $g : V_f \longrightarrow D_f$ der $g(y) =$ den unik verdien $x \in D_f$ slik at $f(x) = y$.
Kaller den f^{-1}.

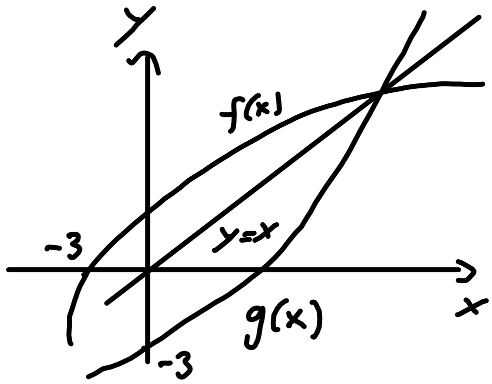
Eks: $f(x) = \ln(x+3)$.
er injektiv. $D_f = (-3, \infty)$.

$y = \ln(x+3)$.

$e^y = e^{\ln(x+3)} = x+3$

$x = e^y - 3$.

Så $g(y) = e^y - 3$.

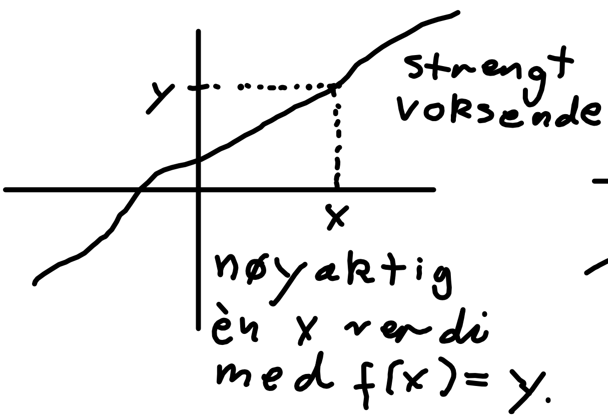


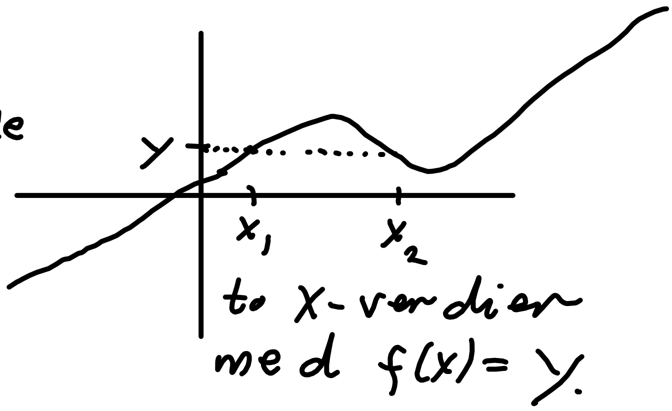
Grafen til g er speilingen av grafen til f over linjen $y = x$.

Vi ser på funksjoner $f:[a,b] \to \mathbb{R}$.

f er injektiv $\iff$ strengt voksende eller strengt avtagende.

Voksende: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.





Teorem: Hvis $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ er kontinuerlig og strengt voksende Da er den omvendte funksjonen $g : V_f \longrightarrow [a,b]$ strengt voksende og kontinuerlig.

$V_f = [f(a), f(b)]. \Rightarrow g : [f(a), f(b)] \longrightarrow [a,b].$

Hvis f er kontinuerlig og strengt monoton, og deriverbar i et punkt $x \in D_f$ slik at $f'(x) \neq 0$,
La $g = f^{-1}$, $y = f(x)$, da er $g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$.

Eks: $f(x) = x + e^x$. Er injektiv.
Prøver å finne den omvendte funksjonen: $y = x + e^x$. Umulig å løse.
Kan studere f^{-1} likevel.
f er deriverbar: $f'(x) = 1 + e^x$.
$f'(0) = 1 + e^0 = 2$. $y = f(0) = e^0 = 1$.
Da er den deriverte til f^{-1}:

$$Df^{-1}(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}.$$

Ser at $1 + e^x = f'(x) > 0$. $\Rightarrow$ Kan alltid finne den deriverte til f^{-1}.

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$, der $y = f(x)$, g inversen.

Bevis:

Per definisjon: $g'(y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{g(y+\Delta y) - g(y)}{\Delta y}$.

Definerer $\Delta x = g(y+\Delta y) - g(y)$.

$f(x+\Delta x) - f(x) = f((g(y+\Delta y) - g(y)) + g(y)) - f(x)$

$g(f(x)) = x$. $= f(g(y+\Delta y)) - f(x)$

$(f(g(y)) = y.)$ $\rightarrow = y + \Delta y - y = \Delta y$.

$$g'(y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{g(y+\Delta y) - g(y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{f(x+\Delta x) - f(x)}$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x)}.$$

Men g er kontinuerlig. Så $\Delta y \to 0 \Rightarrow \Delta x \to 0$

7.5 Cotangens

Definisjon: $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

forutsetter $\sin x \neq 0$.

$$= \frac{1}{\tan x}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \frac{1}{\tan x} = \frac{1 \cdot \cos x}{\frac{\sin x}{\cancel{\cos x}} \cdot \cancel{\cos x}} = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

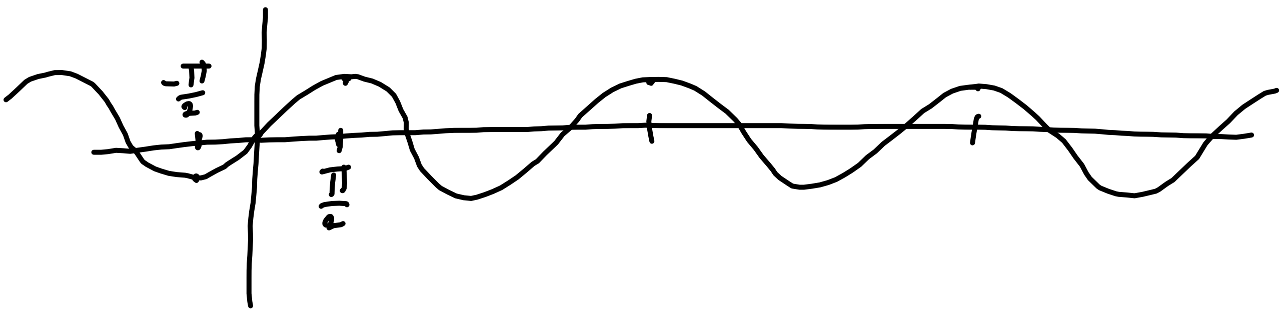
Deriverte: $D\left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right) = \dfrac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x}$

$$= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}$$

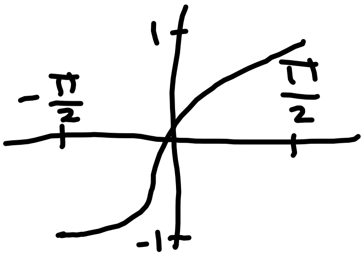
$$= \underline{\underline{\frac{-1}{\sin^2 x}}}$$

7.6 Arcusfunksjoner

Skal finne invers til $\sin x$.



Bruker et triks: innskrenke definisjonsområdet.



sinus på $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,
Her er sinus injektiv.

Definisjon:

La $f:[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\to\mathbb{R}$ være definert ved $f(x)=\sin x$. Da er f injektiv, og har en invers $f^{-1}:[-1,1]\to[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. Denne kalles arcus sinus,

$f^{-1}(x)=\arcsin(x)$.

$\sin(\arcsin(x))=x$. for alle $x\in[-1,1]$.

Men generelt: $\arcsin(\sin(x))=y$, som ikke nødvendigvis er x.

Men likheten gjelder når $x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

Deriverte til arcsin.

7.6.2 Setning:

Funksjonen arcsin er kontinuerlig, strengt voksende, med derivert
$$D[\arcsin(x)] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Regner ut den deriverte:

Husk: $g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ der $y = f(x)$.

1) $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \xrightarrow{1} \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$.

2) $g(y) = \arcsin(y)$.

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cos x}, \begin{pmatrix} x = \arcsin(y) \\ y = \sin x \end{pmatrix}$$

$y = \sin x$. Husk: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.
$$\Rightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x.$$
$$\Rightarrow \cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}.$$

Kan $\cos x$ være negativ? Ikke på $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Men $\sin x = y$. $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$
$$= \sqrt{1-y^2}.$$

$$g'(y) = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

$$D[\arcsin(x)] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x) + C.$$

Definisjon:

i) La $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ være definert ved $f(x)=\cos x$. f er injektiv og inversen kalles arcus cosinus. $f^{-1}(x)=\arccos(x)$.

ii) La $f:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$ være definert ved $f(x)=\tan x$. f injektiv. Inversen kalles arcus tangens $f^{-1}(x)=\arctan(x)$.

tan x: