Komplekse tall

Historisk bakgrunn: Cardanos formel (1545)

$x^3 + px = q \qquad (q > 0)$ har positiv løsning

$$x = \sqrt[3]{D + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{D - \frac{q}{2}} \quad \text{der} \quad D = \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}$$

Greit eksempel

$x^3 - 3x = 2 \qquad [p = -3, \; q = 2]$

$$D = \sqrt{\left(\frac{-3}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{2}\right)^2} = \sqrt{(-1) + 1} = 0$$

$$x = \sqrt[3]{0 + \frac{2}{2}} - \sqrt[3]{0 - \frac{2}{2}} = \sqrt[3]{1} - \sqrt[3]{-1} = 1 - (-1) = \underline{\underline{2}}$$

Mystisk eksempel

$x^3 - 15x = 4$ $\quad [p = -15,\ q = 4]$

$$D = \sqrt{\left(\frac{-15}{3}\right)^3 + \left(\frac{4}{2}\right)^2} = \sqrt{(-5)^3 + 2^2} = \sqrt{-125 + 4} = \sqrt{-121}$$

Hmm... Regner videre med regelen $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

$$D = \sqrt{(-1) \cdot 121} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{121} = \sqrt{-1} \cdot 11$$

Dåp: $\sqrt{-1} = i$. Da er $D = i \cdot 11 = 11i$

Videre: $x = \sqrt[3]{D + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{D - \frac{q}{2}} = \sqrt[3]{11i + 2} - \sqrt[3]{11i - 2}$

Prøving og feiling gir at

$$(i+2)^3 = (i+2)(i+2)(i+2) = (i+2)(\overset{-1}{i^2} + 2i + 2i + 4)$$

$$= (i+2)(4i+3) = (4\overset{-1}{i^2} + 3i + 8i + 6) = 11i + 2$$

$(i-2)^3$ = tilsvarende $= 11i - 2$

Altså: $x = (i+2) - (i-2)$

$$= \cancel{i} + 2 - \cancel{i} + 2 = \underline{\underline{4}}$$

Generelt om komplekse tall

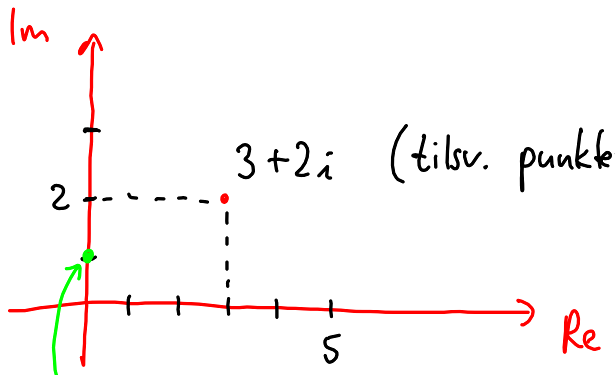
Et komplekst tall er på formen

$$z = a + bi$$

der a og b er reelle tall, og vi har $i^2 = -1$.

a kalles realdelen til z, og vi skriver $a = \mathrm{Re}(z)$
b " imaginærdelen — " — $b = \mathrm{Im}(z)$

Vi kan tolke komplekse tall som punkter i planet:

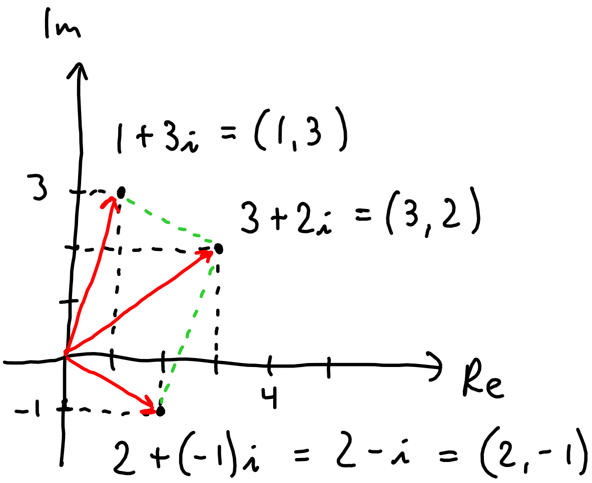


$3+2i$ (tilsv. punktet $(3,2)$)

$0 + 1i = i$ (tilsv. punktet $(0,1)$)

Addisjon og subtraksjon av komplekse tall tilsvarer addisjon og subtraksjon av vektorer.

eks.



Regner vanlig:

$(1+3i) + (2-i)$

$= 3 + 2i$

Men hva med multiplikasjon? Hvis vi regner "vanlig":

$$\underbrace{(2-3i)}_{\substack{\text{tilsv.}\\ \text{punktet}\\ (2,-3)}} \cdot \underbrace{(-5+2i)}_{\substack{\text{tilsv.}\\ \text{punktet}\\ (-5,2)}} = -10+15i+4i-6i^{2}$$

$^{-1}$

$$= -4 + \underbrace{19i}_{}$$

tilsv. punktet $(-4, 19)$

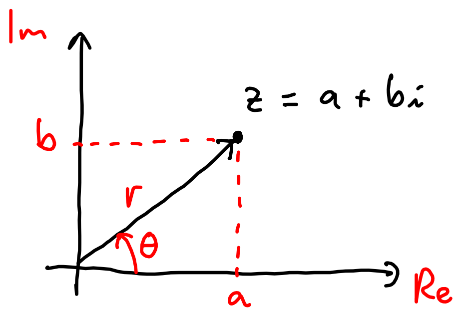
Generelt:

$$(a+bi)\cdot(c+di) = ac + bci + adi + bd\,i^{2}$$

$^{-1}$

$$\overset{\text{def}}{=} (ac-bd) + (ad+bc)i$$

For å finne den geometriske tolkningen, bruker vi polarkoordinater r og θ:



r = avstand fra z til origo

$= \sqrt{a^2 + b^2}$

θ = vinkel mot klokken regnet fra første akse, målt i RAD

Skriver da også $z = re^{i\theta}$ ("eksponentiell form"). Grunn: Senere!

Vi har $\frac{a}{r} = \cos\theta$, så $a = r\cos\theta$

$\frac{b}{r} = \sin\theta$, så $b = r\sin\theta$

Ergo:

$$z = a + bi = (r\cos\theta) + (r\sin\theta)i = re^{i\theta}$$

Uttrykket i midten kalles z på <u>polar form</u>.

r kalles <u>modulus</u> (eller absoluttverdi) til z

θ kalles et <u>argument</u> til z

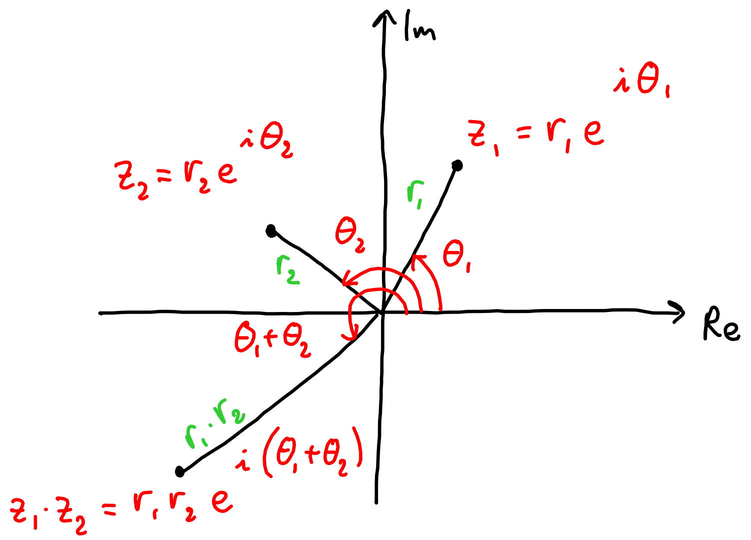
Teorem 3.2.3 (Caspar Wessel, 1797)

Hvis $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ og $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$

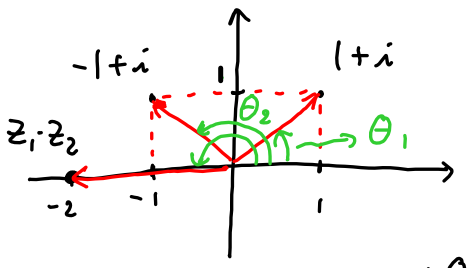
så er

$$z_1 \cdot z_2 = (r_1 r_2) e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

Bevis utsettes. Illustrasjon:



eks $z_1 = 1 + i \qquad z_2 = -1 + i$



$\theta_1 = \frac{\pi}{4} \qquad r_1 = \sqrt{2}$

$\theta_2 = \frac{3\pi}{4} \qquad r_2 = \sqrt{2}$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot \sqrt{2} \cdot e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$$

$$= \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}} = 2e^{i\frac{\pi}{4} + i\frac{3\pi}{4}}$$

$$= 2e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}\right)} = 2e^{i\pi}$$

Dette tilsvarer at

$$z_1 \cdot z_2 = (1+i)\cdot(-1+i) = -1 - i + \overset{-1}{i^2} + i = \underline{\underline{-2}}$$

tilsvarer punktet $(-2, 0)$

Teorem 3.2.5 For komplekse tall z_1, z_2 og z_3 gjelder

(i) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \qquad z_1 z_2 = z_2 z_1$

(ii) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \qquad (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$

(iii) $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

(iv) $z_1 + 0 = z_1 \qquad z_1 \cdot 1 = z_1$

(v) For hvert komplekst tall z fins komplekse tall $-z$ og w slik at $z + (-z) = 0$ og $zw = 1$ (hvis $z \neq 0$)

Bevis Samme teknikk på alle. Eksempel:

(i) La $z_1 = a_1 + b_1 i$ og $z_2 = a_2 + b_2 i$. Da

$$z_1 + z_2 \overset{\text{def}}{=} (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i$$
$$\overset{\text{vet}}{=} (a_2 + a_1) + (b_2 + b_1) i$$
$$= z_2 + z_1. \quad \square$$

Vi husker at

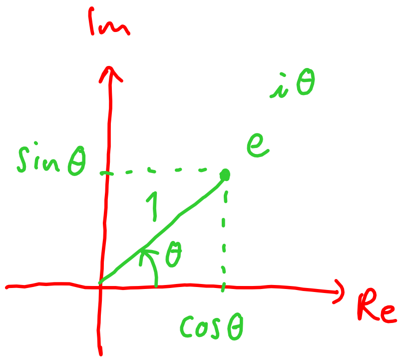
$$z = a + bi = (r\cos\theta) + (r\sin\theta)i = re^{i\theta}$$

Ergo

$$r(\cos\theta + \sin\theta \cdot i) = re^{i\theta}$$

Dvs.

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$$



Bevis for Wessels teorem (3.2.3)

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i\theta_1} e^{i\theta_2}$$

$$= r_1 r_2 (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

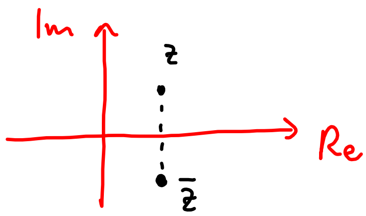
$$= r_1 r_2 \left[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + (\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)i\right]$$

vet

$$= r_1 r_2 \left[\cos(\theta_1+\theta_2) + \sin(\theta_1+\theta_2)i\right] = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}. \quad \square$$

(Brukte summeformler for sinus og cosinus)

Definisjon Den konjugerte av $z = a + bi$ er $\bar{z} = a - bi$



eks. $z = 2 + 3i$ gir $\bar{z} = 2 - 3i$

$$\overline{5 - 2i} = 5 + 2i$$

Merk: $z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + \cancel{abi} - \cancel{abi} + b^2$

$$= a^2 + b^2 = r^2$$

Så hvis $z = re^{i\theta}$, er $\boxed{z\bar{z} = r^2}$

Teorem 3.1.5

(i) $\bar{z} + \bar{w} = \overline{z + w}$ (iii) $\bar{z} \cdot \bar{w} = \overline{zw}$

(ii) $\bar{z} - \bar{w} = \overline{z - w}$ (iv) $\dfrac{\bar{z}}{\bar{w}} = \overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)}$

Bevis: Oppgave 3.1.8

Triks for divisjon

For å finne $\frac{z}{w}$, gang med $\bar{w}$ oppe og nede på brøken.

eks $\frac{2+3i}{5-2i} = \frac{(2+3i)\cdot(5+2i)}{(5-2i)\cdot(5+2i)} = \frac{10+15i+4i-6}{25-\cancel{10i}+\cancel{10i}+4}$

$= \frac{4+19i}{29} = \frac{4}{29} + \frac{19}{29}i$

Definisjon Hvis $z = a+bi$, definerer vi

$$e^z = e^{a+bi} \overset{def}{=} e^a \cdot e^{ib}$$

Teorem $e^z \cdot e^w = e^{z+w}$ for alle komplekse tall z og w.

Bevis La $z = a+bi$ og $w = c+di$. Da:

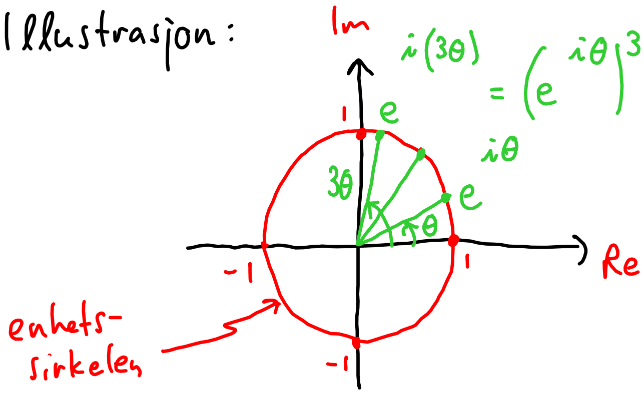
$$\begin{aligned} e^z e^w &= e^{a+ib} \cdot e^{c+id} \\ &\overset{\text{def}}{=} e^a e^{ib} \cdot e^c e^{id} \\ &\overset{\text{teo. 3.2.5}}{=} (e^a e^c)(e^{ib} e^{id}) \\ &\overset{\text{Wessel}}{=} e^{a+c} e^{i(b+d)} \\ &\overset{\text{def}}{=} e^{(a+c)+(b+d)i} = e^{z+w}. \quad \square \end{aligned}$$

De Moivres formel For alle naturlige tall n er

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{i(n\theta)}, \quad \text{så}$$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Illustrasjon:



eks. Uttrykk $\cos 2\theta$ og $\sin 2\theta$ ved $\cos\theta$ og $\sin\theta$

Løsn. $\cos 2\theta + i\sin 2\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^2$

$$= (\cos\theta + i\sin\theta)\cdot(\cos\theta + i\sin\theta)$$

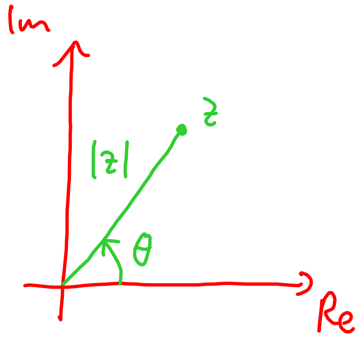
$$= \cos^2\theta + i\sin\theta\cos\theta + i\cos\theta\sin\theta - \sin^2\theta$$

$$= (\cos^2\theta - \sin^2\theta) + (2\sin\theta\cos\theta)\,i$$

Ergo $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ og $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$. $\square$

Geometri i det komplekse planet $\mathbb{C}$

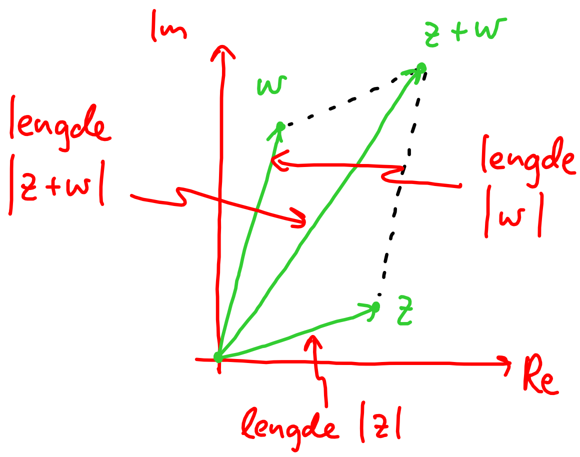
<u>Utgangspunkt</u>: Hvis $z = re^{i\theta}$, så er r avstanden fra z til origo, dvs. lengden av vektoren z.
Vi skriver ofte $r = |z|$.



Kompleks trekantulikhet

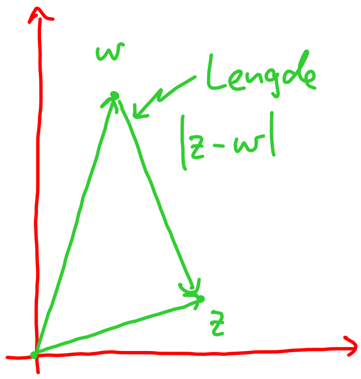
For alle $z, w \in \mathbb{C}$ gjelder

$$|z+w| \leq |z| + |w|$$



Avstand i det komplekse planet

$|z-w|$ er avstanden fra z til w



eks. Skisser delmengden av $\mathbb{C}$ gitt ved

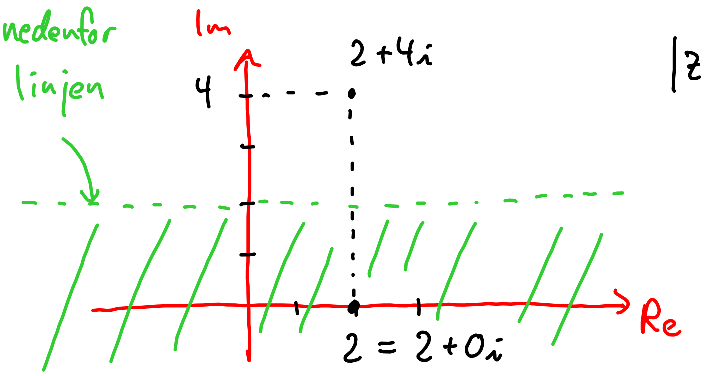
$$\{ z : |z-2| \leq |z-2-4i| \}$$

Løsn. Trix:

$$|z-2-4i| = |z-(2+4i)| = \begin{cases} \text{avstanden fra } z \\ \text{til punktet } 2+4i \end{cases}$$

$$|z-2| = \begin{cases} \text{avstand} \\ \text{fra } z \text{ til} \\ \text{punktet} \\ 2 = 2+0i \end{cases}$$

z må ligge nedenfor eller på denne linjen



Diverse eksempler på regning

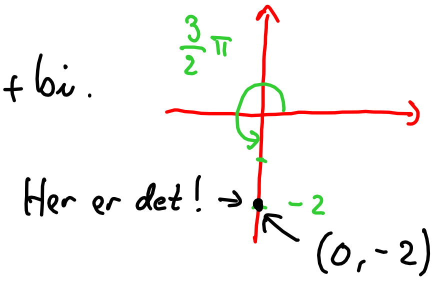
eks. 1 $(i+2)^5 = ?$

$(i+2)(i+2) = -1 + 2i + 2i + 4 = 3 + 4i$

så $(i+2)^4 = (3+4i)(3+4i) =$ regn ut

Til slutt $(i+2)^5 = (i+2)(i+2)^4 = \dots$

eks. 2 Skriv $2e^{i\left(\frac{3\pi}{2}\right)}$ på formen $a+bi$.



$= 0 - 2i$

Ergo $2e^{i\left(\frac{3\pi}{2}\right)} = \underline{\underline{-2i}}$

Alternativt:

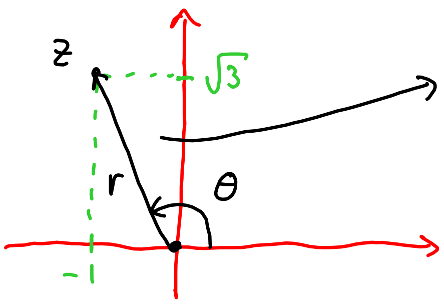
$$2e^{i\left(\frac{3\pi}{2}\right)} = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = 2\left(0 + i\cdot(-1)\right)$$

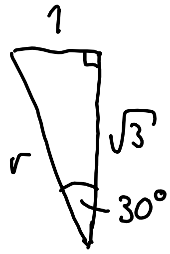
$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$$

$$= \underline{\underline{-2i}}$$

eks. 3 Skriv $\underbrace{-1+\sqrt{3}\,i}_{\text{kartesisk form (rektangulær form)}}$ på formen $\underbrace{re^{i\theta}}_{\text{eksponentiell form}}$

Løsn. $-1+\sqrt{3}\,i = (-1, \sqrt{3}) = z$





Pyt: $1^2 + (\sqrt{3})^2 = r^2$

$1 + 3 = r^2$

$r = 2$

ɔ: 30/60/90 - trekant

Så $\theta = 90^\circ + 30^\circ = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$

Så $z = -1 + \sqrt{3}\,i = \underline{\underline{2e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}}}$

eks. 4 Løse likninger med komplekse tall z som ukjente

$$3i + 10z - iz = 8z$$

Vi regner vanlig:

$$2z - iz = -3i$$

$$(2-i)z = -3i$$

$$z = \frac{-3i}{2-i} \overset{\text{trix}}{=} \frac{-3i\cdot(2+i)}{(2-i)\cdot(2+i)}$$

$$= \frac{-6i+3}{4-\cancel{2i}+\cancel{2i}+1} = \frac{-6i+3}{5} = \frac{3}{5} - \frac{6}{5}i$$