En annen måte å motivere definisjonen av $e^{i\theta}$ på

Man kan vise at for alle veelle tall x gjelder $(4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Får da

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \dots$$

$$= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} + \dots$$

$$= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots\right) + i \cdot \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots\right)$$

$$= \cos\theta + i\sin\theta$$

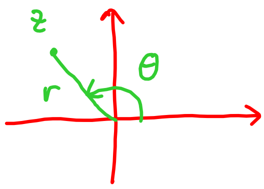
n-te røtter av komplekse tall

La $z \neq 0$ være et komplekst tall, og la n være et naturlig tall. Med en <u>n-te rot</u> til z menes et komplekst tall w slik at

$$w^n = \underbrace{w \cdot w \cdots w}_{n \text{ stk}} = z$$

Hvordan finne de n ulike n-te røttene til et komplekst tall $z \neq 0$

1. Skriv z på polar form $z = re^{i\theta}$ med $\theta \in [0, 2\pi)$.
   Tegn figur!



2. Regn ut den prinsipale n-te roten til z:

$$w_0 = \sqrt[n]{r}\, e^{i(\theta/n)}$$

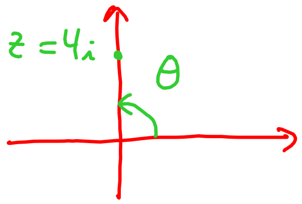
3. Regn ut $w_+ = e^{i(2\pi/n)}$

4. Finn de resterende røttene $w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}$ ved å gange den prinsipale roten w_0 med w_+ om igjen og om igjen, inntil du har n ulike røtter.

eks. Skal finne annenrøttene (kvadratrøttene) til

$$z = 4i$$

1 Tegner figur:



$$z = re^{i\theta} = 4e^{i(\pi/2)}$$

$$r = 4, \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

2 Prinsipal rot: $w_0 = \sqrt[n]{r}\, e^{i(\theta/n)}$ $(n = 2)$

$$= \sqrt[2]{r}\, e^{i(\theta/2)}$$

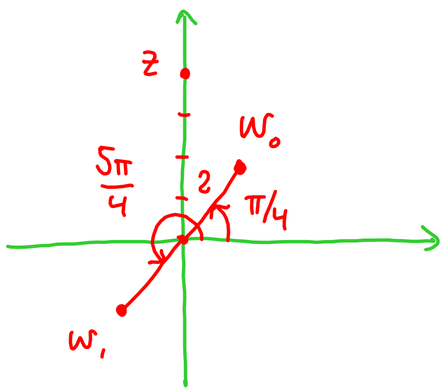
$$= \sqrt[2]{4}\, e^{i(\pi/4)} = \underline{\underline{2e^{i(\pi/4)}}}$$

3 $w_+ = e^{i(2\pi/n)} = e^{i(2\pi/2)} = e^{i\pi}$

4 Neste rot: $w_1 = w_+ w_0 = e^{i\pi} \cdot 2e^{i(\pi/4)}$

$$= 2e^{i\pi} e^{i(\pi/4)} = 2e^{i\pi + i(\pi/4)}$$

$$= 2e^{i\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)} = \underline{\underline{2e^{i(5\pi/4)}}}$$

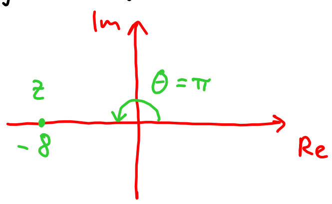


Hvis du vil ha røttene på rektangulær form, er et godt tips å skrive w_0 og w_+ på rektangulær form, og så gange.

eks. 2 Skal finne tredjerøttene til $z = -8$

① Tegner figur

$$z = re^{i\theta} = 8e^{i\pi}$$



$$r = 8 \ , \quad \theta = \pi \ , \quad n = 3$$

② Prinsipal rot: $w_0 = \sqrt[n]{r}\, e^{i(\theta/n)} = \sqrt[3]{8}\, e^{i(\pi/3)}$

$$= 2e^{i(\pi/3)}$$

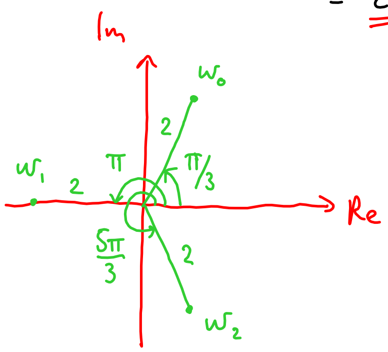
③ $w_+ = e^{i(2\pi/n)} = e^{i(2\pi/3)} = e^{i(\frac{2}{3}\pi)}$

④ Neste rot: $w_1 = w_+ w_0 = e^{i(\frac{2}{3}\pi)} \cdot 2e^{i(\pi/3)}$

$$= 2e^{i(\frac{2}{3}\pi + \frac{1}{3}\pi)} = 2e^{i\pi}$$

Neste rot: $w_2 = w_+ w_1 = e^{i(\frac{2}{3}\pi)} \cdot 2e^{i\pi}$

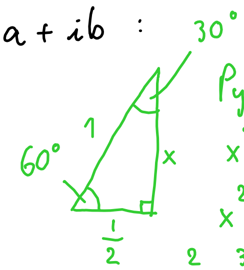
$$= 2e^{i(\frac{5}{3}\pi)}$$



$$w_0 = 2e^{i(\frac{\pi}{3})}$$
$$w_1 = 2e^{i\pi}$$
$$w_2 = 2e^{i(\frac{5\pi}{3})}$$

Skriver røttene på rektangulær form $a + ib$:

$$w_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$
$$= 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= 1 + \sqrt{3}\, i$$



Pyt:

$$x^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = 1^2$$
$$x^2 + \tfrac{1}{4} = 1$$
$$x^2 = \tfrac{3}{4}, \quad x = \tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

Så $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos 60° = \frac{1}{2}$

Ser

$$w_1 = -2$$

$$w_2 = 1 - \sqrt{3}\, i$$

Grublegruppe:

Ons 16.15 - 18, NHA 108

Første gang i dag

Algebraens fundamentalteorem

La $P(z) = c_n z^n + \dots + c_2 z^2 + c_1 z + c_0$

være et n-te grads polynom med komplekse koeffisienter c_i.

Da fins komplekse tall $r_1, \dots, r_n$ slik at

$$P(z) = c_n (z - r_1)(z - r_2) \cdots (z - r_n)$$

Tallene $r_1, \dots, r_n$ kalles røttene til P. Bortsett fra rekkefølgen er de entydig bestemt. (Men noen kan være like.)

Altså:

Likningen $P(z) = 0$ har $z = r_1, \dots, z = r_n$ som løsninger.

I tillegg:

(*) Hvis alle c_i-ene er reelle og z er en av røttene, så er også $\bar{z}$ en av røttene. (Bevis s. 137)

(*) Formelen

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

for løsning av annengradslikningen $az^2 + bz + c = 0$ gjelder for alle komplekse a, b og c, gitt at man tolker $\pm\sqrt{b^2 - 4ac}$ som de to kvadratrøttene til $b^2 - 4ac$.

(Samme bevis som før.)

Eks. 1

a) Vis at $z = i$ er en rot i polynomet

$$P(z) = z^3 + (-2-i)z^2 + (5+2i)z - 5i$$

b) Finn de andre røttene til P.

c) Finn kompleks faktorisering av P.

Løsn.

a) $$P(i) = i^3 + (-2-i)i^2 + (5+2i)i - 5i$$

$$= \cancel{i^3} - 2i^2 - \cancel{i^3} + \cancel{5i} - 2 - \cancel{5i} = 2 - 2 = \underline{\underline{0}}$$

b) Vi bruker kompleks versjon av polynomdivisjon:

$$\left(z^3 + (-2-i)z^2 + (5+2i)z - 5i\right) : (z - i) = z^2 - 2z + 5$$

$$\begin{array}{l} \underline{z^3 - iz^2} \\ \quad -2z^2 + (5+2i)z - 5i \\ \quad \underline{-2z^2 + 2iz} \\ \qquad\qquad 5z - 5i \\ \qquad\qquad \underline{5z - 5i} \\ \qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

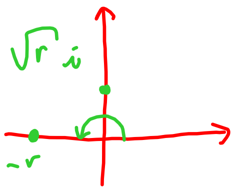
Ergo: $P(z) = (z-i)\cdot(z^2 - 2z + 5)$

$z^2 - 2z + 5 = 0$ gir $z = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 4\cdot 5}}{2}$

dvs. $$z = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-1)\cdot 16}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-1}\cdot\sqrt{16}}{2}$$

$$= \frac{2 \pm 4i}{2} = \begin{cases} 1 + 2i \\ 1 - 2i \end{cases}$$

Hvis $r > 0$ er et reelt tall, så er



$$\sqrt{-r} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{r} = \sqrt{r}\cdot i$$

Husk at $-r = re^{i\pi}$

Men: Regelen $\sqrt{zw} = \sqrt{z}\cdot\sqrt{w}$ holder ikke generelt!
For se her:

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)\cdot(-1)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ulovlig}}}{=} \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = i\cdot i = -1$$

Konksjon: De øvrige røttene er

$$z = \underline{\underline{1+2i}} \quad \text{og} \quad z = \underline{\underline{1-2i}}$$

c) Kompleks faktorisering:

$$P(z) = 1\cdot(z-i)\cdot\big(z-(1+2i)\big)\cdot\big(z-(1-2i)\big)$$
$$= \underline{\underline{(z-i)\cdot\big(z-(1+2i)\big)\cdot\big(z-(1-2i)\big)}}$$

Eks. 2

a) Vis at $z = 1+2i$ er en rot i polynomet

$$P(z) = z^4 + z^3 + z^2 + 11z + 10$$

b) Finn de øvrige røttene til P, og skriv P som et produkt av reelle førstegradsfaktorer og annengradsfaktorer, der sistnevnte er uten reelle nullpunkter. (Dvs. finn reell faktorisering av P.)

c) Finn den komplekse faktoriseringen av P.

Løsning

a) $P(1+2i) = (1+2i)^4 + (1+2i)^3 + (1+2i)^2 + 11\cdot(1+2i) + 10$

$$\overset{\text{regn}}{=} 0$$

b) Siden P har reelle koeffisienter, vet vi at $z = 1-2i$ også er en rot. Dermed vet vi at faktorene

$$[z-(1+2i)] \quad \text{og} \quad [z-(1-2i)]$$

begge forekommer i faktoriseringen av P.

Vi ganger dem sammen, for det gir enklere regning:

$$[z-(1+2i)]\cdot[z-(1-2i)] = (z-1-2i)\cdot(z-1+2i)$$

$$= z^2 - z + \cancel{2iz} - z + 1 \underline{-2i} - \cancel{2iz} + \underline{2i} + 4$$

$$= z^2 - 2z + 5$$

b) forts.

Vi bruker så polynomdivisjon:

$$\begin{aligned}
&(z^4 + z^3 + z^2 + 11z + 10) : (z^2 - 2z + 5) = z^2 + 3z + 2 \\
&\underline{z^4 - 2z^3 + 5z^2} \\
&\quad 3z^3 - 4z^2 + 11z + 10 \\
&\quad \underline{3z^3 - 6z^2 + 15z} \\
&\qquad 2z^2 - 4z + 10 \\
&\qquad \underline{2z^2 - 4z + 10} \\
&\qquad\qquad 0
\end{aligned}$$

Ergo: $P(z) = (z^2 - 2z + 5) \cdot (z^2 + 3z + 2)$

Faktoriserer videre:

$z^2 + 3z + 2 = 0$ gir

$$z = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases}$$

Så: $z^2 + 3z + 2 = (z - (-1)) \cdot (z - (-2))$

$= (z+1) \cdot (z+2)$

De øvrige røttene til $P(z)$ er:

$\underline{\underline{z = -1}}$, $\underline{\underline{z = -2}}$ og $\underline{\underline{z = 1 - 2i}}$

Reell faktorisering:

$$z^4 + z^3 + z^2 + 11z + 10 = \underline{\underline{(z^2 - 2z + 5) \cdot (z+1) \cdot (z+2)}}$$

ingen reelle nullpunkter

c) Kompleks faktorisering:

$$z^4 + z^3 + z^2 + 11z + 10 = \underline{\underline{(z - (1+2i))(z - (1-2i)) \cdot (z+1) \cdot (z+2)}}$$

∴: Man finner den reelle faktoriseringen av et polynom med reelle koeffisienter ved å gange sammen faktorer som tilsvarer konjugerte røtter i den komplekse faktoriseringen.