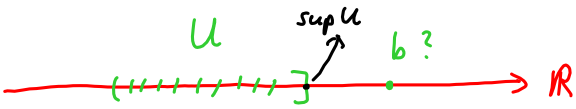
Bakgrunnsstoff fra kap 2

$\mathbb{R}$: Mengden av alle reelle tall

La $U \subseteq \mathbb{R}$ være en delmengde.



Med en <u>øvre begrensning</u> for U menes et reelt tall b slik at alle $a \in U$ oppfyller $a \leq b$. Hvis U har en øvre begrensning, kalles den <u>oppad begrenset</u>.

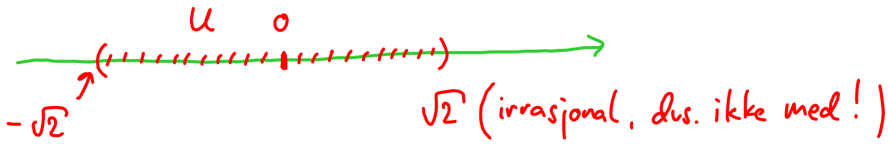
<u>Def.</u> Med $\sup U$ (supremum til U) menes den minste øvre begrensningen til U (hvis en slik fins).

<u>Kompletthetsprinsippet (2.3.2)</u>

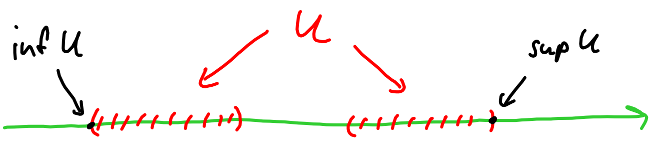
Hvis $U \subseteq \mathbb{R}$ er ikke-tom og oppad begrenset, så fins $\sup U$.

Kompletthetsprinsippet ville ikke holdt hvis vi <u>kun arbeidet med rasjonale tall</u>. Moteksempel:

La U være mengden av alle x slik at $x^2 < 2$.



Tilsvarende:
- Begrepet <u>nedad begrenset</u>
- $\inf U$ (infimum til U) = største nedre begrensning til mengden U



Hvis U er ikke-tom og nedad begrenset, så fins $\inf U$.
(Kompletthetsprinsippet.)

Konvergens av følger (4.3)

En følge er en uendelig lang liste av reelle tall

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

Notasjon: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$

eks. $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots\right\}$

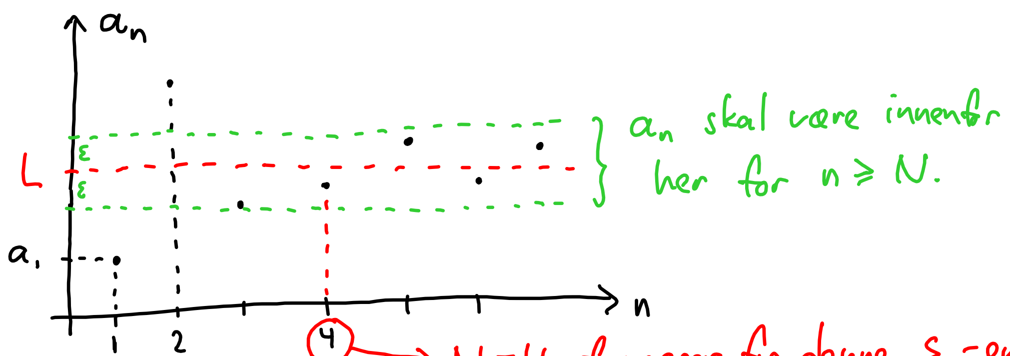
En følge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sies å konvergere mot tallet L, og vi skriver

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

hvis det for hver $\varepsilon > 0$ fins en N slik at

$$|a_n - L| < \varepsilon \quad \text{for alle } n \geq N.$$

Figur:



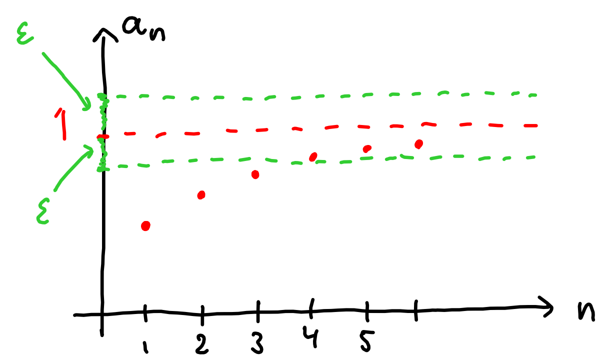
$N = 4$ fungerer for denne ε-en.

eks. Skal bevise fra definisjonen at følgen

$$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

konvergerer mot 1. Vi skal altså vise at $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

Løsn. Tegner figur:



Gitt ε, hvor stor må N velges?

(N = 4 holder for denne ε-en)

Metode: Vi ser på avstanden mellom $\frac{n}{n+1}$ og 1:

$$1 - \frac{n}{n+1} = \frac{\cancel{n}+1-\cancel{n}}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

Gitt toleranse ε, må vi altså ha

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon \quad \text{dvs.} \quad 1 < \varepsilon\cdot(n+1)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} < n+1$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

Vi kan altså velge et helt tall $N > \frac{1}{\varepsilon} - 1$.

Ergo konvergerer følgen mot 1. □

Finne hva en følge konvergerer mot når det ikke står at du skal bruke definisjonen : Regn vanlig. Se på teorem 4.3.3 i læreboken. Skal her se på to trix.

Trix 1 : Dele på dominerende ledd

* Kan prøves bl.a. hvis du har en grense på formen $\frac{\infty}{\infty}$

eks. $\lim_{n \to \infty} \frac{(-2)^n + 4^n}{2 \cdot 4^n + e^n}$

Både teller og nevner går mot ∞, altså $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

Deler på dominerende ledd 4^n oppe og nede

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{(-2)^n}{4^n} + 1}{2 + \frac{e^n}{4^n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\left(\frac{-2}{4}\right)^n + 1}{2 + \left(\frac{e}{4}\right)^n}$$

$\left(\frac{-2}{4}\right)^n \to 0$, $\left(\frac{e}{4}\right)^n \to 0$

$$= \frac{1}{2}$$

(brukte reglene i teorem 4.3.3)

$\boxed{\text{Trix 2 : Gange med "konjugerte uttrykket" oppe og nede}}$

* Kan bl.a. prøves hvis grensen er på formen $[\infty - \infty]$

eks. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+n} - 2n\right)$ På formen $[\infty - \infty]$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^2+n} - 2n}{1}$$

Trixet

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{4n^2+n} - 2n\right)\cdot\left(\sqrt{4n^2+n} + 2n\right)}{1\cdot\left(\sqrt{4n^2+n} + 2n\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{4n^2+n}\right)^2 - (2n)^2}{\sqrt{4n^2+n} + 2n}$$

← Kryssleddene falt bort, jf. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(\cancel{4n^2}+n) - \cancel{4n^2}}{\sqrt{4n^2+n} + 2n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{4n^2+n} + 2n}$$

Hmm. Må finne på noe mer: $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$-trix.

Delte på n oppe og nede

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{\sqrt{4n^2+n}}{n} + 2}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{4n^2+n}{n^2}} + 2}$$

(fordi vi har $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$)

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{4n^2}{n^2} + \frac{n}{n^2}} + 2}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4 + \frac{1}{n}} + 2} = \frac{1}{\sqrt{4} + 2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

$\frac{1}{n} \to 0$

Anvendelse av kompletthetsprinsippet

En følge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ kalles

- voksende hvis $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots$
- avtakende hvis $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots$
- oppad begrenset hvis det fins M slik at $a_n \leq M$ for alle n
- nedad begrenset hvis —— " —— $a_n \geq M$ — " —

Kompletthetsegenskapen for følger (4.3.9)

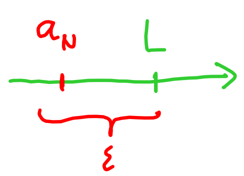
(i) Hvis en følge er voksende og oppad begrenset, så konvergerer den.

(ii) —— " —— avtakende og nedad —— " ——

Bevis (i) Hvis $\{a_n\}$ er voksende og oppad begrenset, så fins

$$L = \sup \{a_n \mid n = 1, 2, 3, \ldots\}$$

ved kompletthetsprinsippet. Gitt $\varepsilon > 0$ fins da $N \geq 1$ slik at



$$|a_N - L| < \varepsilon$$

Men siden følgen er voksende, får vi da at

$$|a_n - L| < \varepsilon \quad \text{for alle } n \geq N.$$

Altså har vi bevist at $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. $\square$

Typisk oppgave

Betrakt følgen gitt ved $a_1 = 0$ og

$$a_{n+1} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(a_n + 1)} \quad \text{for } n \geq 1$$

a) Vis at følgen er oppad begrenset av 1

b) Vis at følgen er voksende

c) Vis at følgen konvergerer, og finn ut hva den konvergerer mot.

Løsning

a) $a_1 = 0$

$$a_2 = \sqrt{\tfrac{1}{2}(a_1+1)} = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

$$a_3 = \sqrt{\tfrac{1}{2}(a_2+1)} = \text{osv.}$$

Vi har $a_1 < 1$. Hvis vi antar at n er slik at

$$a_n < 1,$$

får vi:

$$a_{n+1} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(a_n+1)} \overset{\text{bruker}}{<} \sqrt{\tfrac{1}{2}(1+1)} = \sqrt{1} = 1$$

Altså $a_{n+1} < 1$ også. Dermed har vi vist ved induksjon at $a_n < 1$ for alle n.

b) Vi får:

$$a_{n+1} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(a_n+1)} > \sqrt{\tfrac{1}{2}(a_n+a_n)} = \sqrt{a_n} > a_n$$

$\boxed{\text{Vi vet nå fra a) at } a_n < 1}$

siste ulikhet fordi $\sqrt{x} > x$ når $x < 1$.

Ergo er følgen voksende.

c) Vi får nå fra kompletthetsegenskapen for følger at følgen vår konvergerer.

Trix for å finne ut hva den konvergerer mot: La $n \to \infty$ på begge sider i rekursjonsformelen.

$$\lim_{n\to\infty} \overset{L}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{2}(\underset{L}{a_n}+1)}$$

Kall grensen følgen konvergerer mot, for L.

Dette gir

$$L = \sqrt{\frac{1}{2}(L+1)}$$

$$L^2 = \frac{1}{2}(L+1)$$

$$L^2 - \frac{1}{2}L - \frac{1}{2} = 0$$

dvs.

$$L = \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{2}}}{2} = \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}}}{2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}}{2} = \frac{1}{4} \pm \frac{3}{4} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$L = -\frac{1}{2}$ er umulig fordi $a_1 = 0$ og følgen er voksende.

Ergo $L = 1$, dvs. følgen konvergerer mot 1.