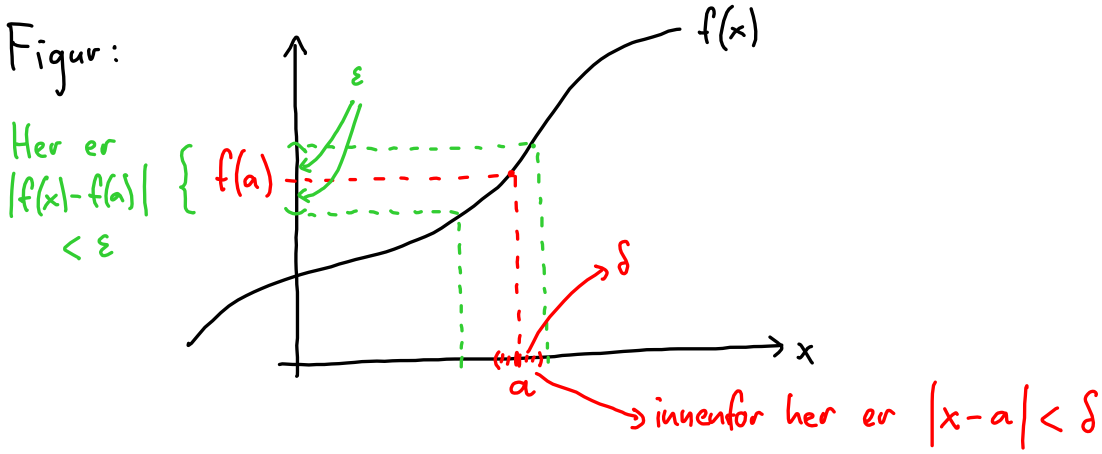
5.1 Kontinuitet

Definisjon (5.1.1)

At funksjonen f er kontinuerlig i et punkt $a \in D_f$ betyr at:

> For hver $\varepsilon > 0$ fins $\delta > 0$ slik at
> når $x \in D_f$ og $|x-a| < \delta$, så er $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$

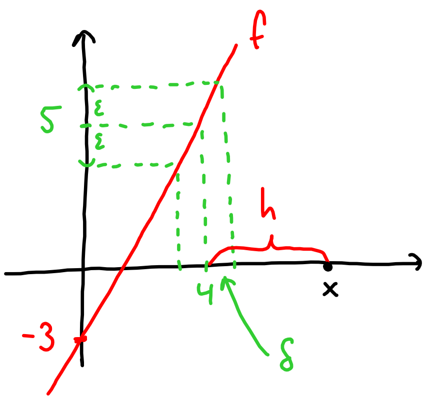
Figur:



Hvis f er kontinuerlig i alle punkter $a \in D_f$, kalles f kontinuerlig.

eks. Bruk definisjonen til å vise at $f(x) = 2x - 3$ er kontinuerlig i $x = 4$.

Løsn.



$f(4) = 8 - 3 = 5$

"Ser" at vi kan velge $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$

Med regning: La $h = x - 4$
dvs. $x = 4 + h$

Da er:

$$|f(x) - f(4)| = |(2x - 3) - 5| = |2x - 8|$$

vil vi

$$= |2(4+h) - 8| = |8 + 2h - 8| = |2h| < \varepsilon$$

Dette får vi til hvis $|h| < \varepsilon/2$. For da er

$$|2h| < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Kan derfor ta $\delta = \varepsilon/2$.
Ergo: f er kontinuerlig i $x = 4$. $\square$

Mer komplisert eksempel: Eks. 5.1.3 side 213.

I praksis brukes oftest regler for kontinuitet i stedet for definisjonen. Her kommer slike regler:

Teorem 5.1.5

Anta at f og g er kontinuerlige i punktet a.
Da er $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ og f/g også kontinuerlige i a
(Det siste kun hvis $g(a) \neq 0$)

Bevis Vis for $f-g$. Telegramstil:

$$\left| [f(x)-g(x)] - [f(a)-g(a)] \right|$$

$$= \left| [f(x)-f(a)] + [g(a)-g(x)] \right|$$

$$\leq |f(x)-f(a)| + |g(a)-g(x)| \qquad \text{(trekant-ulikheten)}$$

$$= |f(x)-f(a)| + |g(x)-g(a)|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

hvis $\delta > 0$ velges så liten at

$$|f(x)-f(a)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{og} \quad |g(x)-g(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Og det kan vi få til, siden f og g er kontinuerlige i punktet a. $\square$

Teorem 5.1.7 Anta at g er kontinuerlig i punktet a, og at f er kontinuerlig i punktet $g(a)$. Da er

$$h(x) = f(g(x))$$

kontinuerlig i punktet a.

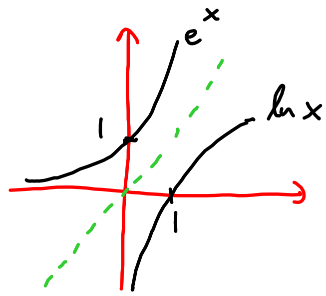
Bevis Kalk. s. 215 $\square$

Konsekvens av 5.1.5 og 5.1.7 (røff regel)

Funksjoner definert ved en fast formel er kontinuerlige i alle punkter der formelen er definert.

Definisjonsmengden til en funksjon gitt ved en formel oppfattes som mengden av alle punkter der formelen gir mening, hvis ikke noe annet er eksplisitt sagt.

Eks. Finn D_f for $f(x) = \ln(x^2 - x)$, og vis at f er kontinuerlig.

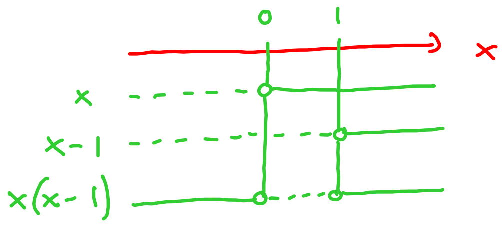


Løsn. Hvis x skal ligge i D_f må

$$x^2 - x > 0$$

dvs.

$$x(x-1) > 0$$



Ergo

$$D_f = \underline{\underline{(-\infty, 0) \cup (1, \infty)}}$$

Bevis for kontinuitet:

Vi vet at x er kontinuerlig

Så $x^2 = x \cdot x$ er kontinuerlig ved 5.1.5

Så $x^2 - x$ —— " —— " ——

Vi vet at $\ln$ er kontinuerlig

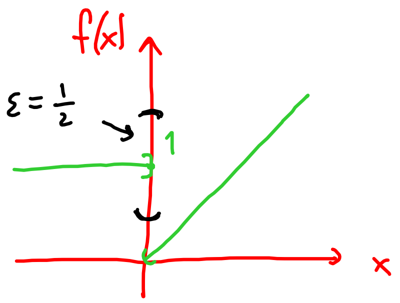
Så $\ln(x^2 - x)$ er kontinuerlig ved 5.1.7. $\square$

eks. Vis ved definisjonen av kontinuitet at

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \leq 0 \\ x & \text{for } x > 0 \end{cases}$$

ikke er kontinuerlig i $x = 0$.

Løsn.



Det er intuitivt opplagt, ja.

Må vise at det fins $\varepsilon > 0$ slik at uansett hvor liten $\delta > 0$ velges, så fins x slik at

$$|x - 0| < \delta, \quad \text{men} \quad |f(x) - f(0)| \geq \varepsilon$$

Figuren viser at vi kan velge $\varepsilon = \frac{1}{2}$.
Gitt $\delta > 0$, velg en x i intervallet $(0, \delta)$ som er mindre enn $\frac{1}{2}$. Da er

$$|x - 0| < \delta \quad \text{og} \quad f(x) < \tfrac{1}{2}$$

Så

$$|f(x) - f(0)| = |f(x) - 1| > \left|\tfrac{1}{2} - 1\right| = \tfrac{1}{2} \geq \varepsilon. \quad \square$$

5.2 Skjæringssetningen

Med et <u>nullpunkt</u> for en funksjon f menes et punkt $x \in D_f$ slik at

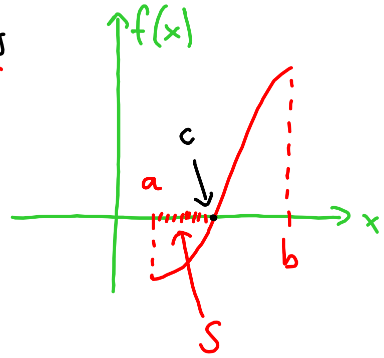
$$f(x) = 0$$

<u>Skjæringssetningen (5.2.1)</u>

Anta at f er kontinuerlig på $[a,b]$, og at $f(a)$ og $f(b)$ har motsatt fortegn. Da fins $c \in [a,b]$ slik at

$$f(c) = 0$$

<u>Bevis</u>



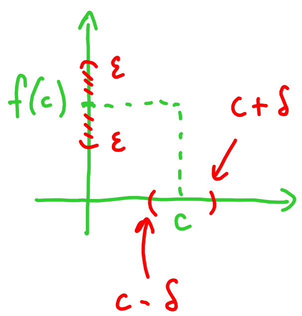
Anta $f(a) < 0$

(Tilfellet $f(a) > 0$ tas tilsvarende.)

La $c = \sup S$, der

$$S = \{x \in [a,b] \mid f(x) \leq 0\}$$

Skal bevise at $f(c) = 0$. Anta $f(c) > 0$.

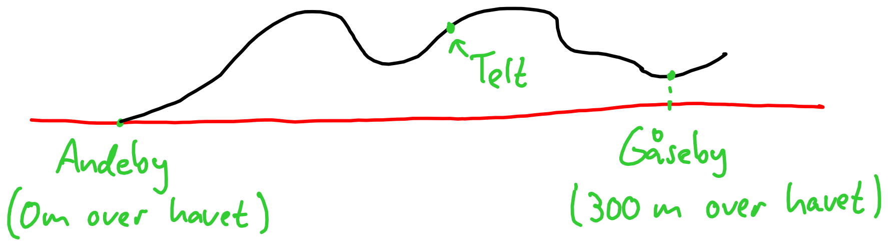


La $\varepsilon = \dfrac{f(c)}{2}$. Siden f er kontinuerlig, fins $\delta > 0$ slik at

$$|f(x) - f(c)| < \varepsilon \quad \text{for } x \in (c-\delta, c+\delta)$$

Men da er $c - \frac{\delta}{2}$ også en øvre grense for S, siden c er det. Men det er umulig, siden c er <u>minste</u> øvre grense. Ergo er $f(c) > 0$ umulig. Tilsvarende vises at $f(c) < 0$ er umulig også. Ergo $f(c) = 0$. $\square$

eks. Fottur fra Andeby til Gåseby



Fra Andeby kl 09 lørdag
Er ved teltet (1000 moh) fra lørdag kl. 22 til søndag kl 10.
Fremme i Gåseby kl. 21 søndag. Deretter er vi i ro der til kl. 22.
Vis at det fins et klokkeslett t_0 slik at du hadde samme høyde over havet på dette klokkeslettet begge dager.

Løsning La funksjonen $f(t)$ være definert ved

$$f(t) = \begin{pmatrix} \text{høyde lørdag} \\ \text{klokken } t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{høyde søndag} \\ \text{klokken } t \end{pmatrix}$$

Vi har da
$$f(9) = 0 - 1000 = -1000$$
$$f(22) = 1000 - 300 = 700$$

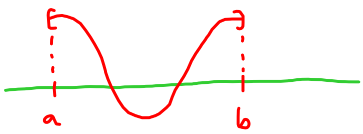
Vi kan anta at f er kontinuerlig, og ved skjæringssetningen har derfor f et nullpunkt $t_0 \in (9, 22)$. Da er høyden lørdag kl. t_0 lik høyden søndag kl. t_0. $\square$

5.3 Ekstremalverdisetningen

En funksjon kalles oppad begrenset hvis V_f (verdimengden til f) er oppad begrenset, og nedad begrenset hvis V_f er nedad begrenset. Hvis f er både oppad og nedad begrenset, kalles den begrenset.

Teorem Hvis f er kontinuerlig og D_f er et lukket intervall $[a,b]$, så er f begrenset.

Figur:



Intuitivt sett ok.

Bevis La $c = \sup \{ x \in [a,b] \mid f \text{ er begrenset på } [a,x] \}$

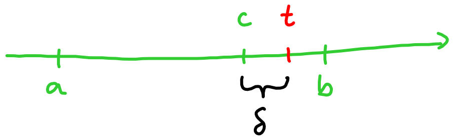
Ved kompletthetsprinsippet fins c, for mengden den er supremum til er oppad begrenset av b og ikke-tom (inneholder a).

Siden f er kontinuerlig, fins da $\delta > 0$ slik at

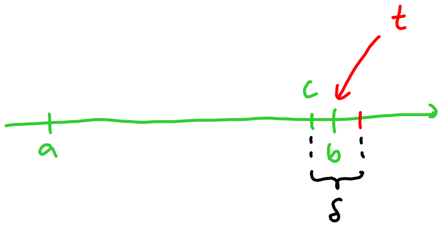
$$|f(x) - f(c)| < 1 \quad \text{for} \quad x \in [c, t]$$

der t er det minste av tallene $c+\delta$ og b.

Her er $c+\delta < b$ så $t = c+\delta$



Her er $c+\delta > b$ så $t = b$



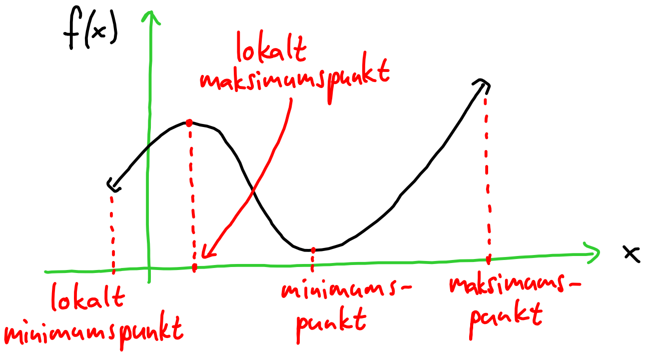
Hvis ikke $c = t = b$, gir dette en selvmotsigelse.

Altså er f begrenset på $[a,b]$. $\square$

Definisjon La f være en funksjon. Et punkt $a \in D_f$ kalles et

maksimumspunkt for f hvis $f(x) \leq f(a)$ for alle $x \in D_f$
minimumspunkt for f " $f(x) \geq f(a)$ — " —

"Ekstremalpunkt" er en fellesbetegnelse på maksimalpunkt og minimalpunkt.



Ekstremalverdisetningen (5.3.5)
Hvis f er kontinuerlig og D_f er et lukket intervall $[a,b]$, så har f minst ett maksimumspunkt og ett minimumspunkt.

Bevis Vi viser at f har et maksimumspunkt. At den har et minimumspunkt, vises tilsvarende.
Ved teoremet om begrensethet fins $M = \sup V_f$.
Anta at $f(x) < M$ for alle $x \in [a,b]$. Da er funksjonen

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$$

kontinuerlig på $[a,b]$. Ved teoremet om begrensethet fins derfor et tall $c > 0$ slik at

$$g(x) < c \quad \text{for } x \in [a,b].$$

Altså $\dfrac{1}{M - f(x)} < c$, dvs. $1 < c \cdot (M - f(x))$

som gir $\frac{1}{c} < M - f(x)$, og $f(x) < M - \frac{1}{c}$

for alle $x \in [a,b]$. Dette strider mot definisjonen av M.
Ergo har vi $f(x) = M$ for en $x \in [a,b]$. $\square$