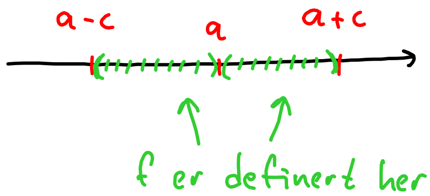
Grenseverdier (5.4)

At f er definiert i <u>nærheten</u> av a betyr at det fins et tall $c > 0$ slik at

$$(a-c,\ a) \cup (a,\ a+c) \subseteq D_f$$



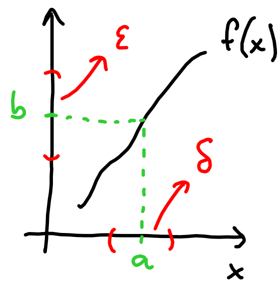
Definisjon av grense

Anta at f er definert i nærheten av a. At

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

betyr at det for alle $\varepsilon > 0$ fins $\delta > 0$ slik at

$$0 < |x-a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - b| < \varepsilon$$

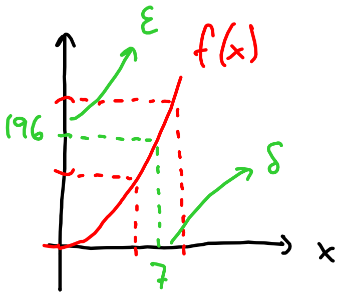


eks. Vis at $\lim_{x \to 7} 4x^2 = 196$ ved definisjonen.

Løsn. La $f(x) = 4x^2$. Må vise at det for gitt $\varepsilon > 0$ fins $\delta > 0$ slik at

$$0 < |x-7| < \delta \implies |f(x) - 196| < \varepsilon$$

Figur:



Har $f'(x) = 8x$

$f'(7) = 8 \cdot 7 = 56$

Så $\delta = \frac{\varepsilon}{56}$ pluss korreksjon?

Vi prøver:

$$|f(x) - 196| = |4x^2 - 196| \qquad (\text{Trix: } x = 7+h)$$

$$= |4(7+h)^2 - 196|$$

$$= |\cancel{196} + 56h + 4h^2 - \cancel{196}|$$

$$= |h(56+4h)|$$

$$\boxed{\text{hvis } |h| \leq 1} \quad \leq |h \cdot 60| = 60 \cdot |h|$$

Vi får dette mindre enn ε ved å velge $|h|$ liten nok:

$$60 \cdot |h| < \varepsilon, \quad \text{dvs. } |h| < \frac{\varepsilon}{60}$$

Kan da ta δ slik at $\delta < \frac{\varepsilon}{60}$ og $\delta < 1$.

Skriver $\delta < \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{60}\right\}$ $\square$

Regneregler for grenseverdier (5.4.3)

Hvis $\lim_{x \to a} f(x)$ og $\lim_{x \to a} g(x)$ begge fins, er

(i) $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$

(ii) $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$

(iii) $\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$

(iv) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$

Bevis Tilsvarende som setning 5.1.5. $\square$

eks. $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x + x}{x} \overset{\text{trix}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin x}{x} + 1}{1}$$

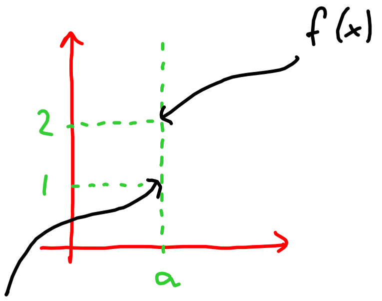
$$\overset{\text{(iv)}}{=} \frac{\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} + 1 \right)}{\lim_{x \to 0} 1} \overset{\text{(i)}}{=} \frac{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} + \lim_{x \to 0} 1}{\lim_{x \to 0} 1}$$

$$= \frac{1+1}{1} = \underline{\underline{2}}$$

[Brukte at $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$].

Ensidige grenser

eks.



$$\lim_{x \to a^+} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = 1$$

Formelle definisjoner av ensidige grenser er helt tilsvarende definisjonen av vanlig "tosidig" grense. Se lærebok.

Observasjon (5.4.7)

La $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, dvs. $D_f = [a, b]$.

For alle $c \in (a, b)$ gjelder da:

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c) \iff f \text{ er kontinuerlig i } x = c$$

Videre:

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b) \iff f \text{ er kontinuerlig i } x = b$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \iff f \text{ er kontinuerlig i } x = a.$$

eks. Vis at

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sin x} & \text{for } x > 0 \\ 1 & \text{for } x \leq 0 \end{cases}$$

er kontinuerlig i $x = 0$.

Løsn. Vi må vise at

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0).$$

Vi har $f(0) = 1$. Vi har også

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 1 = 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1}} = 1$$

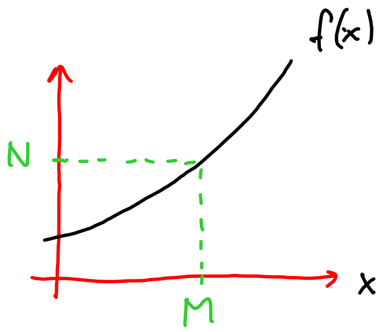
Ergo $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 1$, så f er kontinuerlig i 0. □

Andre varianter av grenser

① $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ betyr

For alle N fins M slik at

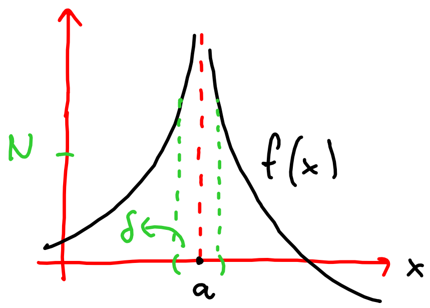
$$x > M \Rightarrow f(x) > N.$$



② $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ betyr

For alle N fins $\delta > 0$ slik at

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > N.$$



③ $\lim_{x \to \infty} f(x) = b$ betyr

For alle $\varepsilon > 0$ fins N slik at

$$x > N \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$