Derivasjon (6.1 og 6.2)

Def $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

eks. $f(x) = x^2$ gir

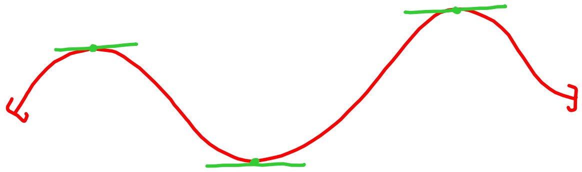
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 - \cancel{x^2}}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x$$

Teorem

① Hvis f er deriverbar i $x = a$, så er f kontinuerlig i $x = a$

② Hvis a er et lokalt ekstremalpunkt for f i det indre av D_f (altså ikke i et endepunkt), så er $f'(a) = 0$.

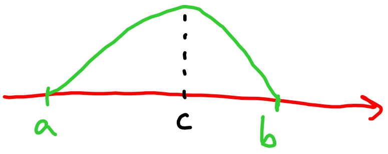


Bevis: Se lærebok. ☐

Rolles teorem

Anta at f er kontinuerlig på $[a,b]$ og deriverbar på (a,b).
Hvis $f(a) = f(b) = 0$, så fins
minst ett punkt $c \in (a,b)$ slik at

$$f'(c) = 0$$



Bevis Ved ekstremalverdisetningen fins et globalt maksimum $f(c_1) = M$ og et globalt minimum $f(c_2) = m$ for f på $[a,b]$. Anta først at $f(c_1) = M > 0$. Da må $c_1 \in (a,b)$. Så forrige teorem gir $f'(c_1) = 0$.

Tilsvarende: Hvis $f(c_2) = m < 0$, fås $f'(c_2) = 0$.

Hvis $f(c_1) = f(c_2) = 0$, er $f(x) = 0$ for alle $x \in [a,b]$. Da er $f'(x) = 0$ for alle $x \in (a,b)$. □

Cauchys middelverditeorem (6.3.1)

Hvis f og g er kontinuerlige på $[a,b]$ og deriverbare på (a,b), så fins $c \in (a,b)$ slik at

$$[f(b)-f(a)]\cdot g'(c) = [g(b)-g(a)]\cdot f'(c)$$

Bevis La $h(x)=[f(a)-f(x)]\cdot[g(b)-g(a)]+[g(x)-g(a)]\cdot[f(b)-f(a)]$

Vi har da

$h(b) = h(a) = 0$, og

$h'(x) = -f'(x)\cdot[g(b)-g(a)] + g'(x)\cdot[f(b)-f(a)]$

Ved Rolles teorem fins dermed $c \in (a,b)$ slik at $h'(c)=0$, dvs.

$$0 = -f'(c)\cdot[g(b)-g(a)] + g'(c)\cdot[f(b)-f(a)]. \quad \square$$

Middelverdisetningen (6.2.3)

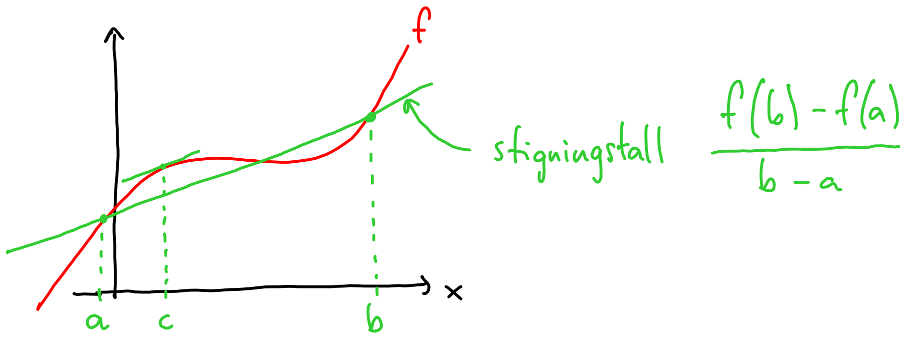
La f være kontinuerlig på $[a,b]$ og deriverbar på (a,b). Da fins $c \in (a,b)$ slik at

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

Bevis $g(x)=x$ i Cauchys middelverditeorem gir

$$[f(b)-f(a)]\cdot 1 = (b-a)\cdot f'(c). \quad \square$$

Geometrisk tolkning av middelverdisetningen:



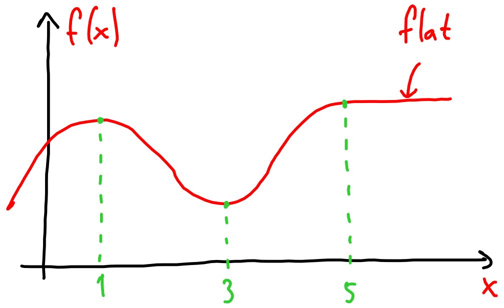
Definisjon

La $I \subseteq D_f$ være et intervall, og la a og b være to vilkårlige punkter i I. At f er

strengt voksende på I betyr at $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$
voksende — " — $a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$
strengt avtakende — " — $a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$
avtakende — " — $a < b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$

"Monoton" er en fellesbetegnelse på "voksende" og "avtakende".

eks.



f er:
strengt voksende på $[3,5]$
strengt avtakende på $[1,3]$
voksende på $[3,7]$

Teorem

Anta at f er kontinuerlig på intervallet $[a,b]$.

- Hvis $f'(x) > 0$ på (a,b), så er f strengt voksende på $[a,b]$.
- Hvis $f'(x) < 0$ på (a,b), — " — avtakende — " —

Bevis Anta $f'(x) > 0$ på (a,b).
La p, q være to punkter i $[a,b]$ med $p < q$.
Middelverditeoremet sier da:

$$\text{positiv} \leftarrow \frac{f(q)-f(p)}{\boxed{q-p}} = \boxed{f'(c)} \rightarrow \text{positiv}$$

for en c mellom p og q. Dermed må

$$f(q) - f(p) > 0, \quad \text{dvs.} \quad f(q) > f(p).$$

Ergo er f strengt voksende på $[a,b]$.
Tilsvarende hvis $f'(x) < 0$. $\square$

Logaritmisk derivasjon

- Ta ln til funksjonen du skal derivere

eks. $f(x) = e^{\sin x} \cdot \sqrt{x^{17} + 13}$, finne $f'(x)$

$$\ln f(x) = \ln\left(e^{\sin x}\right) + \ln\sqrt{x^{17}+13}$$

$[\ln(ab) = \ln a + \ln b]$

$$\ln[f(x)] = (\sin x)\cdot \overset{1}{\boxed{\ln e}} + \frac{1}{2}\ln\left(x^{17}+13\right)$$

$[\ln(a^{b}) = b\ln a]$

Deriverer begge sider:

$[\sqrt{M} = M^{1/2}]$

$$\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x) = \cos x + \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^{17}+13}\left(17x^{16}\right)$$

Multipliser så opp $f(x)$. □