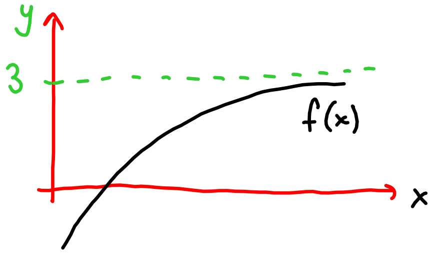
Asymptoter

- Linjen $y = a$ kalles en horisontal asymptote for f hvis

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = a \quad \text{eller} \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = a$$

eller begge deler. Figur:

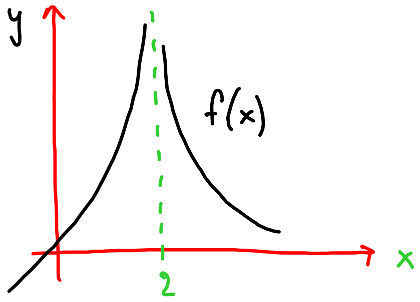


Horisontal asymptote
$y = 3$

- Linjen $x = a$ kalles en vertikal asymptote for f hvis

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{eller} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$$

eller begge deler. Figur:

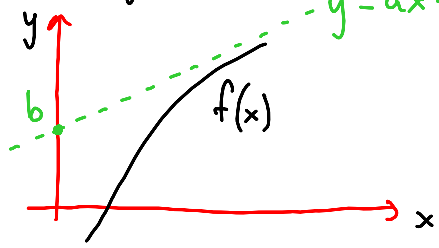


Vertikal asymptote
$x = 2$
(tosidig)

- Linjen $y = ax + b$ $(\text{der } a \neq 0)$ kalles en skrå asymptote for f hvis

$$\lim_{x \to -\infty} \left[f(x) - (ax+b) \right] = 0 \quad \text{eller} \quad \lim_{x \to \infty} \left[f(x) - (ax+b) \right] = 0$$

eller begge deler. Figur:



Hvordan finne skråasymptoter $y = ax + b$

(Ser på tilfellet $x \to \infty$, tilfellet $x \to -\infty$ er tilsvarende.)

① Finn $a = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

② Finn $b = \lim\limits_{x\to\infty} \left[f(x) - ax\right] \overset{[\infty - \infty]}{=} \lim\limits_{x\to\infty} ax\left[\dfrac{f(x)}{ax} - 1\right]$

Hvis a eller b ikke fins, har f ingen skråasymptote.

Bevis: Fra ② følger at $y = ax + b$ er en skråasymptote hvis grensen for b fins.

Omvendt, anta at $y = ax + b$ er en skrå asymptote for f. Da fås:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{\overbrace{f(x) - (ax+b)}^{\to 0}}{x} + a + \overbrace{\frac{b}{x}}^{\to 0}\right] = a$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x) - ax\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\underbrace{\{f(x) - (ax+b)\}}_{\to 0} + b\right] = b. \quad \square$$

eks. $f(x) = x e^{1/x}$

Finne skråasymptote når $x \to \infty$.

$$a = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} e^{\overset{\to 0}{1/x}} = e^0 = 1$$

$$b = \lim_{x \to \infty} \left[f(x) - ax \right]$$

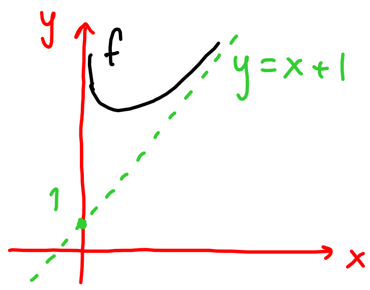
$$= \lim_{x \to \infty} \left[x e^{1/x} - x \right]$$

$$\overset{[\infty - \infty]}{=} \lim_{x \to \infty} x \left(e^{1/x} - 1 \right) \overset{[\infty \cdot 0]}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{e^{1/x} - 1}{\frac{1}{x}}$$

$$\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{e^{1/x} \cdot \cancel{\left(- \frac{1}{x^2} \right)}}{\cancel{- \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \to \infty} e^{\overset{\to 0}{1/x}} = 1$$

Skråasymptote:

$y = x + 1$



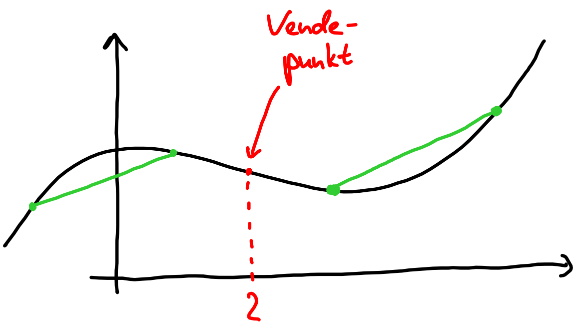
eks. 2 $f(x) = \dfrac{2x^3 + 3x^2 + 5x + 7}{x^2 - 1}$

Vgsk-metoden: Polynomdivisjon

Men vår metode virker også.

Skråasymptote : $y = 2x + 3$

Konvekse og konkave funksjoner



$x = 2$ er et vendepunkt

f kalles konkav på et intervall $I \subseteq D_f$ hvis hver gang vi velger to punkter a og b fra I, så vil den lineære funksjonen $L(x)$ gjennom punktene $(a, f(a))$ og $(b, f(b))$ oppfylle $L(x) \leq f(x)$ for alle $x \in (a,b)$. Hvis $L(x) < f(x)$ for alle $x \in (a,b)$, kalles f strengt konkav på I.

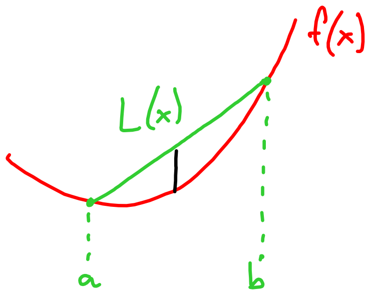
Begrepene konveks og strengt konveks defineres ved å bytte $\leq$ med $\geq$ og $<$ med $>$.

Teorem Anta at f' er kontinuerlig på intervallet I.

- Hvis $f''(x) > 0$ på det indre av I, så er f strengt konveks på I.
- Hvis $f''(x) < 0$ —— " —— " —— konkav —"—

Bevis Anta $f''(x) > 0$ på det indre av I.

La $g(x) = f(x) - L(x)$

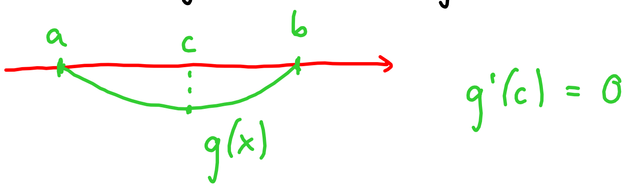


Da $g''(x) = f''(x) - 0$

$= f''(x) > 0$ på (a, b).

Dvs. $g'(x)$ er strengt voksende på $[a, b]$.

Vi har $g(a) = g(b) = 0$, så ved Rolles teorem fins c mellom a og b slik at $g'(c) = 0$.



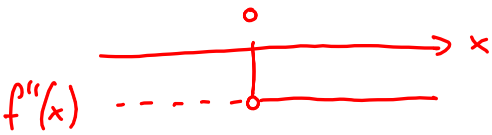
Ergo må $g'(x) < 0$ på (a, c) og $g'(x) > 0$ på (c, b), så $g(x) < 0$ for alle $x \in (a, b)$. Altså $L(x) > f(x)$ for $x \in (a, b)$. Ergo er f strengt konveks på I.

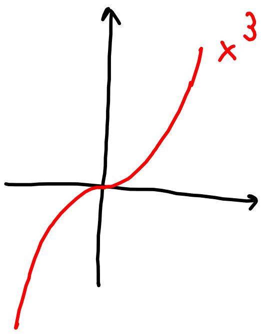
Tilfellet $f''(x) < 0$ tas tilsvarende. $\square$

eks. $f(x) = x^3$ gir

$f'(x) = 3x^2$

$f''(x) = 6x$





f er konveks på $[0, \infty)$
— " — konkav " $(-\infty, 0]$

faktisk strengt begge steder.