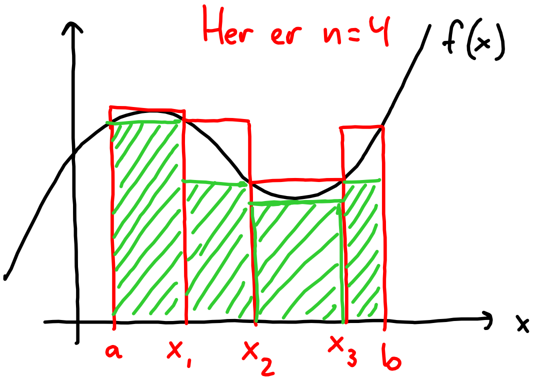
Integrasjonsteori

Anta f begrenset på $[a,b]$.



Partisjon av $[a,b]$:

$$\Pi = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\} \text{ der}$$

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

$$\Phi(\Pi) = \sum_{i=1}^{4} M_i (x_i - x_{i-1}) \qquad \text{øvre trappesum}$$

$$\text{der } M_i = \sup \{ f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i] \}$$

$$N(\Pi) = \sum_{i=1}^{4} m_i (x_i - x_{i-1}) \qquad \text{nedre trappesum}$$

$$\text{der } m_i = \inf \{ f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i] \}$$

Øvreintegralet av f på $[a,b]$:

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \inf \{ \Phi(\Pi) : \Pi \text{ partisjon av } [a,b] \}$$

Nedreintegralet av f på $[a,b]$:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \sup \{ N(\Pi) : \Pi \text{ partisjon av } [a,b] \}$$

Definisjon La $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ være begrenset. Vi sier at f er **integrerbar** på $[a,b]$ hvis

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

I så fall definerer vi **integralet**

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

av f på $[a,b]$ til å være den felles verdien.

Tilleggsdefinisjoner:

$$\overline{\int_a^a} f(x)\,dx = \underline{\int_a^a} f(x)\,dx = 0 \qquad \text{og}$$

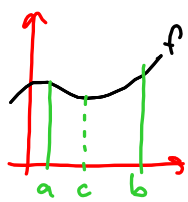
$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = -\overline{\int_b^a} f(x)\,dx \quad \text{for } b < a$$

(tilsv. med nedreintegraler)

Setning 8.3.1

Anta at $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ er begrenset og at $c \in (a,b)$.
Da er

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^c} f(x)\,dx + \overline{\int_c^b} f(x)\,dx$$



Tilsvarende for nedreintegraler.

Bevis Bok s. 375 (ε-argument)

Definisjon

En funksjon F kalles en antiderivert til f på $[a,b]$ hvis

$$F'(x) = f(x)$$

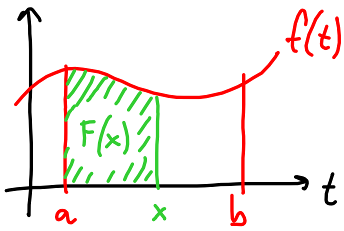
for alle $x \in (a,b)$ og F er kontinuerlig i endepunktene a og b.

Analysens fundamentalteorem (8.3.3)

Anta at $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig. Da er f integrerbar på ethvert intervall $[a,x]$ der $a \leq x \leq b$, og funksjonen

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

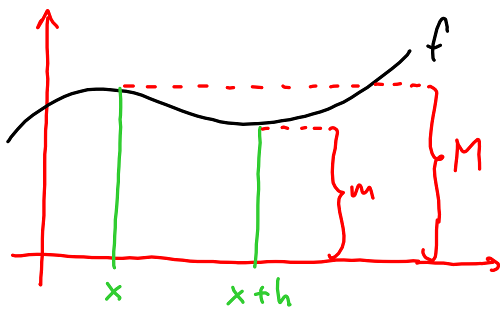
er en antiderivert til f på $[a,b]$.



Bevis Siden f er kontinuerlig på $[a,b]$, er den begrenset der. Derfor kan vi definere

$$G(x) = \overline{\int_a^x} f(t)\,dt \qquad \text{for } x \in [a,b].$$

La $x \in (a,b)$ og la $h > 0$ være så liten at $x + h < b$. La M og m være henholdsvis sup og inf for $f(t)$ på intervallet $[x, x+h]$.



Vi har

$$G(x+h) - G(x) = \overline{\int}_a^{x+h} f(t)\,dt - \overline{\int}_a^{x} f(t)\,dt$$

$$\overset{\boxed{8.3.1}}{=} \overline{\int}_x^{x+h} f(t)\,dt$$

Vi har også

$$m \cdot h \leq \overline{\int}_x^{x+h} f(t)\,dt \leq M \cdot h$$

dvs.

$$m \cdot h \leq G(x+h) - G(x) \leq M \cdot h$$

så

$$m \leq \frac{G(x+h) - G(x)}{h} \leq M.$$

Når $h \to 0$, må $m \to f(x)$ og $M \to f(x)$ ved kontinuitet av f. Ergo

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = f(x)$$

Tilsvarende vises dette når $h \to 0^-$. Har da $G'(x) = f(x)$ for $x \in (a,b)$. Tilsvarende vises at

$$H(x) = \underline{\int}_a^{x} f(t)\,dt$$

også oppfyller $H'(x) = f(x)$ for $x \in (a,b)$. At G og H er kontinuerlige i a og b vises i oppgave 8.3.17. Men da fins C slik at $G(x) = H(x) + C$ på $[a,b]$. (Middelverdisetningen, lemma 8.3.2)

Men $G(a) = H(a) = 0$, så $C = 0$.

Ergo $G(x) = H(x)$ for alle $x \in [a,b]$, så f er integrerbar på $[a,b]$. Vi har da for alle $x \in [a,b]$ at

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt = H(x) = G(x). \quad \square$$

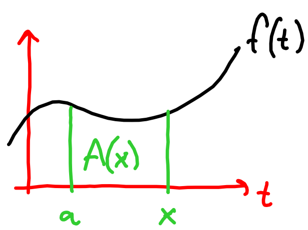
Korollar av fundamentalteoremet

Hvis F og f er kontinuerlige på $[a,b]$ og $F'(x) = f(x)$ for alle $x \in (a,b)$, så er

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b \overset{\text{def}}{=} F(b) - F(a)$$

Bevis Ved fundamentalteoremet vet vi at

$$A(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$



oppfyller $A'(x) = f(x)$.

Da er $F'(x) = A'(x)$, så

$$F(x) = A(x) + C$$

Dermed:

$$F(b) - F(a) = [A(b) + \cancel{C}] - [A(a) + \cancel{C}]$$

$$= A(b) - \underbrace{A(a)}_{0} = A(b)$$

$$= \int_a^b f(t)\,dt. \quad \square$$

8.4: Det ubestemte integralet

Vi definerer det ubestemte integralet

$$\int f(x)\,dx$$

til å være "den generelle antideriverte" til f.

Hvis $F'(x) = f(x)$, er altså

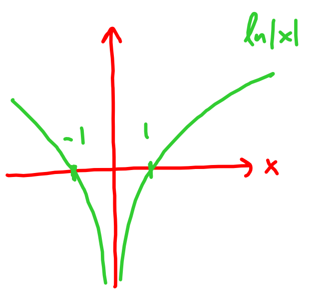
$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

eks. $\int x^{16}\,dx = \frac{1}{17}x^{17} + C$

Diverse ubestemte integraler

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$



$\ln|-2| = \ln 2$ f.eks.

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

Husk at: $a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{(\ln a)x}$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$$

Substitusjon (setning 8.4.5)

Anta at g er deriverbar, f er kontinuerlig og at F er en antiderivert av f. Da er

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$$

Bevis Den deriverte av $F(g(x)) + C$ er (kjerneregelen)

$$F'(g(x)) \cdot g'(x) + 0 = f(g(x)) \cdot g'(x). \quad \square$$

Hvordan bruke substitusjon?

1. Finn en kjerne $u(x)$ i integralet
2. Regn ut:
$$\frac{du}{dx} = u'(x), \quad du = u'(x)\,dx, \quad dx = \frac{1}{u'(x)}\,du$$
3. Sett inn for u og dx i integralet. Metoden fungerer hvis alle x-ene forsvinner.

eks.

$$\int x e^{x^2}\,dx = \int \cancel{x}\, e^{u} \frac{1}{2\cancel{x}}\,du = \frac{1}{2}\int e^{u}\,du$$

$$\boxed{u = x^2, \quad \frac{du}{dx} = 2x, \quad du = 2x\,dx, \quad dx = \frac{1}{2x}\,du}$$

$$= \frac{1}{2} e^{u} + C$$

$$= \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

<u>eks 2</u>

$$\int e^x \sin(e^x)\,dx = \int \cancel{e^x} \sin u \cdot \frac{1}{\cancel{e^x}}\,du = \int \sin u\,du$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u(x) = e^x, \quad \frac{du}{dx} = e^x \\ du = e^x dx, \quad dx = \frac{1}{e^x} du \end{array}}$$

$$= -\cos u + C$$

$$= -\cos(e^x) + C$$

8.5 Riemannsummer

Gitt en <u>partisjon</u> $\Pi = \{x_0, \dots, x_n\}$ av $[a, b]$.

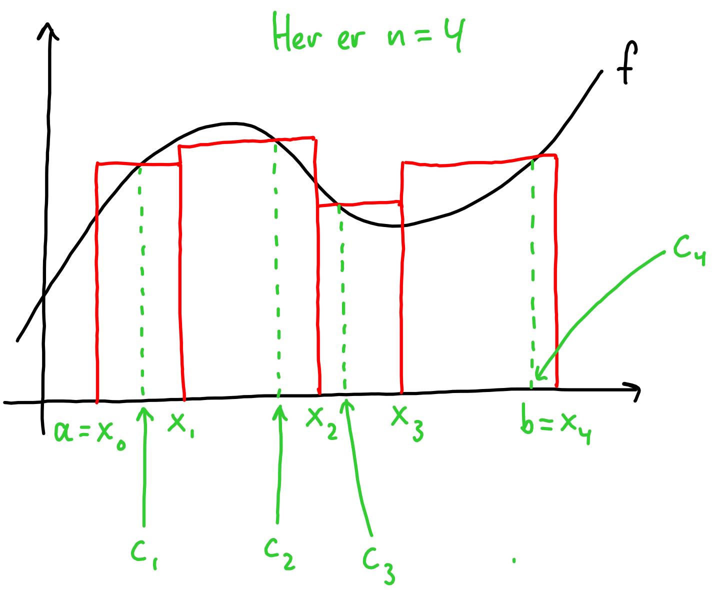
$\mathcal{U} = \{c_1, \dots, c_n\}$ kalles et <u>utvalg for Π</u> hvis

$$c_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

<u>Definisjon 8.5.1 (Riemann-sum)</u>

La $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ være en funksjon. Riemannsummen for f på $[a, b]$ tilsvarende Π og $\mathcal{U}$ er

$$R(\Pi, \mathcal{U}) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i \quad , \text{ der } \Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$



$\Pi = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}$

$\mathcal{U} = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$

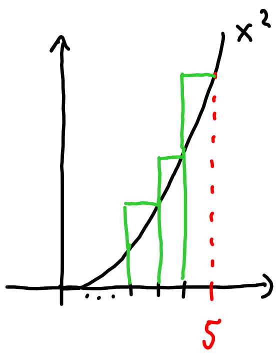
eks. $f(x) = x^2$

Π_n : partisjon av $[0, 5]$ med n like lange delintervaller

c_i : Høyre endepunkt i hvert intervall (lager U_n)

Skal finne $R(\Pi_n, U_n)$

Løsn.



$\Delta x_i = \frac{5}{n}$ for alle i

$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = n \cdot \frac{5}{n} = 5$

$x_1 = \frac{5}{n}$, $x_2 = 2 \cdot \frac{5}{n}$ osv.

$$
\begin{aligned}
R(\Pi_n, U_n) &= f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \dots + f(c_n)\Delta x_n \\
&= f(x_1) \cdot \frac{5}{n} + f(x_2) \cdot \frac{5}{n} + \cdots + f(x_n) \cdot \frac{5}{n} \\
&= x_1^2 \cdot \frac{5}{n} + x_2^2 \cdot \frac{5}{n} + \dots + x_n^2 \cdot \frac{5}{n} \\
&= \left(\frac{5}{n}\right)^2 \cdot \frac{5}{n} + \left(2 \cdot \frac{5}{n}\right)^2 \cdot \frac{5}{n} + \dots + \left(n \cdot \frac{5}{n}\right)^2 \cdot \frac{5}{n}
\end{aligned}
$$