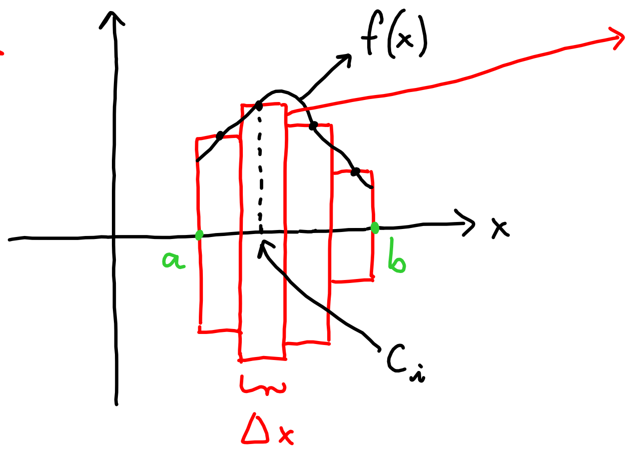
Anvendelser av integralet (8.6)

Omdreiningslegeme om x-aksen

Anta at f er kontinuerlig og ikke-negativ på $[a, b]$. Volumet av legemet vi får når området under grafen til f på $[a, b]$ roteres om x-aksen, er

$$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 \, dx$$

Bevis



Når vi roterer, gir dette rektanglet en sylinderformet skive med radius $f(c_i)$ og tykkelse Δx

Volum av skiven:

$$\Delta V_i = \text{grunnflate} \cdot \Delta x = \pi \cdot [f(c_i)]^2 \cdot \Delta x$$

Summen av volumet til alle skivene:

$$\sum_{i=1}^{n} \pi \cdot [f(c_i)]^2 \cdot \Delta x$$

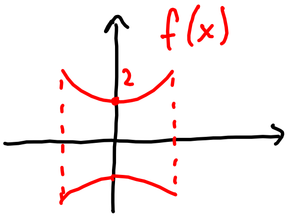
Dette er en Riemannsum for $\pi \cdot [f(x)]^2$ på $[a, b]$.

Så når $\Delta x \to 0$, nærmer den seg

$$\int_a^b \pi \cdot [f(x)]^2 \, dx. \quad \square$$

eks. Finn volumet av omdreiningslegemet som fås når grafen til $f(x) = x^2 + 2$ på $[-1, 1]$ dreies om x-aksen.

Løsn.



Vi får:

$$V = \int_{-1}^{1} \pi \left[f(x)\right]^2 \, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \pi \left(x^2+2\right)^2 \, dx$$

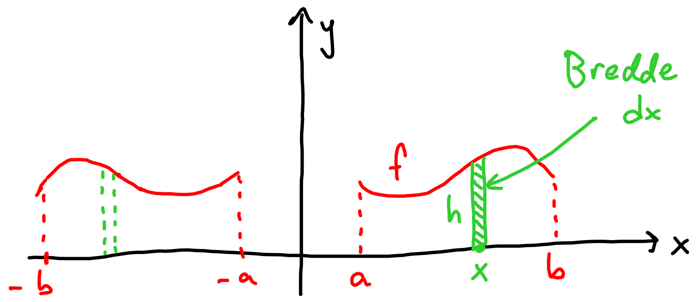
$$= \text{osv.} \quad \square$$

Omdreiningslegeme om y-aksen

Anta at f er kontinuerlig og ikke-negativ på $[a, b]$, der $a \geq 0$. Volumet av legemet vi får når området under grafen til f på $[a, b]$ roteres om y-aksen, er

$$V = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x) \, dx$$

Illustrasjon og fysikerbevis



Når den roteres, gir den skraverte, grønne stripen et sylinderskall med radius x og høyde $h = f(x)$

Sylinderskallet har altså

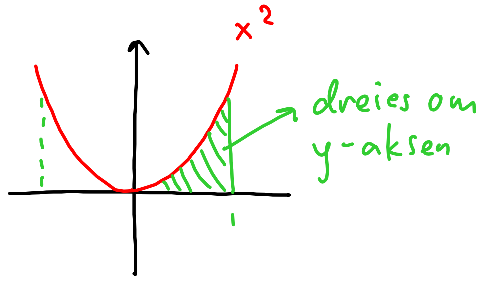
$$\text{areal} = \text{omkrets} \cdot \text{høyde} = (2\pi x) \cdot f(x)$$

$$\text{volum} \simeq \text{areal} \cdot \text{tykkelse} = (2\pi x) \cdot f(x) \cdot dx = dV$$

"Summerer": $V = \int_a^b dV = \int_a^b 2\pi x \cdot f(x)\, dx$. $\square$

eks. Finn volumet av omdreiningslegemet som fås når området under grafen til $f(x) = x^2$ på $[0, 1]$ roteres om y-aksen.

Løsn.



Formelen gir

$$V = 2\pi \int_0^1 x \cdot f(x)\, dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 x \cdot x^2\, dx$$

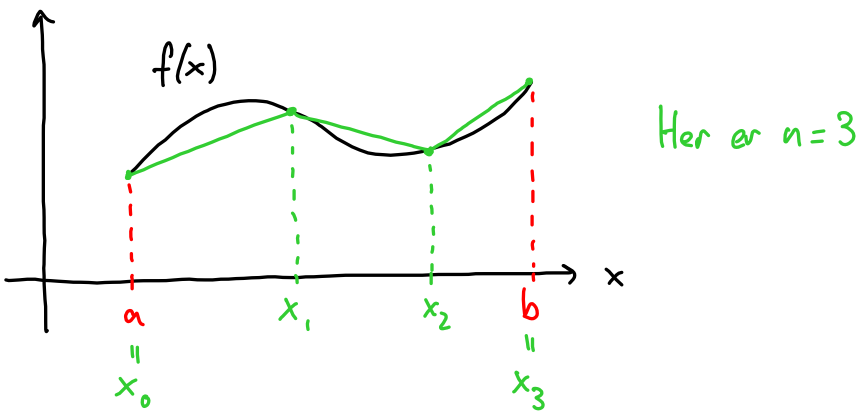
$$= 2\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}. \ \square$$

Vi definerer lengden av grafen til f på $[a, b]$ på følgende måte.

Vi lager en partisjon

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

måler lengden av linjestykket fra $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ til punktet $(x_i, f(x_i))$ på grafen for hver i, og summerer:



Vi definerer lengden av grafen til f på $[a, b]$ som minste øvre skranke (minste øvre begrensning) for mengden av lengdeanslag vi får på denne måten.

Teorem (graflengde)

Hvis $f'(x)$ er kontinuerlig på $[a, b]$, så er lengden s av grafen til f på $[a, b]$ gitt ved

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

Bevis Se bok. $\square$