Delvis integrasjon (9.1)

Teorem

Hvis $F(x)$ og $G(x)$ er funksjoner med kontinuerlige deriverte, så er

$$\int F(x)G'(x)\,dx = F(x)G(x) - \int F'(x)G(x)\,dx$$

Bevis Deriverer på begge sider:

$$F(x)G'(x) = \left[F(x)G(x)\right]' - F'(x)G(x)$$

Dette er produktregelen for derivasjon. □

eks.

$$\int x^2 e^{-x}\,dx = x^2(-e^{-x}) - \int 2x(-e^{-x})\,dx$$

Delvis $F(x) = x^2$ $G'(x) = e^{-x}$

$F'(x) = 2x$ $G(x) = -e^{-x}$

$$= -x^2e^{-x} + 2\int xe^{-x}\,dx$$

$$= -x^2e^{-x} + 2\left[-xe^{-x} - \int 1\cdot(-e^{-x})\,dx\right]$$

Delvis $F(x) = x$ $G'(x) = e^{-x}$

$F'(x) = 1$ $G(x) = -e^{-x}$

$$= -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} + 2\int e^{-x}\,dx$$

$$= \underline{\underline{-x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C}}$$

I - metoden (variant av delvis integrasjon)

eks. $\int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x - \int e^x(-\cos x)\,dx$

$$\boxed{\begin{array}{ll} F(x) = e^x & G'(x) = \sin x \\ F'(x) = e^x & G(x) = -\cos x \end{array}}$$

$= -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx$

$= -e^x \cos x + \left[e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx \right]$

$$\boxed{\begin{array}{ll} F(x) = e^x & G'(x) = \cos x \\ F'(x) = e^x & G(x) = \sin x \end{array}}$$

Kaller vi det opprinnelige integralet I, står det her:

$$I = -e^x \cos x + e^x \sin x - I$$

$$2I = -e^x \cos x + e^x \sin x$$

dvs. $I = -\frac{1}{2}e^x \cos x + \frac{1}{2}e^x \sin x + C$

$\boxed{\text{Substitusjon (9.2)}}$

eks. $\displaystyle\int \arcsin x \cdot \overset{du}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx} = \int u \frac{1}{\cancel{\sqrt{1-x^2}}} \cancel{\sqrt{1-x^2}}\, du$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = \arcsin x & \dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ du = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx & dx = \sqrt{1-x^2}\,du \end{array}}$$

$= \int u\, du$

$= \frac{1}{2}u^2 + C$

$= \frac{1}{2}(\arcsin x)^2 + C$

"Baklengs" substitusjon (setning 9.2.3)

begrunner at vi også kan regne slik ved substitusjon:

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = u(x) \quad \text{gir} & x = h(u) \\ \dfrac{dx}{du} = h'(u), & dx = h'(u)\cdot du \end{array}}$$

eks. $\displaystyle\int \arcsin x\, dx = \int u \cos u\, du = \ldots$ delvis integrasjon med

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = \arcsin x \quad \text{gir} & x = \sin u \\ \dfrac{dx}{du} = \cos u, & dx = \cos u\, du \end{array}}$$

$F(u) = u$

$G'(u) = \cos u$

Gjør dette ferdig, og sett inn $u = \arcsin x$ til slutt. □

eks.

$$\int \sqrt[3]{x+1}\,dx = \int u \cdot 3u^2\,du = 3\int u^3\,du$$

$$u = \sqrt[3]{x+1} \quad \text{gir} \quad x+1 = u^3$$
$$x = u^3 - 1$$
$$\frac{dx}{du} = 3u^2, \quad dx = 3u^2\,du$$

$$= \frac{3}{4}u^4 + C$$

$$= \frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^4 + C$$

$$= \frac{3}{4}(x+1)^{4/3} + C$$

eks.

$$\int \sqrt{\frac{\arccos^3 x}{1-x^2}}\,dx = \int \frac{\sqrt{(\arccos x)^3}}{\cancel{\sqrt{1-x^2}}} \cdot \left(-\cancel{\sqrt{1-x^2}}\right) du$$

$$u = \arccos x \quad \text{gir} \quad \frac{du}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$du = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, \quad dx = -\sqrt{1-x^2}\,du$$

$$= -\int \sqrt{u^3}\,du = -\int (u^3)^{1/2}\,du = -\int u^{3/2}\,du$$

$$= -\frac{1}{\frac{5}{2}}u^{5/2} + C = -\frac{2}{5}u^{5/2} + C$$

$$= -\frac{2}{5}(\arccos x)^{5/2} + C$$

$\boxed{\text{Kvadrat-teknikken}}$ (seksjon 9.3)

La $n \geq 1$ være et helt tall. Integralet

$$\int \frac{Ax + B}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx$$

kan løses slik, gitt at ax^2+bx+c ikke har nullpunkter:

1. Bruk "smugling" til å skrive integralet på formen

$$C_1 \cdot \int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx \; + C_2 \cdot \int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx$$

2. Venstre integral løses ved substitusjonen $u = ax^2+bx+c$.

3. Høyre integral: Skriv om til formen

$$\int \frac{1}{(1+u^2)^n}\,du$$

ved å utvide til fullstendig kvadrat og substituere.

Bruk deretter rekursjonsformelen [bevis: Bok s. 452]

$$\int \frac{1}{(1+u^2)^n}\,du = \frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{u}{(1+u^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} \int \frac{1}{(1+u^2)^{n-1}}\,du$$

inntil du ender opp med integralet

$$\int \frac{1}{1+u^2}\,du.$$

Det kan løses direkte: $\int \frac{1}{1+u^2}\,du = \arctan u + C$

eks Skal finne $\displaystyle\int \frac{x+2}{(x^2+x+1)^2}\,dx$

1 $$\int \frac{x+2}{(x^2+x+1)^2}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+1) + \frac{3}{2}}{(x^2+x+1)^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,dx$$

2 Venstre integral:

$$\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}\,dx = \int \frac{du}{u^2} = \int \frac{1}{u^2}\,du$$

$$\boxed{u = x^2+x+1, \quad \frac{du}{dx} = 2x+1 \qquad du = (2x+1)\,dx}$$

$$= \int u^{-2}\,du$$

$$= \frac{1}{(-1)}u^{-1} + C$$

$$= -\frac{1}{u} + C = -\frac{1}{x^2+x+1} + C$$

3 Høyre integral:
$$\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} = \int \frac{dx}{\left[\frac{3}{4}+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right]^2} = \int \frac{dx}{\left[\frac{3}{4}\left\{1+\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^2\right\}\right]^2}$$

Utvider til fullstendig kvadrat:
$$x^2+x+1 = \left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{4} = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{4}+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}\left\{1+\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right\} = \frac{3}{4}\left\{1+\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^2\right\}$$

$$= \int \frac{dx}{\left(\frac{3}{4}\right)^2\left\{1+\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^2\right\}^2} = \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^2}\int \frac{dx}{\left\{1+\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^2\right\}^2}$$

$$= \left(\frac{4}{3}\right)^2 \cdot \int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\,du}{\{1+u^2\}^2} = \frac{16}{9}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\int\frac{du}{(1+u^2)^2}$$

$$u = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right) \qquad \frac{du}{dx} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$
$$du = \frac{2}{\sqrt{3}}\,dx, \quad dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\,du$$

$$= \frac{8\sqrt{3}}{9}\int\frac{1}{(1+u^2)^2}\,du$$

rek. formel

$$= \frac{8\sqrt{3}}{9}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{u}{1+u^2}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+u^2}\,du\right]$$

$$= \frac{8\sqrt{3}}{9}\left[\frac{u}{2(1+u^2)}+\frac{1}{2}\arctan u\right] + C$$

$$= \frac{8\sqrt{3}}{9}\left[\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)}{2\left(1+\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right)}+\frac{1}{2}\arctan\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]\right]+C$$

(Sett så sammen de to integralene.)

Delbrøksoppspalting (9.3)

kan brukes til å integrere alle funksjoner på formen

$$\frac{p(x)}{q(x)}$$ der p og q er polynomer.

1. Bruk polynomdivisjon inntil $p(x)$ har lavere grad enn $q(x)$
2. Faktoriser $q(x)$ i faktorer

$$(x-r)^n \quad \text{og} \quad (ax^2+bx+c)^n$$

der $ax^2+bx+c=0$ ikke har reelle løsninger.

3. Hver faktor $(x-r)^n$ gir leddene

$$\frac{a_1}{x-r} + \frac{a_2}{(x-r)^2} + \dots + \frac{a_n}{(x-r)^n}$$

og hver faktor $(ax^2+bx+c)^n$ gir leddene

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \dots + \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

Sett $\frac{p(x)}{q(x)}$ lik summen av alle ledd. Gang så opp $q(x)$, og finn konstantene. Metoder:

- sammenlikne koeffisienter (gir likn. system)
- sette inn lure x-verdier.

eks. 1 $\displaystyle\int \frac{3x^2-3x-2}{(x^2-1)(x-1)}\,dx$

1. grad $(p) = 2$, grad $(q) = 3$, dvs. ok.
2. $x^2 - 1 = 0$ gir $x = \pm 1$.

   Så $x^2 - 1 = (x-1)\cdot(x+1)$
3. Vi får

$$\frac{3x^2-3x-2}{(x+1)\cdot(x-1)^2} = \frac{a_1}{x+1} + \frac{a_2}{x-1} + \frac{a_3}{(x-1)^2}$$

Multiplikasjon med nevneren gir

$$3x^2-3x-2 = a_1(x-1)^2 + a_2(x+1)(x-1) + a_3(x+1)$$

Lure x-verdier:

$x = 1$ gir $3\cdot 1 - 3\cdot 1 - 2 = a_3(1+1)$

$-2 = 2a_3$, $a_3 = -1$

$x = -1$ gir $3\cdot 1 + 3 - 2 = a_1\cdot(-2)^2$

$4 = 4a_1$, $a_1 = 1$

Setter du dette inn og ganger ut parentesene, får du

$$3x^2 - 3x - 2 = x^2 - 2x + 1 + a_2x^2 - a_2 - x - 1$$

Ser av x^2-leddene at $a_2 = 2$. Ergo:

$$\frac{3x^2-3x-2}{(x^2-1)\cdot(x-1)} = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-1} + \frac{(-1)}{(x-1)^2}$$

Osv. $\square$

eks. 2 $\displaystyle\int \frac{x^3+3x^2+4x}{(x^2+2x+2)^3}\,dx$

(1) Grad teller er 3, grad nevner er 6, dvs. ok

(2) $x^2+2x+2=0$ har ingen reelle løsninger, dvs. ok

(3) $$\frac{x^3+3x^2+4x}{(x^2+2x+2)^3} = \frac{Ax+B}{x^2+2x+2} + \frac{Cx+D}{(x^2+2x+2)^2} + \frac{Ex+F}{(x^2+2x+2)^3}$$

Multiplikasjon med nevneren gir

$$x^3+3x^2+4x = (\cancel{A}x+\cancel{B})(x^2+2x+2)^2 + (Cx+D)(x^2+2x+2) + Ex+F$$

Her må $A=0$, fordi A blir stående alene foran x^5 til høyre.

Så må $B=0$, fordi B da blir alene foran x^4 til høyre

Gang så ut resten på høyre side, og sammenlikne koeffisienter. $\square$