n-tupler (FVLA 1.1 og 1.2)

Definisjoner

Et n-tuppel er et uttrykk $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ med n reelle tall.

$\mathbb{R}^n$ = mengden av alle n-tupler

$\mathbb{R}^2$ = planet $\quad$ $\mathbb{R}^3$ = "rommet"

Hvis $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$ og $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n)$, så er

$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$

$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, \dots, a_n - b_n)$

$s\vec{a} = (sa_1, \dots, sa_n)$ $\quad$ s reelt tall (kalles en "skalar")

$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$ $\quad$ (lengde)

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$ $\quad$ (skalarprodukt)

- Vinkelen v mellom $\vec{a}$ og $\vec{b}$, for $\vec{a}, \vec{b} \neq (0, \dots, 0) = \vec{0}$:

$$v \overset{\text{def}}{=} \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right), \quad \text{dvs.} \quad \cos v = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

dvs. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos v$

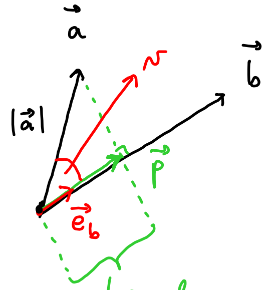
- Hvis $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, kalles $\vec{a}$ og $\vec{b}$ ortogonale. Vi sier da at de står normalt (eller ortogonalt eller vinkelrett) på hverandre.

- Projeksjonen av $\vec{a}$ på $\vec{b}$:

$\vec{p} = (\vec{a} \cdot \vec{e}_b)\, \vec{e}_b$

der $\vec{e}_b = \dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ $\quad$ (enhetsvektor i retning $\vec{b}$)

(antar her at $|\vec{b}| \neq 0$)



Lengde:

$|\vec{p}| = |\vec{a}| \cdot \cos v$

$= |\vec{a}| \cdot |\vec{e}_b| \cdot \cos v$

$= \vec{a} \cdot \vec{e}_b$

Teorem For alle $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ i $\mathbb{R}^n$ og alle $s, t \in \mathbb{R}$ gjelder:

(1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

(2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

(3) $s(\vec{a} + \vec{b}) = s\vec{a} + s\vec{b}$

(4) $(s+t)\vec{a} = s\vec{a} + t\vec{a}$

(5) $\vec{c} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{b}$

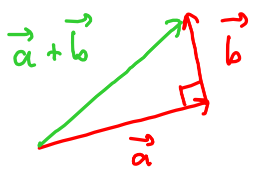
(6) $(s\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (s\vec{b}) = s \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$

(7) $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$ og $|s\vec{a}| = |s| \cdot |\vec{a}|$

(8) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ og $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ $\Leftrightarrow$ vinkelen mellom $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er $\frac{\pi}{2}$

(9) Hvis $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, så er $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$

(Generalisert Pytagoras)



(10) Projeksjonen $\vec{p}$ av $\vec{a}$ ned på $\vec{b}$ oppfyller

$$\vec{p} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} \qquad |\vec{p}| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|} \qquad \vec{p} \perp (\vec{p} - \vec{a})$$

(11) $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ (Schwartz' ulikhet)

(12) $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ (Trekantulikheten)

Bevis (1) - (8) droppes, se bok

(9) $|\vec{a}+\vec{b}|^2 \overset{7}{=} (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$

$$\overset{2,5}{=} \vec{a}\cdot\vec{a} + \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{b}$$

$$\overset{7}{=} |\vec{a}|^2 + 0 + 0 + |\vec{b}|^2$$

(10) $\vec{p} \overset{\text{def}}{=} (\vec{a}\cdot\vec{e}_b)\vec{e}_b = \left(\vec{a}\cdot\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$

$$\overset{6}{=} \frac{1}{|\vec{b}|}\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\frac{1}{|\vec{b}|}\vec{b} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$$

Dermed

$$|\vec{p}| \overset{7}{=} \left|\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\right|\cdot|\vec{b}| = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{b}|}$$

Utledning av $\vec{p}\cdot(\vec{p}-\vec{a}) = 0$: Se bok.

(11) La $\vec{p}$ være projeksjonen av $\vec{a}$ ned på $\vec{b}$.
Siden $\vec{p} \perp (\vec{a}-\vec{p})$, gir Pytagoras

$$|\vec{p}+(\vec{a}-\vec{p})|^2 = |\vec{p}|^2 + |\vec{a}-\vec{p}|^2$$

$$|\vec{a}|^2 = |\vec{p}|^2 + |\vec{a}-\vec{p}|^2$$

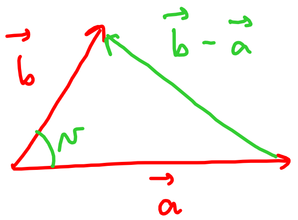
Så $|\vec{a}| \geq |\vec{p}| = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{b}|}$

Viste i sted (10)

Gang så opp $|\vec{b}|$. Da fås $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}| \geq |\vec{a}\cdot\vec{b}|$.

(12) Se bok. Anbefales. □

Motivasjon for definisjonen av vinkelen mellom n-tupler



Cosinussetningen:

$$|\vec{b}-\vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\cdot \boxed{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot \cos v}$$

Forrige teorem:

$$|\vec{b}-\vec{a}|^2 = (\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{a}) = \vec{b}\cdot\vec{b} - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{a}$$

$$= |\vec{b}|^2 - 2\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}} + |\vec{a}|^2$$

Sammenlikning gir at $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos v$

Linjer

La $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$. Linjen gjennom $\vec{a}$ parallell med $\vec{b}$ består av punktene

$$\vec{r}(t) = \vec{a} + t\vec{b} \quad \text{der } t \in \mathbb{R}$$