$\boxed{\text{Komplekse } n\text{-tupler} \quad (1.3)}$

$\vec{z} = (z_1, \dots, z_n)$ der $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$

eks. $\vec{z} = (2+i, -i, 5, 0) \in \mathbb{C}^4$

$\vec{z} + \vec{w}$, $\vec{z} - \vec{w}$ og $s\vec{z}$ for $s \in \mathbb{C}$ er definert som før.

eks. $i(2+i, i) = (2i-1, -1)$

Men lengde og skalarprodukt blir litt annerledes:

$$|\vec{z}| = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_n|^2}$$

$$\vec{z} \cdot \vec{w} = z_1 \overline{w_1} + \dots + z_n \overline{w_n}$$

Dermed blir også noen regneregler annerledes, se setning 1.3.4 i boken. F. eks.

$$\vec{z} \cdot \vec{w} = \overline{\vec{w} \cdot \vec{z}}$$

Preludium til 1.4 : Determinanter (fra 1.8)

2x2 - determinanter

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

eks. $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} = 5(-2) - 3\cdot 7 = -10 - 21 = -31.$ □

Større determinanter enn 2x2

regnes ut ved å "løse opp etter 1. linje". For 3x3-determinanter:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

Regler for slik oppløsning:

- fortegnet veksler $+ - + - + - \dots$ bortover
- underdeterminantene vi får å gange med, fremkommer ved å stryke linjen og søylen det aktuelle tallet i linje 1 er med i.

eks. 1

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 8 & 9 \\ 1 & 7 & -3 \end{vmatrix} = 2\cdot \begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} - 3\cdot \begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 5\cdot \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}$$

$= 2\cdot(-24-63) - 3(-12-9) + 5(28-8) =$ regn ut. □

eks. 2

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} - (-3)\cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

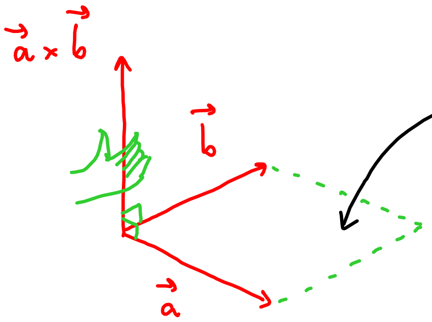
$$+ 0\cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} - 1\cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$=$ regn ut hver 3x3-determinant. □

Vektorproduktet (1.4)

Vektorproduktet $\vec{a} \times \vec{b}$ av to vektorer i $\mathbb{R}^3$ er en ny vektor i $\mathbb{R}^3$ slik at

- $\vec{a} \times \vec{b}$ står normalt på både $\vec{a}$ og $\vec{b}$
- $\vec{a}$, $\vec{b}$ og vektoren $\vec{a} \times \vec{b}$ danner et høyrehåndssystem:



lengden av $\vec{a} \times \vec{b}$ er arealet av parallellogrammet utspent av $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Algebraisk definisjon

Vektorproduktet av $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ og $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ er

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \quad \text{der} \quad \begin{cases} \vec{e}_1 = (1,0,0) \\ \vec{e}_2 = (0,1,0) \\ \vec{e}_3 = (0,0,1) \end{cases}$$

eks. $\vec{a} = (1, 0, 3)$ og $\vec{b} = (-2, 6, 4)$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & 6 & 4 \end{vmatrix} = \vec{e}_1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} - \vec{e}_2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + \vec{e}_3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{e}_1 (0-18) - \vec{e}_2 (4+6) + \vec{e}_3 (6-0)$$

$$= -18\vec{e}_1 - 10\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3 = (-18, -10, 6). \quad \square$$

Teorem La $\vec{a}, \vec{b}$ og $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$ og $s \in \mathbb{R}$. Da

(1) $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$

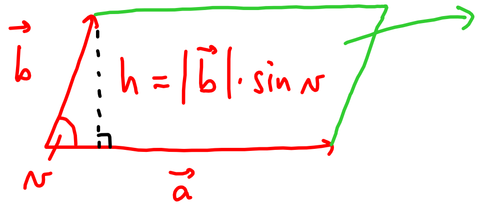
(2) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})$

(3) $(s\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (s\vec{b}) = s \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$

(4) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0$ (står normalt)

(5) $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$

(6) $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \nu$, der ν er vinkelen mellom $\vec{a}$ og $\vec{b}$. Med andre ord: $|\vec{a} \times \vec{b}|$ er arealet av parallellogrammet utspent av $\vec{a}$ og $\vec{b}$.



Areal $g \cdot h$
$= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \nu$

Bevis (1)-(5): Sett $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ og $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ og regn ut begge sidene.

(6): Ved (5) har vi

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

$$\overset{\text{vet}}{=} |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - \left(|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \nu\right)^2$$

$$= |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot \cos^2 \nu$$

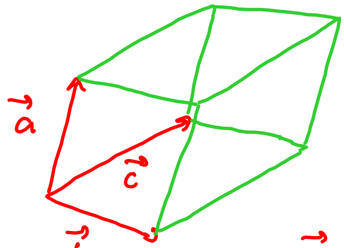
$$= |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \left(1 - \cos^2 \nu\right)$$

$\boxed{\sin^2 \nu + \cos^2 \nu = 1}$

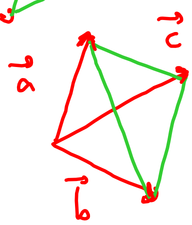
$$= |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot \sin^2 \nu.$$ Ta så $\sqrt{}$. $\square$

Teorem Volumet av parallellepipedet utspent av vektorene $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$ er

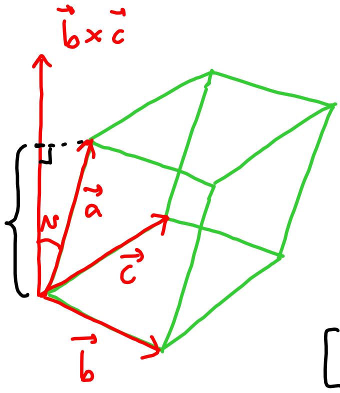
$$\left|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})\right| = \left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{matrix} \right\|$$



Volumet av pyramiden utspent av $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$ er $1/6$ av dette.



Bevis



$$\begin{aligned} V &= G\cdot h \\ &= |\vec{b}\times\vec{c}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos v \\ &= (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a} \end{aligned}$$

[minus hvis $\vec{b}\times\vec{c}$ peker motsatt vei]

Regn så ut determinanten og $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$, og se at de er like bortsett evt. fra fortegnet. $\square$

eks. Finn volumet av parallellepipedet utspent av $(1,2,5)$, $(2,3,0)$ og $(2,5,7)$

Løsn.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} &= 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 5\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 1\cdot(21-0) - 2\cdot(14-0) + 5(10-6) \\ &= 21 - 28 + 20 = \underline{\underline{13}} \end{aligned}$$