

## Matriser

En  $(m \times n)$ -matrise er et tallskjema med  $m$  rader (linjer) og  $n$  søyler.

eks.  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 8 & 3 & 16 \end{pmatrix}$  er en  $(2 \times 3)$ -matrise

Notasjon:  $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix}$

F.eks.  $A_{13} = -1$

Generelt:  $A_{ij}$  = tallet som er på linje  $i$ , søyle  $j$ .

eks. ICA: Brød 24.50, 1 l melk 14.90, 1 l juice 18.90  
KIWI: Brød 25.90, 1 l melk 12.90, 1 l juice 17.90

Barnehagen trenger hver mandag:

Ertekroken (store barn)

7 brød  
5 l melk  
1 l juice

Masalusa (småbarnsavg.)

3 brød  
2 l melk  
0 l juice

Kan samle informasjonen i matrisene :

$$A = \begin{bmatrix} 24.50 & 14.90 & 18.90 \\ 25.90 & 12.90 & 17.90 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi kan da regne ut :

$$\begin{aligned} \text{ICA: } & 264.90 \text{ for Erttekrok, } & 103.30 \text{ for Masakusa} \\ \text{KIWI: } & 263.70 \text{ - " - , } & 103.50 \text{ - " - } \end{aligned}$$

Kan samle denne infoen i matrisen

$$C = \begin{bmatrix} 264.90 & 103.30 \\ 263.70 & 103.50 \end{bmatrix}$$

Matrisen C kalles produktet av A og B, og vi skriver

$$AB = C$$

Altså :

$$\begin{bmatrix} 24.50 & 14.90 & 18.90 \\ 25.90 & 12.90 & 17.90 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 264.90 & 103.30 \\ 263.70 & 103.50 \end{bmatrix}$$

Vi kan regne ut matriseproduktet slik :

7	3	<p style="color: green; margin: 0;">Her skal det stå :</p> $24.50 \cdot 7 + 14.90 \cdot 5 + 18.90 \cdot 1$ $= 264.90$	
5	2		
1	0		
24.50	14.90	18.90	<p style="color: green; margin: 0;">Produktet kommer frem her !</p>
25.90	12.90	17.90	

## Definisjon av matrisemultiplikasjon

Vi finner hva som skal stå på hver plass i produktmatrisen ved å ta skalarprodukt av linjen og søyle som peker inn mot plassen når vi lager et "kryss".

eks.

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{array}{c|ccc} & 7 & 0 & 1 \\ \hline 5 & 1 & 37 & -1 & 10 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 10 \end{array} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 37 & -1 & 10 \\ 4 & -2 & 10 \end{bmatrix}}}$$

## Annen regning med matriser

Addisjon, subtraksjon og multiplikasjon med skalar (tall) foregår komponentvis. Å transponere en matrise betyr å bytte linjer med søyler.

eks.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 14 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ -3 & 19 & 7 \end{bmatrix}}}$$

transponert

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix}^T = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}}}$$

### Teorem Regneregler for matriser

$$(1) \quad (AB)C = A(BC)$$

$$(2) \quad A(B+C) = AB+AC \quad \text{og} \quad A(B-C) = AB-AC$$

$$(3) \quad (B+C)A = BA+CA \quad \text{og} \quad (B-C)A = BA-CA$$

$$(4) \quad (sA)B = A \cdot (sB) = s(AB) \quad \text{for alle tall } s$$

$$(5) \quad A+B = B+A, \quad \text{men} \quad AB \neq BA \quad \text{generelt}$$

$$(6) \quad (AB)^T = B^T \cdot A^T$$

Bevis (2) - (6) er "greie" å sjekke (droppes, se bok).

For å begrunne (1), utvider vi barnehageeksemplet.

Antall avdelinger med	Leverandør 1	Leverandør 2
Ertekrok-matbehov	4	1
Masalur-matbehov	3	2

Samler leverandør-info i matrisen

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Vi får nå

$$(AB)D = \begin{array}{cc|cc} & & 4 & 1 \\ & & 3 & 2 \\ \hline 264.90 & 103.30 & 1369.50 & 471.50 \\ 263.70 & 103.50 & 1365.30 & 470.70 \end{array}$$

L1 hos ICA (points to column 3)  
 L2 hos ICA (points to column 4)  
 L1 hos KVV (points to row 2)  
 L2 hos KVV (points to row 1)

På den annen side:

$$BD = \begin{array}{cc|cc} & & 4 & 1 \\ & & 3 & 2 \\ \hline 7 & 3 & 37 & 13 \\ 5 & 2 & 26 & 9 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \end{array}$$

Hvor mange brød trenger L2?  
 Hvor mange liter melk trenger L2?  
 Hvor mange liter juice trenger L2?

$$A(BD) = \begin{array}{ccc|cc} & & & 37 & 13 \\ & & & 26 & 9 \\ & & & 4 & 1 \\ \hline 24.50 & 14.90 & 18.90 & & \\ 25.90 & 12.90 & 17.90 & & \end{array}$$

Hvor mye L2 betaler hos KVV (points to the bottom-right cell)

Vi ser at det ikke er tilfeldig at dette blir lik  $(AB)D$ .  
 Matrisenes formater og tall kan endres til vilkårlige matriser.  
 Ergo gir dette en generell begrunnelse for at  $A(BD) = (AB)D$ .  
 Regelen kan så sjekkes algebraisk.  $\square$

## Matriselikninger. Matriser som avbildninger

eks.  $\begin{cases} 4x + 2y = 5 \\ -x + 3y = 8 \end{cases}$  kan skrives som matriselikningen  $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}$

Her er

		x
		y
4	2	4x+2y
-1	3	-x+3y

Så matriselikningen sier at  $\begin{bmatrix} 4x+2y \\ -x+3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}$  □

En  $(n \times n)$ -matrise  $A$  kan oppfattes som en funksjon

$$A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

ved at punktene oppfattes som søylevektører og vi ganger med  $A$  fra venstre.

eks.  $n = 2$ ,  $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

$A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ved

$$A(x, y) = A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

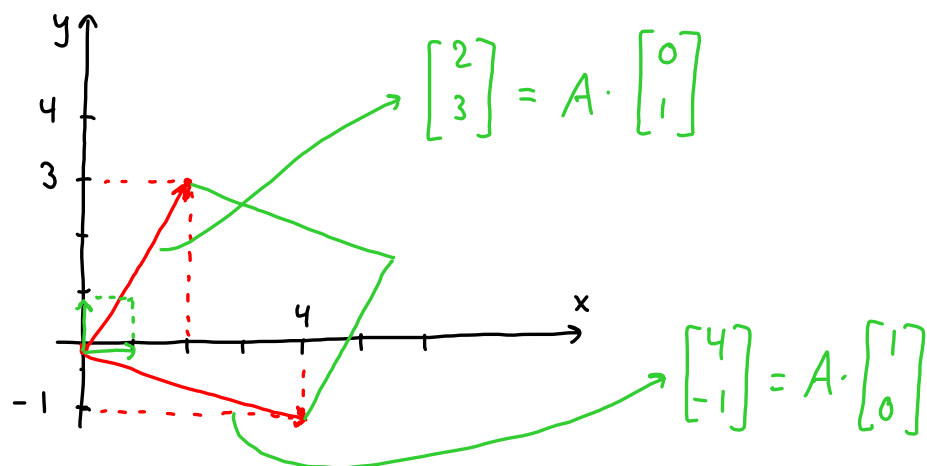
For eksempel:

$$A(5, 7) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{array}{cc|c} & & 5 \\ & & 7 \\ \hline 4 & 2 & 34 \\ -1 & 3 & 16 \end{array} = \begin{bmatrix} 34 \\ 16 \end{bmatrix} = (34, 16)$$

$$A(1, 0) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{array}{cc|c} & & 1 \\ & & 0 \\ \hline 4 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \end{array} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A(0, 1) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{array}{cc|c} & & 0 \\ & & 1 \\ \hline 4 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \end{array} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Så: En matrise avbilder alltid standardbasisvektorene  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  og  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  over på søylevektorene sine.



## Identitetsmatriser

er matrisene

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ osv.}$$

Disse oppfører seg som tallet 1 ved matrisemultiplikasjon:

$$I_n \cdot A = A \cdot I_n = A$$

for alle matriser  $A$  slik at produktene er definert.

eks.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \pi \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{array}{cc|c} & & \pi \\ 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & \pi \\ & & \sqrt{2} \end{array} = \begin{bmatrix} \pi \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

En  $(n \times n)$ -matrise  $A$  kalles inverterbar hvis det fins en  $(n \times n)$ -matrise  $A^{-1}$  slik at

$$A \cdot A^{-1} = I_n \quad \text{og} \quad A^{-1} \cdot A = I_n$$

der  $I_n$  er identitetsmatrisen av størrelse  $(n \times n)$ . Hvis  $A$  ikke er inverterbar, kalles den singulær.

$A^{-1}$  kalles den inverse matrisen til  $A$ .



eks. Matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

har invers matrise

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3/4 & -2/4 \\ 1/4 & 4/4 \end{bmatrix}$$

Vi har nemlig:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{array}{cc|cc} & & 3/4 & -2/4 \\ & & 1/4 & 4/4 \\ \hline 4 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{array} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}}$$

## Flere resultater om determinanter og matriser

- ① Absoluttverdien av  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$  er arealet av parallelogrammet utspent av  $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$  og  $\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ .
- ②  $\det(A) = \det(A^T)$  for alle kvadratiske matriser  $A$ .
- ③  $A$  er inverterbar  $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$  — " — " —
- ④  $\det I = 1$ , for alle identitetsmatriser  $I$
- ⑤
  - Byttes to linjer i en determinant, skifter den fortegn
  - Ganger vi alle tall i en linje med et tall  $s$ , så multipliseres determinanten med  $s$ .
  - Legger vi  $s$  ganger en linje til en annen linje, endres ikke determinanten.

Bevis ① La  $\vec{x} = (a, c, 0)$   
 $\vec{y} = (b, d, 0)$

$$\text{Areal parallelogram} \stackrel{\text{vet}}{=} |\vec{x} \times \vec{y}| = \left\| \begin{array}{ccc} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a & c & 0 \\ b & d & 0 \end{array} \right\|$$

$$= \left| \vec{e}_1 \cdot 0 - \vec{e}_2 \cdot 0 + \vec{e}_3 \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \right| = \left\| \begin{array}{cc} a & c \\ b & d \end{array} \right\|$$

$$= \left\| \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right\|$$

② - ⑤ : Pekte og snakket.  $\square$

## Matrisedynamikk

- Tiden regnes i tidspunkter  $t = 0, 1, 2, \dots$
- Tilstanden til systemet ved tid  $t = n$  er gitt ved en tilstandsvektor

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} \quad (\text{Her: Todimensjonalt tilfelle})$$

- Vi regner oss ett hakk fremover i tiden ved å gange tilstandsvektoren med en overgangsmatrise  $M$ :

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = M \cdot \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} \quad \text{for } n \geq 0.$$

eks. Mat 1100 har 300 studenter. Hver student kan være i to tilstander: (1) Leser (2) Sover

- Hvis en student leser i dag, er det helt sikkert at hun/han sover i morgen
- Hvis en student sover i dag, er sannsynligheten 50% for at vedkommende leser i morgen, og 50% for at studenten fortsatt sover da.

La  $x_n$  og  $y_n$  være antall studenter som hhv. leser og sover ved tid  $t = n$ , der  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Anta at

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{alle leser første dag})$$

Skal finne overgangsmatrisen  $M$ .

Løsning Vi finner  $x_{n+1}$  og  $y_{n+1}$  uttrykt ved  $x_n$  og  $y_n$ .

$$\begin{cases} x_{n+1} = (\text{antall som leser på dag } n+1) = \frac{1}{2} y_n \\ y_{n+1} = (\text{--- } n \text{ --- sover --- } n \text{ ---}) = x_n + \frac{1}{2} y_n \end{cases}$$

dvs. 
$$\begin{cases} x_{n+1} = 0x_n + \frac{1}{2} y_n \\ y_{n+1} = 1 \cdot x_n + \frac{1}{2} y_n \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} \quad \text{dvs. } M = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}}}$$

For eksempel:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 300 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{array}{cc|c} & & 300 \\ & & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 300 \end{array} = \begin{bmatrix} 0 \\ 300 \end{bmatrix}$$

Gå bakover i tiden:

Gang med  $M^{-1}$  (hvis den fins)

To hakk fremover i tiden:

$$M(MX) = (M \cdot M) \cdot X = M^2 X$$

def